

الإصدار الثالث
طبعة جديدة
ومنقحة مع إضافات





بالتّعاون مع فريق عكاشة

كل ما تحتاجه في كتاب واحد

المتتاليات

من الألف إلى الياء

الشّعب العلميّة والتّقنيّة والرّياضيات

موافقة لفيديوهات اليوتيوب YouTube

150 تمرين

- ملخص شامل
- مواضيع شاملة في المتتاليات
- جميع مواضيع شعبة العلوم التجريبية 2008_2021
- جميع مواضيع شعبة التقني الرياضي 2008_2021
- جميع مواضيع شعبة الرياضيات 2008_2021
- مواضيع مقترحة
- مواضيع أجنبيّة

التّحضير الجيّد لبكالوريا الجزائر





الأستاذ نور الدين عيساوي

بالتعاون مع فريق عكاشة

المتتاليات

من الألف إلى الياء

موافقة لفيديوهات اليوتيوب

ملخص شامل حول المتتاليات

متتاليات شاملة

جميع متتاليات شعبة العلوم التجريبية 2008-2021

جميع متتاليات شعبة التقني رياضي 2008-2021

جميع متتاليات شعبة الرياضيات 2008-2021

متتاليات مقترحة

متتاليات مقتبسة من مواضيع أجنبية

التحضير الجيد لبكالوريا الجزائر

عكاشة
BOOKSTORE
We can help you
يمكننا أن نساعدك

code: 22-20

بطاقة الكتاب

العنوان: المتتاليات من الألف إلى الياء - السلسلة الفضية-	دار النشر: مكتبة عكاشة للنشر والتوزيع
الشعبة: جميع الشعب العلمية والتقنية والرياضيات	العنوان: 03 شارع الملعب أولاد فايت الجزائر العاصمة - الجزائر-
السنة: الثالثة ثانوي - البكالوريا -	ردمك: 978-9931-856-17
المؤلف: الأستاذ نور الدين عيساوي بالتعاون مع فريق عكاشة	الإيداع القانوني: أكتوبر 2021
	الطبعة: أكتوبر 2021
الإصدار: الثالث	**السعر: 470 دج**

كلمة فريق عكاشة

عندما كنا صغارا أحببنا المطر فكنا نلعب تحته ونستمتع به،
وعندما كبرنا أحببنا العلم فجمعنا شملنا لأجله، وعقدنا العزم على تسخير أنفسنا له.

الأستاذ نور الدين عيساوي الذي غرس الأمل والحماس في قلوب مئات الآلاف من التلاميذ والأساتذة في ثانويات وطننا العربي عامة وفي الجزائر خاصة، فصارت الرياضيات مادة ممتعة جدا وسهلة الوصول إليها، بواسطة فيديوهات مبسطة ورائعة جدا.

السلسلة الفضية هي سلسلة جامعة في مادتها؛ تساعد التلميذ على توحيد مصدره وجمع كل ما يحتاجه في كتاب واحد، تحوي ملخصا شاملا مرفقا بتمارين شاملة يأتي بعدها حلول جميع مواضيع البكالوريا لشعبة العلوم التجريبية وشعبة التقني الرياضي وشعبة الرياضيات، ثم مجموعة من التمارين المقترحة وتمارين مقتبسة من مواضيع أجنبيّة. وعلاوة على كل هذا فللكتاب خاصية فريدة من نوعها وهي موافقتها لفيديوهات اليتيوب فبواسطتها يمكنك التوسع في الشرح أو الزيادة في الفهم بواسطة الفيديوهات المتوفرة مجانا على قناة الأستاذ نور الدين.

إلى كل من يقرأ هذا الكتاب، نسأل الله لك التوفيق والنجاح، ونعلمك أنه يمكنك المساهمة في تطوير النسخة القادمة بإرسال ملاحظاتك أو اقتراحاتك. ولا تنسوا الترحم على أم أستاذنا الغالي نورالدين عيساوي.

يمكنك أن تشترك في قناة الأستاذ نورالدين في اليوتيوب لكي يصلك كل جديد
مع تحيات الأستاذ نور الدين وفريق عكاشة

مواضيع شعبة تقني رياضي 5

مواضيع شعبة الرياضيات 16

متتاليات مقترحة 56

جدول محتويات السلسلة الفضية

ملخص شامل 6

تمارين شاملة للانطلاقة الممتازة.. 12

مواضيع شعبة العلوم التجريبية 28

ملخص شامل

.01. المتتالية العددية

المتتالية العددية الحقيقية u هي دالة ترفق بكل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي عدد طبيعي n_0 معطى، العدد $u(n)$.

$$u: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto u(n)$$

.02. الترميز

نرمز إلى صورة n بالمتتالية u بـ u_n بدلا من $u(n)$ هذا الترميز الجديد يسمى الترميز بدليل.
المتتالية u يرمز لها $(u_n)_{n \geq n_0}$ إذا كانت المتتالية u معرفة من أجل n أكبر من أو يساوي n_0.
المتتالية u يرمز لها $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ أو (u_n) إذا كانت المتتالية u معرفة على $\mathbb{N}$.
u_n هو الحد الذي دليله n ويسمى كذلك الحد العام للمتتالية u.
u_{n_0} هو الحد الأول للمتتالية u إذا كانت معرفة من أجل n أكبر من أو يساوي n_0.
u_0 هو الحد الأول للمتتالية u إذا كانت معرفة على $\mathbb{N}$.

أمثلة:

- المتتالية (u_n) حيث $u_n = 5n^2 + 2$ معرفة على $\mathbb{N}$.
- المتتالية (v_n) حيث $v_n = \frac{5}{n}$ معرفة على $\mathbb{N} - \{0\}$ ونكتب $(v_n)_{n \geq 1}$.
- المتتالية (w_n) حيث $w_n = \frac{n+3}{n-5}$ معرفة من أجل $n \geq 6$ نكتب $(w_n)_{n \geq 6}$.

- في الحد u_n، n هو دليل الحد وليس رتبته.

مثال: المتتالية (w_n) حيث أن $w_n = \frac{n+3}{n-5}$ معرفة من أجل $n \geq 6$، 6 هو دليل الحد w_6 وأما رتبته فهي الرتبة الأولى حيث w_6 هو الحد الأول.

-رتبة الحد u_b حيث $b \in \mathbb{N}$ من متتالية u بالنسبة إلى الحد u_a (a عدد طبيعي أصغر من b) هو العدد الطبيعي $b - a + 1$.

مثال: - إذا كانت المتتالية (u_n) حدها الأول u_0 فإن u_{14} يمثل الحد ذو الرتبة 15 لأن $14 - 0 + 1 = 15$
- إذا كانت المتتالية (v_n) حدها الأول v_1 فإن u_{14} يمثل الحد ذو الرتبة 14 لأن $14 - 1 + 1 = 14$

.03. طرق تعريف المتتالية

- متتالية معرفة بحدها العام بدلالة دالة f مباشرة من الشكل $u_n = f(n)$

مثال: $U_n = 2n^2 + n - 1$ حيث: $F(x) = 2x^2 + x - 1$

- متتالية معرفة بصيغة تراجعية وهي على أنواع:

- متتالية تراجعية من المرتبة الأولى: $u_{n+1} = f(u_n)$ ويعطى معها الحد الأول

مثال: $u_0 = 3$ و $u_{n+1} = 5u_n + 1$ لاحظ أن $f(x) = 5x + 1$

- متتالية تراجعية من المرتبة الثانية:

مثال: $u_1 = 5$ و $u_0 = 1$ و $u_{n+2} = 5u_{n+1} - u_n$

- تنبيه: توجد متتاليات من مراتب أعلى.

- متتالية معرفة بذكر القائمة الأولى من حدودها بحيث تسمح بإستبيان خاصيتها.

مثال (1): 1, 3, 5, 7, 9, 11, ...متتالية الأعداد الفردية

مثال (2): 0, 3, 6, 9, 12,..........متتالية مضاعفات العدد 3

فالأولى هي (u_n) حيث $\begin{cases} u_n = 2n+1 \\ n \in N \end{cases}$ أما الثانية هي (v_n) حيث: $\begin{cases} v_n = 3n \\ n \in N \end{cases}$

.04 إتجاه تغير متتالية عددية

- **متتالية متزايدة:**

تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب) إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0.

$u_{n+1} \geq u_n$ ($u_{n+1} > u_n$ على الترتيب).

- **متتالية متناقصة:**

تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متناقصة (متناقصة تماما على الترتيب) إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0

$u_{n+1} \leq u_n$ ($u_{n+1} < u_n$ على الترتيب).

- **متتالية ثابتة:**

تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ ثابتة إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي $n \geq n_0$ ، $u_{n+1} = u_n$.

- **متتالية رتيبة:**

إذا كانت متتالية متناقصة (متناقصة تماما على الترتيب) أو متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب) نقول أن المتتالية رتيبة (رتيبة تماما على الترتيب).

.05 دراسة إتجاه تغير متتالية

دراسة اتجاه تغير متتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$

الطريقة 01: من أجل كل عدد طبيعي n

- إذا كان: $u_{n+1} - u_n \geq 0$ فإن (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$
- إذا كان: $u_{n+1} - u_n \leq 0$ فإن (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$
- إذا كان: $u_{n+1} - u_n = 0$ فإن (u_n) ثابتة على $\mathbb{N}$

الطريقة 02: (u_n) مكتوبة بدلالة n أي $u_n = f(n)$

- إذا كانت f متزايدة على المجال $[0; +\infty[$ فإن (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.
- إذا كانت f متناقصة على المجال $[0; +\infty[$ فإن (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.
- إذا كانت f ثابتة على المجال $[0; +\infty[$ فإن (u_n) ثابتة على $\mathbb{N}$.

ملاحظة: عكس الخاصية غير صحيح.

الطريقة 03: تستعمل إذا كانت حدود المتتالية موجبة تماما

- إذا كان: $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ فإن (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.
- إذا كان: $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ فإن (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.
- إذا كان: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ فإن (u_n) ثابتة على $\mathbb{N}$.

06. المتتالية المحدودة

تعريف: (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$

- القول أن المتتالية (u_n) **محدودة من الأعلى** يعني وجود عدد حقيقي A حيث من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_n \leq A$$

نقول أن A عنصر **حاد من الأعلى**.

-القول أن المتتالية (u_n) **محدودة من الأسفل** يعني وجود عدد حقيقي B حيث من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_n \geq B$$

نقول أن B عنصر **حاد من الأسفل**.

-القول أن المتتالية (u_n) محدودة يعني أنها محدودة من **الأعلى ومن الأسفل** حيث من أجل كل عدد طبيعي n:

$$B \leq u_n \leq A$$

ونقول أن A عنصر **حاد من الأعلى** و B عنصر **حاد من الأسفل**.

07. نهاية متتالية عددية

(u_n) متتالية عددية و ℓ عدد حقيقي.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ أو $\lim u_n = \ell$ (حيث أن النهاية لا تحسب إلا عند $+\infty$):نقول أن المتتالية (u_n) تقبل ℓ كنهاية إذا وفقط إذا كان كل مجال مفتوح يشمل ℓ يشمل أيضا كل حدود المتتالية (u_n) ابتداء من رتبة معينة وفي هذه الحالة نقول أن المتتالية (u_n) متقاربة، إذا لم تكن المتتالية (u_n) متقاربة نقول أنها متباعدة.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$:نقول أن نهاية المتتالية (u_n) هي $+\infty$ يعني أن كل مجال مفتوح $]\alpha ; +\infty[$, $(\alpha \in \mathbb{R})$ يشمل كل حدود المتتالية (u_n) ابتداء من رتبة معينة.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$: نقول أن نهاية المتتالية (u_n) هي $-\infty$ يعني أن كل مجال مفتوح $]\alpha ; +\infty[$, $(\alpha \in \mathbb{R})$ يشمل كل حدود المتتالية (u_n) ابتداء من رتبة معينة.

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي $u_n = f(n)$ حيث f دالة معرفة على مجال من الشكل $[\alpha; +\infty[$ و α عدد حقيقي.

- إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = \ell$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. (والعكس غير صحيح)
- إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = +\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = -\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

- نهاية متتالية عددية باستعمال الحصر

- **مبرهنة 1:** $(u_n),(v_n),(w_n)$ ثلاث متتاليات عددية و ℓ عدد حقيقي
إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$ وإذا كان ابتداء من عدد طبيعي n_0، $v_n \leq u_n \leq w_n$ فإن

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

- **مبرهنة 2:** (u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان، إذا كان ابتداء من عدد طبيعي n_0، $u_n \geq v_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ فإن: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- **مبرهنة 3:** (u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان، إذا كان ابتداء من عدد طبيعي n_0، $u_n \leq v_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ فإن: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

08. التقارب والتباعد

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية و ℓ عدد حقيقي ثابت.

❖ نقول أن المتتالية (u_n) **متقاربة** إذا كانت:

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ونقول أنها متقاربة نحو ℓ .
- (u_n) متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى.
- (u_n) متتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل.

❖ نقول أن المتتالية (u_n) **متباعدة** إذا كانت:

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ وعندئذ نقول أنها متباعدة نحو $+\infty$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ وعندئذ نقول أنها متباعدة نحو $-\infty$.
- نهاية (u_n) غير موجودة.

09. التجاور

- **تعريف:** تكون (u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان متجاورتان إذا وفقط إذا كانت إحداهما **متزايدة** والأخرى **متناقصة** ونهاية الفرق بينهما يؤول إلى **الصفر**. $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$

- **مبرهنة:** إذا كانت (u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان متجاورتان فإنهما متقاربتان ولهما نفس النهاية.

10. الإستدلال بالتراجع

مسلمة: $P(n)$ خاصية متعلقة بعدد طبيعي n ، n_0 عدد طبيعي.

للبرهان على صحة الخاصية $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 يكفي أن:

1- نتأكد من صحة الخاصية من أجل n_0 أي $P(n_0)$.

2- نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 أي $P(n)$ (فرضية التراجع) ونبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي $P(n+1)$.

3- **النتيجة:** عند انتهاء المرحلتين نقرّ أن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0.

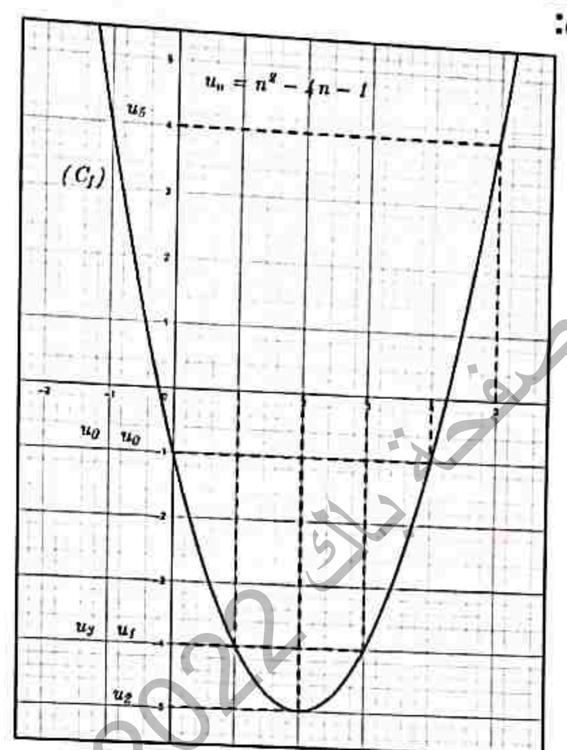
❖ **ملاحظة:** المراحل الثلاثة في الاستدلال بالتراجع ضرورية وغياب واحدة منها "مخل" بشروط عمله.

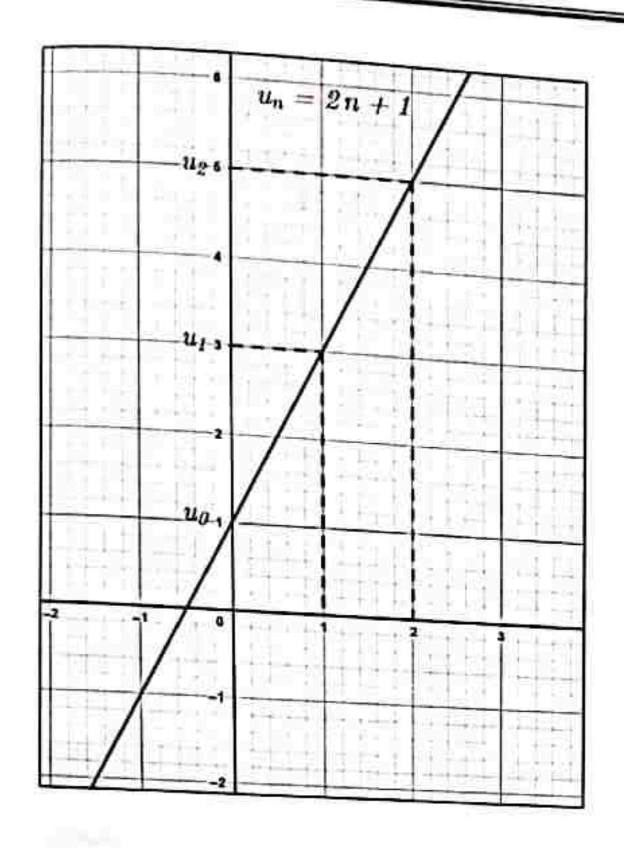
11. التمثيل البياني

❖ **متتالية معرفة بحدها العام بدلالة دالة f مباشرة من الشكل** $u_n = f(n)$

في معلم للمستوي يتم تمثيل حدود المتتالية (u_n) على محور التراتيب حسب قيم n وذلك بعد التعويض المباشر

مثال:



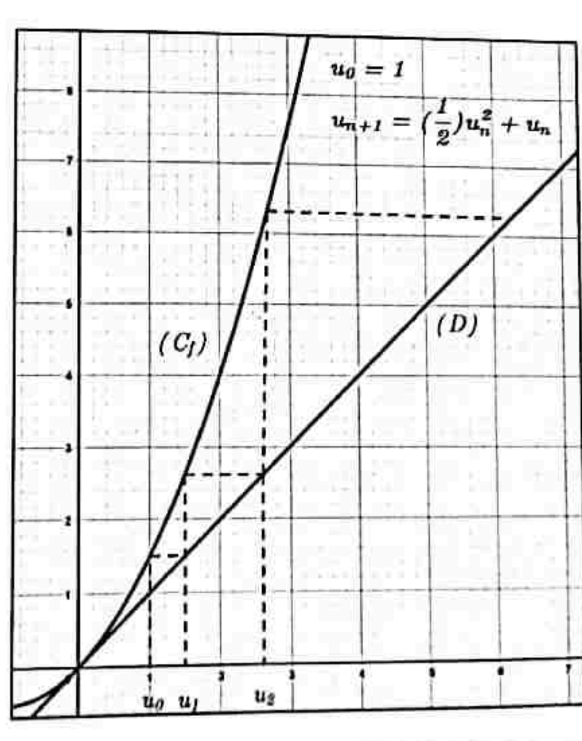


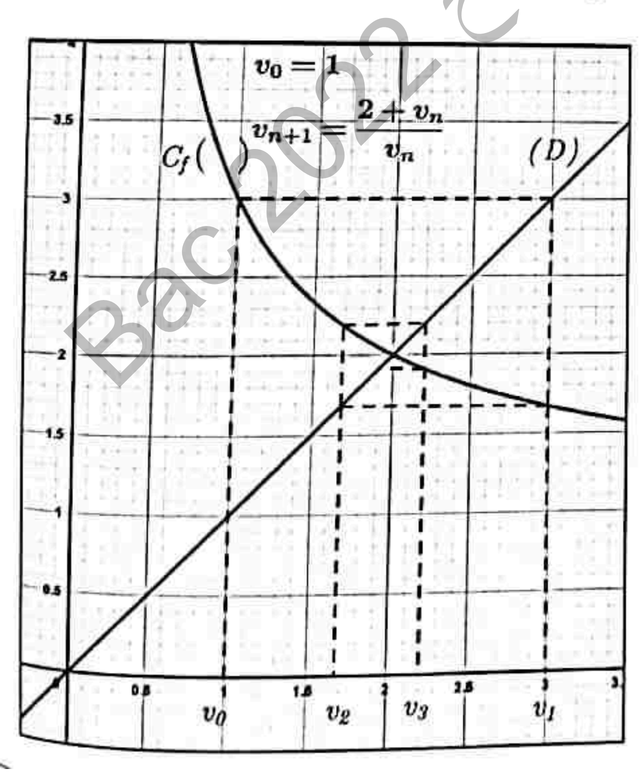
❖ التمثيل البياني للمتتالية العددية المعرفة بعلاقة تراجعية من الدرجة الأولى $u_{n+1} = f(u_n)$

في معلم للمستوي يتم تمثيل حدود المتتالية (u_n) على محور الفواصل ونتبع الخطوات التالية:

- ننشئ (C_f) المنحنى الممثل للدالة f و (D) المستقيم ذو المعادلة $y = x$.
- ننشئ u_0 على محور الفواصل.
- ننشئ النقطة A_0 من المنحنى (C_f) ذات الفاصلة u_0.
- ننشئ النقطة B_0 من المستقيم (D) ذات نفس ترتيب النقطة A_0.
- ننشئ على محور الفواصل u_1 فاصلة النقطة B_0.
- بنفس الأنساق السابقة نعيد نفس العمل بدءا من u_1 لإنشاء u_2 وهكذا لإنشاء u_3, u_4 ....

مثال:





12. ملخص المتتاليات الحسابية

نقول أن (u_n) متتالية حسابية أساسها r (r عدد حقيقي) إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_{n+1} = u_n + r$$

- عبارة الحد العام للمتتالية الحسابية

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_p وأساسها r فإنه من أجل كل عددين طبيعين n و p حيث $n \geq p$ و p يمثل رتبة الحد الأول يكون:

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

حالة خاصة $u_n = u_0 + nr$ إذا كان حدها الأول u_0

- مجموع الحدود المتتابعة للمتتالية الحسابية

بصفة عامة:

$$S = (\text{عدد الحدود}) \times \left(\frac{\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول}}{2}\right)$$

$$S = (n-p+1) \times \left(\frac{u_p + u_n}{2}\right)$$

مثال:

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right)$$

- الوسط الحسابي:

إذا كانت a, b, c ثلاثة حدود متعاقبة يسمى b وسط حسابي ويكون $2b = a + c$ ومنه نجد:

$$2u_n = u_{n-1} + u_{n+1}$$

- اتجاه تغير المتتالية الحسابية

(u_n) متتالية حسابية أساسها r:

- إذا كان $r > 0$ فإن (u_n) متزايدة تماما.
- إذا كان $r < 0$ فإن (u_n) متناقصة تماما.
- إذا كان $r = 0$ فإن (u_n) ثابتة.

13. ملخص المتتالية الهندسية

نقول أن (v_n) متتالية هندسية أساسها q (q عدد حقيقي غير معدوم) إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n:

$$v_{n+1} = v_n \times q$$

- عبارة الحد العام للمتتالية الهندسية

إذا كانت (v_n) متتالية هندسية حدها الأول v_p وأساسها q فإنه من أجل كل عددين طبيعيين n و p حيث $n \geq p$ و p يمثل رتبة الحد الأول يكون:

$$v_n = v_p \times q^{n-p}$$

حالة خاصة $v_n = v_0 \times q^n$ إذا كان حدها الأول v_0

- مجموع الحدود المتتابعة للمتتالية الهندسية

إذا كانت (v_n) متتالية هندسية أساسها q يختلف عن 1 فإنه بصفة عامة:

$$S = (\text{الحد الأول}) \times \left(\frac{1 - \text{الأساس}^{\text{عدد الحدود}}}{1 - \text{الأساس}}\right)$$

$$S = (v_p) \times \left(\frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}\right)$$

مثال:

$$S = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1} + v_n = v_0 \times \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$$

حالة خاصة إذا كان $q = 1$ فإن:

$$S = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1} + v_n = (n+1)v_0$$

- الوسط الهندسي:

إذا كانت a, b, c ثلاثة حدود متعاقبة يسمى b وسط هندسي ويكون $b^2 = ac$ ومنه نجد:

$$(v_n)^2 = v_{n-1} \times v_{n+1}$$

- اتجاه تغير المتتالية الهندسية

(v_n) متتالية هندسية أساسها q:

الحالة الأولى: $q > 1$

- إذا كان $v_0 > 0$ فإن (v_n) متزايدة تماما.
- إذا كان $v_0 < 0$ فإن (v_n) متناقصة تماما.

الحالة الثانية: $q = 1$ فإن (v_n) ثابتة.

الحالة الثالثة: $0 < q < 1$

- إذا كان $v_0 > 0$ فإن (v_n) متناقصة تماما.
- إذا كان $v_0 < 0$ فإن (v_n) متزايدة تماما.

الحالة الرابعة: $q < 0$ فإن (v_n) ليست رتيبة لا يمكن دراستها.

... أساسها r فإنه:

إذا كان $r > 0$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ (متتالية متباعدة).

إذا كان $r < 0$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ (متتالية متباعدة).

إذا كان $r = 0$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u_0$ (متتالية متقاربة).

- نهاية المتتالية الهندسية

(v_n) متتالية هندسية أساسها q فإنه:

1- إذا كان $-1 < q < 1$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$. (متتالية متقاربة).

2- إذا كان $q = 1$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = v_0$. (متتالية متقاربة).

3- إذا كان $q > 1$ فإنه:

- إذا كان $v_0 > 0$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$. (متتالية متباعدة).
- إذا كان $v_0 < 0$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$. (متتالية متباعدة).

4- إذا كان $q \leq -1$ فإن النهاية غير موجودة. (متتالية متباعدة).

تمارين شاملة للانطلاقة الممتازة

(v_n) متتالية عدد...

1-برهن أن $(v_n$...
أساسها وحدها الا...
2-ادرس اتجاه تغ...
أحسب نهايتها.
3-احسب بدلالة ...
$\ldots \times v_n$

لتكن الدالة f المعر...
$(x) = \sqrt{5x+6}$...
متعامد ومتجانس...
1-ادرس اتجاه تغي...
2-أوجد فاصلة نقط...
ذو المعادلة: $= x$...
3-احسب $f(2)$ ثـ...

لتكن (u_n) المتتالي...
ومن أجل كل عدد...
1-على الرسم: مثل...
حسابها على محور...
التمثيل. ثم ضع تخ...
وتقاربها.
2-برهن بالتراجع أ...
3-أدرس اتجاه تغير...
متقاربة وعين u_n...
4-برهن أنه من أجل...
$(6 - u_n)$...
5-بين أنه من أجل...
ثم استنتج مرة أخرى...

- نهاية المتتالية الحسابية	- نهاية المتتالية الهندسية
(u_n) متتالية حسابية أساسها r فإنه: 1- إذا كان $r > 0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (متتالية متباعدة). 2- إذا كان $r < 0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ (متتالية متباعدة). 3- إذا كان $r = 0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0$ (متتالية متقاربة).	(v_n) متتالية هندسية أساسها q فإنه: 1- إذا كان $-1 < q < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$. (متتالية متقاربة). 2- إذا كان $q = 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = v_0$. (متتالية متقاربة). 3- إذا كان $q > 1$ فإنه: - إذا كان $v_0 > 0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. (متتالية متباعدة). - إذا كان $v_0 < 0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$. (متتالية متباعدة). 4- إذا كان $q \leq -1$ فإن النهاية غير موجودة. (متتالية متباعدة).

تمارين شاملة للانطلاقة الممتازة

1. تمرين مهم جدا وشامل 01

الجزء الأول

(v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$$v_n = 5\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

1-برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول.

2-ادرس اتجاه تغير (v_n) واستنتج أنها متقاربة ثم أحسب نهايتها.

3-احسب بدلالة n الجداء p_n:

$$p_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$$

الجزء الثاني

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ حيث: $f(x)=\sqrt{5x+6}$ ، (C_f) منحناه البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1-ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

2-أوجد فاصلة نقطة تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y=x$

3-احسب $f(2)$ ثم ارسم (C_f) و (Δ).

الجزء الثالث

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n لدينا $u_{n+1} = f(u_n)$

1-على الرسم: مثل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 دون حسابها على محور الفواصل مع اظهار خطوط التمثيل. ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير (u_n) وتقاربها.

2-برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$1 \le u_n \le 6$$

3-أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة وعين $\lim_{n\to+\infty} u_n$

4-برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$0 \le 6 - u_{n+1} \le \frac{5}{6}(6-u_n)$$

5-بين أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$ ، $0 \le 6 - u_n \le v_n$ ثم استنتج مرة أخرى $\lim_{n\to+\infty} u_n$

✍ الحل المفصل

الجزء الاول

1- البرهان أن (v_n) متتالية هندسية:

تكون (v_n) متتالية هندسية إذا كان

$$v_{n+1} = v_n \times q$$

لدينا

$$v_{n+1} = 5\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1} = 5\left(\frac{5}{6}\right)^n\left(\frac{5}{6}\right)$$

$$v_{n+1} = v_n \times \frac{5}{6}$$

ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{5}{6}$ وحدها الأول

$v_n = 5\left(\frac{5}{6}\right)^n$ ومنه $v_0 = 5\left(\frac{5}{6}\right)^0 = 5$

2-دراسة اتجاه تغير المتتالية (v_n):

ندرس إشارة الفرق $v_{n+1} - v_n$

$$v_{n+1} - v_n = 5\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1} - 5\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$= 5\left(\frac{5}{6}\right)^n\left(\frac{5}{6}\right) - 5\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$= 5\left(\frac{5}{6}\right)^n\left[\frac{5}{6}-1\right]$$

$$= 5\left(\frac{5}{6}\right)^n\left[\frac{5-6}{6}\right]$$

$$= 5\left(\frac{5}{6}\right)^n\left(-\frac{1}{6}\right) < 0$$

ومنه (v_n) متتالية متناقصة تماما

استنتاج ان (v_n) متتالية متقاربة

بما أن (v_n) متتالية هندسية وأساسها $-1<q<1$ فهي متقاربة

حساب النهاية:

$\lim_{n\to+\infty} 5\left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$ لأن: $-1<\frac{5}{6}<1$

3-حساب الجداء p_n بدلالة n:

$$p_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$$

لدينا $v_n = v_0 q^n$

$$\begin{cases} n=0\ ; & v_0=v_0 \\ n=1\ ; & v_1=v_0q \\ n=2\ ; & v_2=v_0q^2 \\ & \vdots \\ n=n\ ; & v_n=v_0q^n \end{cases}$$ بالضرب طرف لطرف

نجد

$$p_n=v_0(v_0q)(v_0q^2)\times \dots\times(v_0q^n)$$
$$p_n=v_0^{n+1}(q\times q^2\times q^3\times\dots\times q^n)$$
$$p_n=(5)^{n+1}\left[\left(\frac{5}{6}\right)\times\left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3\dots\left(\frac{5}{6}\right)^n\right]$$
$$p_n=(5)^{n+1}\left[\left(\frac{5}{6}\right)^{\overbrace{1+2+3+\dots+n}^{\text{حدود متتالية حسابية}}}\right]$$
$$p_n=(5)^{n+1}\left[\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{n}{2}(n+1)}\right]$$

الجزء الثاني

1-دراسة اتجاه تغير الدالة f على: $[0;+\infty[$

حساب النهايات: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

الاشتقاق: الدالة f قابلة لاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{5}{2\sqrt{5x+6}}$$

اتجاه التغير: نعلم أنه مهما يكن $x\in[0;+\infty[$ فإن

$$\frac{5}{2\sqrt{5x+6}}>0$$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$

جدول التغيرات: لدينا $f(0)=\sqrt{6}$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\sqrt{6}$ ↗ $+\infty$

2-إيجاد فاصلة نقطة تقاطع (C_f) مع (Δ)

نحل المعادلة $f(x)=y$

$$\sqrt{5x+6}=x$$

نربع الطرفين نجد: $5x+6=x^2$

أي $x^2-5x-6=0$

$\Delta=25+4(6)(1)$

$\Delta=49$ ومنه $\sqrt{\Delta}=7$

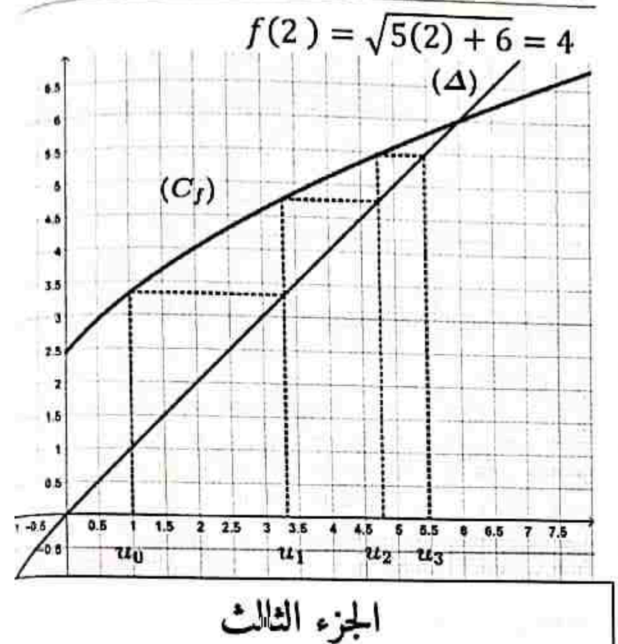
$x_1=\frac{5-7}{2}=-1$ ، $x_2=\frac{5+7}{2}=6$

$-1\notin[0;+\infty[$ ومنه $x=6$

فاصلة نقطة تقاطع (C_f) مع (Δ) هي $x_0=6$

3-حساب $f(2)$ و الرسم

$$f(2)=\sqrt{5(2)+6}=4$$



الجزء الثالث

1-تمثيل الحدود في الرسم السابق

التخمين:

نلاحظ أن $u_0<u_1<u_2$

أي المتتالية (u_n) متزايدة تماما وتتقارب نحو فاصل نقطة تقاطع (C_f) مع (Δ) أي نحو العدد 6

2- البرهان بالتراجع أن: $1\le u_n\le 6$

- نسمي $p(n)$ الخاصية: $1\le u_n\le 6$

من أجل $n=0$ لدينا $1\le u_0=1\le 6$ أي $p(0)$ محققة

- نفرض $p(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n أي $1\le u_n\le 6$

ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي $1\le u_{n+1}\le 6$

لدينا من الفرضية أن $1\le u_n\le 6$

والدالة f مستمرة ومتزايدة تماما ومنه

$$f(1)\le f(u_n)\le f(6)$$

ولدينا في المعطيات أن $u_{n+1}=f(u_n)$

$$\sqrt{5(1)+6}\le u_{n+1}\le\sqrt{5(6)+6}$$
$$1\le\sqrt{11}\le u_{n+1}\le 6$$

ومنه $p(n+1)$ محققة

- وأخيرا وحسب البرهان بالتراجع فانه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $1\le u_n\le 6$

3- دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n):

ندرس إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$

$$u_{n+1}-u_n=\sqrt{5u_n+6}-u_n$$

$$= \frac{\left[\sqrt{5u_n+6} - u_n\right]\left[\sqrt{5u_n+6} + u_n\right]}{\sqrt{5u_n+6} + u_n}$$

$$= \frac{5u_n + 6 - u_n^2}{\sqrt{5u_n+6} + u_n}$$

$$= \frac{-u_n^2 + 5u_n + 6}{\sqrt{5u_n+6} + u_n}$$

لدينا $\sqrt{5u_n+6} + u_n > 0$

لأن $u_n \geq 1$ (من البرهان بالتراجع)

ندرس إشارة $-u_n^2 + 5u_n + 6$

$\Delta = 49$, $\sqrt{\Delta} = 7$

$$u_{n_1} = \frac{-5-7}{-1(2)} = 6$$

$$u_{n_2} = \frac{-5+7}{-1(2)} = -1$$

u_n	0	-1		6		$+\infty$
$-u_n^2+5u_n+6$	$-$	0	$+$	0	$-$	

من الجدول نجد أن $-u_n^2 + 5u_n + 6 > 0$ لما $u_n \in [1;6]$

ومنه $u_{n+1} - u_n \geq 0$ أي المتتالية (u_n) متزايدة

- الاستنتاج انها متقاربة:

بما أن (u_n) متتالية متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 6 فهي متقاربة نحو نهاية l

- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

بما أن (u_n) متقاربة

فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$

أي نحل المعادلة $f(l) = l$

$\sqrt{5l+6} = l$ مع $l \geq 0$ وحسب سؤال نقطة تقاطع (C_f) مع (Δ) نجد أن: $l_1 = 6$ و $l_2 = -1$

لكن $-1 \notin [1;6]$ ومنه $l = 6$ إذن:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 6$$

4-البرهان أن $0 \leq 6 - u_{n+1} \leq \frac{5}{6}(6 - u_n)$

لدينا من البرهان بالتراجع أن $1 \leq u_{n+1} \leq 6$

أي $0 \leq 6 - u_{n+1}$

$$6 - u_{n+1} = 6 - \sqrt{5u_n+6}$$

$$= \frac{\left(6 - \sqrt{5u_n+6}\right)\left(6 + \sqrt{5u_n+6}\right)}{6 + \sqrt{5u_n+6}}$$

$$= \frac{36 - (5u_n+6)}{6+\sqrt{5u_n+6}} = \frac{36 - 5u_n - 6}{6 + \sqrt{5u_n+6}}$$

$$= \frac{30 - 5u_n}{6 + \sqrt{5u_n+6}} = \frac{5(6-u_n)}{6+\sqrt{5u_n+6}}$$

لدينا $1 \leq u_{n+1} \leq 6$ أي $1 \leq \sqrt{5u_n+6} \leq 6$

نضيف 6: $7 \leq 6 + \sqrt{5u_n+6} \leq 12$

نقلب ونضرب في 5: $\frac{5}{12} \leq \frac{5}{6+\sqrt{5u_n+6}} \leq \frac{5}{7}$

لدينا $u_n \leq 6$ أي $0 \leq 6 - u_n$

نضرب في $(6-u_n)$ كل طرف نجد

$$\frac{5(6-u_n)}{12} \leq \frac{5(6-u_n)}{6+\sqrt{5u_n+6}} \leq \frac{5}{7}(6-u_n)$$

و $\frac{5}{7}(6-u_n) \leq \frac{5}{6}(6-u_n)$

ومنه $\frac{5(6-u_n)}{6+\sqrt{5u_n+6}} \leq \frac{5}{6}(6-u_n)$

ولدينا $6 - u_{n+1} = \frac{5(6-u_n)}{6+\sqrt{5u_n+6}}$

أي $0 \leq 6 - u_{n+1} \leq \frac{5}{6}(6-u_n)$

5-البرهان أن من أجل $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbf{0 \leq 6 - u_n \leq v_n}$$

هناك طريقتان للبرهان:

- طريقة 1: لدينا مما سبق أن

$$0 \leq 6 - u_{n+1} \leq \frac{5}{6}(6-u_n)$$

ومنه نجد:

$$\begin{cases} n = 0: 0 \leq 6 - u_1 \leq \frac{5}{6}(6-u_0) \\ n = 1: 0 \leq 6 - u_2 \leq \frac{5}{6}(6-u_1) \\ n = 2: 0 \leq 6 - u_3 \leq \frac{5}{6}(6-u_2) \\ \vdots \\ n = n-1: 0 \leq 6 - u_n \leq \frac{5}{6}(6-u_{n-1}) \end{cases}$$

بالضرب طرف لطرف ثم الاختزال نجد:

$$0 \leq 6 - u_n \leq \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1+1} (6-u_0)$$

ومنه $0 \leq 6 - u_n \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n (6-1)$

وأخيرا $0 \leq 6 - u_n \leq 5\left(\frac{5}{6}\right)^n$

أي $0 \leq 6 - u_n \leq v_n$

لأن $v_n = 5\left(\frac{5}{6}\right)^n$

- طريقة 2: نستعمل البرهان بالتراجع:

نسمي $p(n)$ الخاصية $"0 \leq 6 - u_n \leq v_n"$

نتأكد من أجل $n = 0$

لدينا $0 \leq 6 - u_0 \leq 5\left(\frac{5}{6}\right)^0 = 5$

$u_0 = 1$

$5 \le 5 \le 0$ أي $p(0)$ محققة

نفرض أن $p(n)$ محققة

ونبرهن صحة $p(n+1)$

أي $0 \le 6 - u_{n+1} \le 5\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}$

لدينا من الفرضية: $0 \le 6 - u_n \le 5\left(\frac{5}{6}\right)^n$

نضرب في $\left(\frac{5}{6}\right)$ نجد $\frac{5}{6}(6-u_n) \le 5\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}$

لكن لدينا من السابق أن:

$$0 \le 6 - u_{n+1} \le \frac{5}{6}(6-u_n)$$

أي $0 \le 6 - u_{n+1} \le 5\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}$

ومنه $p(n+1)$ محققة وأخيرا فإن:

$0 \le 6 - u_n \le 5\left(\frac{5}{6}\right)^n$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

- استنتاج مرة أخرى $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

لدينا $0 \le 6 - u_n \le 5\left(\frac{5}{6}\right)^n$

ولدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 5\left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$

لأن $-1 < \frac{5}{6} < 1$

ومنه وحسب مبرهنة الحصر فإن:

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - 6) = 0$

إذن: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 6$

2. تمرين مهم جدا وشامل 02

I - (u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما:

$$\begin{cases} \ln u_3 - \ln u_2 = 1 \\ \ln u_3 + 2\ln\sqrt{u_6} = 11 \end{cases}$$

1-عين أساس المتتالية (u_n) وحدها الأول u_0.

2-اكتب u_n بدلالة n

-ثم ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

3-برهن أن العدد e^{2020} حدا من حدود المتتالية (u_n) وعين رتبته.

4-أحسب ما يلي:

$S_1 = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

$S_2 = u_0^3 + u_1^3 + u_2^3 + \cdots + u_n^3$

$S_3 = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \cdots + \frac{1}{u_n}$

$S_4 = \sqrt{u_0} + \sqrt{u_1} + \sqrt{u_2} + \cdots + \sqrt{u_n}$

$S_5 = u_0 + u_2 + u_4 + \cdots + u_{2n}$

$S_6 = u_1 + u_3 + u_5 + \cdots + u_{2n-1}$

$p_n = u_0 \times u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n$

$S_7 = \ln u_0 + \ln u_1 + \ln u_2 + \cdots + \ln u_n$

$S_8 = u_0 + \frac{u_1}{e} + \frac{u_2}{e^2} + \cdots + \frac{u_n}{e^n}$

II-(v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$$v_n = 3\ln u_{n+1} - \ln u_n$$

1-أثبت أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

2-احسب بدلالة n المجموع T_n:

$$T_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$$

✍ الحل المفصل

1-تعيين الأساس q و u_0 للمتتالية (u_n)

لدينا $\ln u_3 - \ln u_2 = 1$

$\ln\left(\frac{u_3}{u_2}\right) = 1$

ومنه $u_3 = u_2 q$ و $\ln\left(\frac{u_2 q}{u_2}\right) = 1$

أي $\ln(q) = 1$ و $\ln q = \ln e$

ومنه $q = e$

لدينا $u_6 = u_0 q^6$ و $u_3 = u_0 q^3$

ومنه

$\sqrt{u_6} = (u_6)^{\frac{1}{2}}$ و $\ln u_3 + 2\ln\sqrt{u_6} = 11$

$\ln u_3 + 2\ln u_6^{\frac{1}{2}} = 11$

$\ln u_3 + 2\left(\frac{1}{2}\right)\ln u_6 = 11$

$\ln u_3 + \ln u_6 = 11$

$\ln(u_0 q^3) + \ln(u_0 q^6) = 11$

$\boxed{q = e}$

$\ln(u_0 q^3 \times u_0 q^6) = 11$

$\ln(u_0^2 \times q^9) = 11 \Rightarrow \ln u_0^2 + \ln q^9 = 11$

$2\ln u_0 + 9\ln e = 11$

$2\ln u_0 = 2$ أي $\ln u_0 = 1 \Rightarrow u_0 = e$

$\boxed{u_0 = e}$

$u_0 = 1$

$0 \le 5 \le 5$ أي $p(0)$ محققة

نفرض أن $p(n)$ محققة

ونبرهن صحة $p(n+1)$

أي $0 \le 6 - u_{n+1} \le 5\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}$

لدينا من الفرضية: $0 \le 6 - u_n \le 5\left(\frac{5}{6}\right)^{n}$

نضرب في $\left(\frac{5}{6}\right)$ نجد $\frac{5}{6}(6 - u_n) \le 5\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}$

لكن لدينا من السابق أن:

$$0 \le 6 - u_{n+1} \le \frac{5}{6}(6 - u_n)$$

أي $0 \le 6 - u_{n+1} \le 5\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}$

ومنه $p(n+1)$ محققة وأخيرا فإن:

$0 \le 6 - u_n \le 5\left(\frac{5}{6}\right)^{n}$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

- استنتاج مرة أخرى $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

لدينا $0 \le 6 - u_n \le 5\left(\frac{5}{6}\right)^{n}$

ولدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 5\left(\frac{5}{6}\right)^{n} = 0$

لأن $-1 < \frac{5}{6} < 1$

ومنه وحسب مبرهنة الحصر فإن:

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n - 6) = 0$$

إذن: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 6$

2. تمرين مهم جدا وشامل 02

I - (u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما:

$$\begin{cases} \ln u_3 - \ln u_2 = 1 \\ \ln u_3 + 2\ln\sqrt{u_6} = 11 \end{cases}$$

1-عين أساس المتتالية (u_n) وحدها الأول u_0.

2-اكتب u_n بدلالة n

-ثم ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

3-برهن أن العدد e^{2020} حدا من حدود المتتالية (u_n) وعين رتبته.

4-أحسب ما يلي:

$S_1 = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots . + u_n$

$S_2 = u_0^3 + u_1^3 + u_2^3 + \cdots . + u_n^3$

$S_3 = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \cdots . + \frac{1}{u_n}$

$S_4 = \sqrt{u_0} + \sqrt{u_1} + \sqrt{u_2} + \cdots . + \sqrt{u_n}$

$S_5 = u_0 + u_2 + u_4 + \cdots . + u_{2n}$

$S_6 = u_1 + u_3 + u_5 + \cdots . + u_{2n-1}$

$p_n = u_0 \times u_1 \times u_2 \times \ldots . \times u_n$

$S_7 = \ln u_0 + \ln u_1 + \ln u_2 + \cdots + \ln u_n$

$S_8 = u_0 + \frac{u_1}{e} + \frac{u_2}{e^2} + \cdots . + \frac{u_n}{e^n}$

II-(v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـــ:

$$v_n = 3\ln u_{n+1} - \ln u_n$$

1-أثبت أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين اساسها وحدها الأول.

2-احسب بدلالة n المجموع T_n:

$$T_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$$

الحل المفصل

1-تعيين الأساس q و u_0 للمتتالية (u_n)

لدينا $\ln u_3 - \ln u_2 = 1$

$\ln\left(\frac{u_3}{u_2}\right) = 1$

ومنه $u_3 = u_2 q$ $\quad \ln\left(\frac{u_2 q}{u_2}\right) = 1$

أي $\ln(q) = 1$

ومنه $\ln q = \ln e$

$q = e$

لدينا $u_3 = u_0 q^3$ و $u_6 = u_0 q^6$

ومنه $\sqrt{u_6} = (u_6)^{\frac{1}{2}}$ و $\ln u_3 + 2\ln\sqrt{u_6} = 11$

$\ln u_3 + 2\ln u_6^{\frac{1}{2}} = 11$

$\ln u_3 + 2\left(\frac{1}{2}\right)\ln u_6 = 11$

$\ln u_3 + \ln u_6 = 11$

$\ln(u_0 q^3) + \ln(u_0 q^6) = 11$ $\quad \boxed{q = e}$

$\ln(u_0 q^3 \times u_0 q^6) = 11$

$\ln(u_0^2 \times q^9) = 11 \Rightarrow \ln u_0^2 + \ln q^9 = 11$

$2\ln u_0 + 9\ln e = 11$

$2\ln u_0 = 2$ أي $\ln u_0 = 1 \Rightarrow u_0 = e$

$\boxed{u_0 = e}$

2- كتابة u_n بدلالة n:

لدينا $u_n = u_0 q^n$ أي $u_n = e \times e^n = e^{n+1}$

$u_n = e^{n+1}$

دراسة اتجاه تغير (u_n):

ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = e^{n+2} - e^{n+1}$$
$$= e^{n+1+1} - e^{n+1}$$
$$= e^{n+1} \times e - e^{n+1} = e^{n+1}[e-1] > 0$$

ومنه (u_n) متتالية متزايدة تماما

3- البرهان أن العدد e^{2020} حدا من حدود (u_n)

نحل المعادلة $u_n = e^{2020}$ أي $e^{n+1} = e^{2020}$

ومنه $n + 1 = 2020$ أي $n = 2019$ ومنه العدد e^{2020} حدا من حدود (u_n) ورتبته هي 2020 لأنها انطلقت من u_0

4- حساب المجاميع والجداء

01- حساب S_1

$$S_1 = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n-0+1}}{1-q}$$

$$S_1 = e\left(\frac{1 - e^{n+1}}{1-e}\right)$$

02- حساب S_2

$$S_2 = u_0^3 + u_1^3 + u_3^3 + \cdots + u_n^3$$

$$u_n = u_0 q^n$$

بالجمع طرف لطرف

نجد
$$u_0^3 = u_0^3$$
$$u_1^3 = (u_0 q)^3 = u_0^3 q^3$$
$$u_2^3 = (u_0 q^2)^3 = u_0^3 q^6$$
$$u_3^3 = (u_0 q^3)^3 = u_0^3 q^9$$
$$\vdots$$
$$u_n^3 = (u_0 q^n)^3 = u_0^3 q^{3n}$$

$$S_2 = u_0^3 + u_0^3 q^3 + u_0^3 q^6 + \cdots + u_0^3 q^{3n}$$
$$= u_0^3[1 + q^3 + q^6 + \cdots + q^{3n}]$$

حدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها $q' = q^3$

وحدها الأول قيمته 1

$$S_2 = u_0^3\left[1\frac{1-(q^3)^{n-0+1}}{1-q^3}\right] \text{ ، } u_0^3 = e^3$$

$$S_2 = e^3\left[\frac{1-(e^3)^{n+1}}{1-e^3}\right] = e^3\left[\frac{1-e^{3n+3}}{1-e^3}\right]$$

03- حساب S_3

$$S_3 = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \cdots + \frac{1}{u_n}$$

$$u_n = u_0 q^n$$

$$S_3 = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_0 q} + \frac{1}{u_0 q^2} + \cdots . + \frac{1}{u_0 q^n}$$

$$S_3 = \frac{1}{u_0}\left[1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \cdots + \frac{1}{q^n}\right]$$

حدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها

$q' = \frac{1}{q} = \frac{1}{e}$ أي $q' = e^{-1}$ ؛ $\frac{1}{u_0} = e^{-1}$

$$S_3 = e^{-1}\left[1\frac{1-(e^{-1})^{n+1}}{1-e^{-1}}\right]$$

$$S_3 = e^{-1}\left[\frac{1-e^{-n-1}}{1-e^{-1}}\right]$$

04- حساب S_4

$$S_4 = \sqrt{u_0} + \sqrt{u_1} + \sqrt{u_2} + \cdots + \sqrt{u_n}$$

$$\sqrt{u_n} = \sqrt{u_0 q^n} = \sqrt{u_0}\sqrt{q^n}$$

$$S_4 = \sqrt{u_0} + \sqrt{u_0}\sqrt{q} + \sqrt{u_0}\sqrt{q^2} + \cdots + \sqrt{u_0}\sqrt{q^n}$$

$$S_4 = \sqrt{u_0}\underbrace{\left[1 + \sqrt{q} + \sqrt{q^2} + \cdots + \sqrt{q^n}\right]}$$

حدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها $q' = \sqrt{q}$

$$\sqrt{u_0} = \sqrt{e}\,,\ q' = \sqrt{e}$$

$$S_4 = \sqrt{e}\left[1\frac{1-(\sqrt{e})^{n+1}}{1-\sqrt{e}}\right]$$

05- حساب S_5

$$S_5 = u_0 + u_2 + u_4 + \cdots + u_{2n}$$

لدينا: $u_n = u_0\, q^n = e^{n+1}$

ومنه: $u_{2n} = e^{2n+1} = w_n$

(w_n) متتالية هندسية أساسها $q' = e^2$ وحدها الأول $w_0 = e$

ومنه نجد $S_5 = w_0 + w_1 + .. + w_n$

$$S_5 = e\left[\frac{1-(e^2)^{n+1}}{1-e^2}\right] = e\left[\frac{1-e^{2n+2}}{1-e^2}\right]$$

06- حساب S_6

$(n \in \mathbb{N}^*)$

$$S_6 = u_1 + u_3 + u_5 + \cdots + u_{2n-1}$$

لدينا $u_n = e^{n+1}$

ومنه $u_{2n-1} = e^{2n-1+1} = e^{2n} = H_n$

(H_n) متتالية هندسية أساسها $q' = e^2$ وحدها الأول $H_1 = e^2$

ومنه $S_6 = H_1 + H_2 + H_3 + \cdots + H_n$

$$S_6 = e^2\frac{1-(e^2)^{n-1+1}}{1-e^2} = e^2\frac{1-e^{2n}}{1-e^2}$$

07- حساب P_n

$$P_n = u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$$

$$u_n = u_0q^n$$

$$\left.\begin{array}{l} u_0 = u_0 \\ u_1 = u_0q \\ u_2 = u_0q^2 \\ u_3 = u_0q^3 \\ \quad . \\ \quad . \\ .u_n = u_0q^n \end{array}\right\}$$ بالضرب طرف لطرف نجد

$$P_n = u_0(u_0q)(u_0q^2)\dots\dots(u_0q^n)$$

$$p_n = u_0^{n+1}(q.q^2.q^3\dots.q^n)$$

$$P_n = e^{n+1}\left(e^{\overbrace{1+2+3+\cdots+n}}\right)$$ حدود متتابعة لمتتالية حسابية أساسها $r=1$

$$P_n = e^{1+n}\,e^{\frac{n}{2}(n+1)}$$

08- حساب S_7

$$S_7 = \ln u_0 + \ln u_1 + \ln u_2 + \cdots + \ln u_n$$

$$S_7 = \ln(u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n)$$

$$S_7 = \ln(P_n)$$

لأن $P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$

$$S_7 = \ln(e^{n+1}\,e^{\frac{n}{2}(n+1)})$$

$$S_7 = \ln e^{n+1} + \ln e^{\frac{n}{2}(n+1)}$$

$$S_7 = n+1+\frac{n}{2}(n+1)$$

09- حساب S_8

$$S_8 = u_0 + \frac{u_1}{e} + \frac{u_2}{e^2} + \cdots + \frac{u_n}{e^n}$$

$$u_n = e^{n+1}$$

$$S_8 = e + \frac{e^2}{e} + \frac{e^3}{e^2} + \cdots + \frac{e^{n+1}}{e^n}$$

$$S_8 = \underbrace{e+e+e+\cdots+e}_{\text{متتالية ثابتة}}$$

$$S_8 = e(n+1)$$

II-01- البرهان أن (v_n) متتالية حسابية:

حتى تكون (v_n) متتالية حسابية يجب :

$$v_{n+1} - v_n = r$$

لدينا $v_{n+1} = 3\ln u_{n+2} - \ln u_{n+1}$

ولدينا $v_{n+1} = 3\ln e^{n+3} - \ln(e^{n+2})$

$$v_n = 3\ln e^{n+2} - \ln e^{n+1}$$

اذن

$$v_{n+1} - v_n = 3(n+3) - (n+2) - 3(n+2) + (n+1)$$

$$= 3n+9-n-2-3n-6+n+1 = 2$$

ومنه $v_{n+1} - v_n = 2$

أي المتتالية (v_n) حسابية أساسها $r = 2$ وحدها الأول

$$v_0 = 3\ln e^{0+2} - \ln e^{0+1}$$

$$v_0 = 6\ln e^1 - \ln e^1 \quad \boxed{v_0 = 5}$$

02- حساب بدلالة n المجموع T_n

$$T_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$$

$$T_n = \frac{n}{2}[v_0 + v_n]$$

$$v_{n-1} = v_0 + (n-1)r = 5 + 2(n-1)$$

$$T_n = \frac{n}{2}(5+5+2n-2)$$

$$T_n = \frac{n}{2}(2n+8) = n(n+4)$$

3. متتالية شاملة كبرى

-محتويات المسألة:
- دراسة دالة جذرية شاملة .
- رسم منحناها البياني .
- انشاء حدود المتتالية .
- كيفية البرهان ان المتتالية لا حسابية ولا هندسية ولا ثابتة.
- البرهان بالتراجع .
- دراسة اتجاه تغير المتتالية بطريقتين مختلفتين .
- حساب نهاية متتالية.
- برهان المتباينات .
- ايجاد وضعية α حتى تكون المتتالية هندسية.
- عبارة الحد العام للمتتالية هندسية .
- المجاميع والجداءات بطريقة رائعة .
- المتتالية الحسابية ومجموعها .

I- f دالة عددية معرفة على المجال $]2;11]$ بالعبارة: $f(x)=2+\sqrt{x-2}$.

(C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، (Δ) مستقيم معادلته $y=x$.

1- ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]2;11]$ ثم شكل جدول تغيراتها.

2- استنتج أنه إذا كان $2<x\leq 11$ فإن: $f(x)\in]2;11]$.

3- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

4- ارسم (Δ) ثم (C_f) .

II- (u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول u_0 : $u_0=11$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1}=f(u_n)$$

1- أنشئ على حامل محور الفواصل الحدود: u_0 ، u_1 و u_2 . ثم أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2- احسب u_1 و u_2 ثم تحقق أن المتتالية (u_n) ليست حسابية وليست هندسية وليست ثابتة.

3- برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $3\leq u_n\leq 11$.

4- بين بطريقتين مختلفتين أن المتتالية (u_n) متناقصة.

5- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو نهاية l يطلب تعيينها.

6- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$|3-u_{n+1}|\leq k|3-u_n|$$

حيث k عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $]0;1[$ يطلب تعيينه.

7- استنتج انه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$0\leq|3-u_n|\leq 8k^n$$

ثم استنتج مرة أخرى $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

III- (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$v_n=\ln(u_n+\alpha)$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}$

1- عين قيمة العدد α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$. واحسب الحد الأول v_0 واستنتج أنها متقاربة.

2- اكتب v_n بدلالة n واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$ ثم عين u_n بدلالة n واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

3- احسب بدلالة n المجاميع والجداءات التالية ثم عين نهاية كل منها:

$S_1=v_0+v_1+v_2+\cdots+v_n$

$S_2=v_{1442}+v_{1443}+\cdots+v_{n+2021}$

$S_3=v_0^3+v_1^3+v_2^3+\cdots+v_n^3$

$S_4=\frac{8}{v_0}+\frac{8}{v_1}+\frac{8}{v_2}+\cdots+\frac{8}{v_n}$

$S_5=v_0+\frac{v_1}{2}+\frac{v_2}{2}+\cdots+\frac{v_n}{2}$

$S_6=v_0+2v_1+2^2v_2+\cdots+2^nv_n$

$S_7=(u_0-2)(u_1-2)\times\ldots\times(u_n-2)$

$S_8=\ln(\sqrt{u_0-2})+\ln(\sqrt{u_1-2})+\cdots+\ln(\sqrt{u_n-2})$

$S_9=v_3+v_7+v_{11}+\cdots+v_{4n-1}$

$S_{10}=v_0+v_4+v_8+\cdots+v_{4n}$

$S_{11}=v_0^2\,v_1^2\,v_3^2\ldots v_n^2$

$S_{12}=\ln(v_0)^2+\ln(v_1)^2+\cdots+\ln(v_n)^2$

$S_{13}=(v_0+2)+(v_1+4)+\cdots+(v_n+2n+2)$

$S_{14}=\ln\left(\frac{v_0}{v_1}\right)+\ln\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2+\ln\left(\frac{v_2}{v_3}\right)^3+\cdots+\ln\left(\frac{v_{n-1}}{v_n}\right)^n$

IV- (w_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $w_n=\ln(v_n)$

1- بين أن المتتالية (w_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول w_0 .

2- استنتج اتجاه تغير المتتالية (w_n) ثم اكتب w_n بدلالة n .

3- عين قيم العدد الطبيعي n : $w_n\geq\ln(10)$ إن وجدت.

4- أحسب T_n بدلالة n :

$T_n=w_0+w_1+\cdots+w_{2n}$ ثم عين $\lim\limits_{n\to+\infty}T_n$

✍ الحل

I- 1- دراسة اتجاه تغير الدالة f على المجال $]2;11]$:

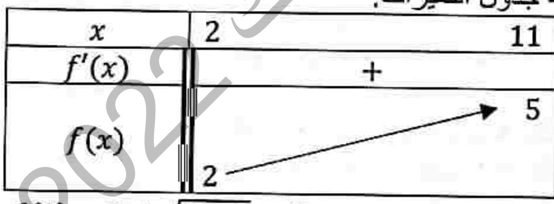
الدالة f قابلة للاشتقاق على $]2;11]$ ودالتها المشتقة:

$$f'(x)=0+\frac{1}{2\sqrt{x-2}}>0$$

تذكير: $\left(\sqrt{f}\right)'=\frac{f'}{2\sqrt{f}}$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على $]2;11]$

- جدول التغيرات:



x	2		11
$f'(x)$	‖	+	
$f(x)$	‖ 2	↗	5

$f(2)=2+\sqrt{2-2}=2$

$f(11)=2+\sqrt{11-2}=2+\sqrt{9}=5$

2- استنتاج أنه إذا كان $2<x\leq 11$ فإن: $f(x)\in]2;11]$:

لدينا $2<x\leq 11$ والدالة f متزايدة تماما على المجال $]2;11]$ ، ندخل الدالة f على الأطراف:

$$f(2)<f(x)\leq f(11)$$
$$2<f(x)\leq 5$$

لأن $f(11)=5$ و $f(2)=2$

3- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) :

لدينا $(\Delta):\ y=x$

ندرس إشارة الفرق $f(x)-x$ على المجال $]2;11]$:

$$f(x)-y=2+\sqrt{x-2}-x$$
$$=\sqrt{x-2}-(x-2)$$

نضرب في المرافق:

$$=\frac{\left[\sqrt{x-2}-(x-2)\right]\left[\sqrt{x-2}+(x-2)\right]}{\sqrt{x-2}+(x-2)}$$

باستعمال المتطابقة الشهيرة:

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

نجد:

$$f(x)-x=\frac{(x-2)-(x-2)^2}{\sqrt{x-2}+(x-2)}$$
$$=\frac{-x^2+5x-6}{\sqrt{x-2}+(x-2)}$$

ولدينا: $\sqrt{x-2}>0$

و $2<x\leq 11$ أي $0<x-2$

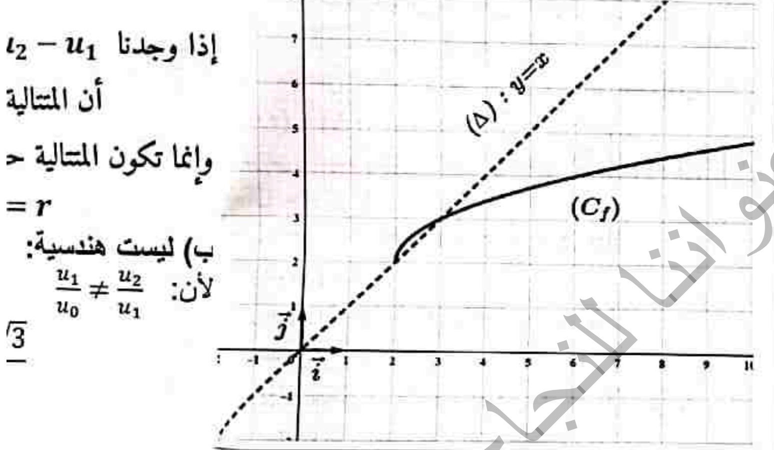
ومنه المقام موجب فندرس إشارة البسط

$$(-x^2+5x-6)$$
$$\Delta=1$$
$$x_1=\frac{-5-1}{2(-1)}=3$$

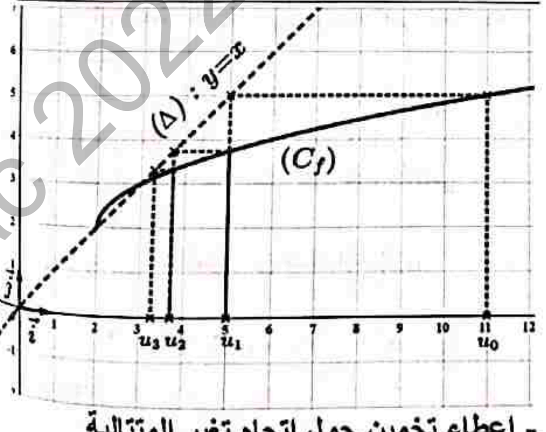
$x_2=\frac{-5+1}{2(-1)}=2$ مرفوض لأن $x\in]2;11]$

x	2		3		11
$f(x)-y$	‖	+	0	−	
الوضعية	‖	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) أسفل (Δ)	

4- رسم (Δ) ثم (C_f) .



II- 1- إنشاء على حامل محور الفواصل الحدود: u_0 ، u_1 و u_2 :



- إعطاء تخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها:

نلاحظ أن $u_2<u_1<u_0$

أي المتتالية (u_n) متنا...

فاصلة نقطة تقاطع (C_f) ...

2- حساب u_1 و u_2

لدينا:

... -2

$2+\sqrt{11-2}$ ...

- التحقق أن المتتالية

أ) ليست حسابية:

لأن $u_0\neq u_2-u_1$ ...

$\sqrt{3}-5$ ...

إذا وجدنا u_2-u_1 ...

أن المتتالية

وإنما تكون المتتالية ح...

$=r$

ب) ليست هندسية:

لأن: $\frac{u_1}{u_0}\neq\frac{u_2}{u_1}$

$\sqrt{3}$ ...

تكون المتتالية ...

ج) ليست ثابتة:

لأن

تكون المتتالي...

3- البرهان بالتراجع ... $3\leq u_n\leq 11$:

نسمي $p(n)$ الخا...

نتحقق من صحة الخ...

لدينا $u_0=11$ أ...

ومنه $p(n)$ محققة ...

أي المتتالية (u_n) متناقصة تماما وتتقارب نحو فاصلة نقطة تقاطع (C_f) مع (Δ) أي نحو العدد 3

-2 حساب u_1 و u_2

لدينا:

$$u_{n+1} = f(u_n) = 2 + \sqrt{u_n - 2}$$
$$u_{0+1} = f(u_0) = f(11) = 2 + \sqrt{11 - 2}$$
$$u_1 = 5$$
$$u_2 = 2 + \sqrt{3}$$

- التحقق أن المتتالية (u_n) :

أ) ليست حسابية:

لأن $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$

$$5 - 11 \neq 2 + \sqrt{3} - 5$$

ملاحظة

إذا وجدنا $u_1 - u_0 = u_2 - u_1$ فهذا لا يعني أن المتتالية حسابية بالضرورة!!

وإنما تكون المتتالية حسابية إذا تحققت العلاقة التالية:

$$u_{n+1} - u_n = r$$

ب) ليست هندسية:

لأن: $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$

$$\frac{5}{11} \neq \frac{2 + \sqrt{3}}{5}$$

ملاحظة

تكون المتتالية هندسية إذا وفقط إذا كان:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$$

ج) ليست ثابتة:

لأن

$$u_0 \neq u_1$$
$$11 \neq 5$$

ملاحظة !!

تكون المتتالية ثابتة إذا وفقط إذا كان

$$u_{n+1} = u_n$$

-3 البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3 \leq u_n \leq 11$.

نسمي $p(n)$ الخاصية "$3 \leq u_n \leq 11$"

نتحقق من صحة الخاصية من أجل $n = 0$

لدينا $u_0 = 11$ أي $3 \leq 11 \leq 11$

ومنه $p(n)$ محققة من أجل $n = 0$

نفرض أن $p(n)$ محققة أي $3 \leq u_n \leq 11$

ونبرهن صحة $p(n+1)$

أي $3 \leq u_{n+1} \leq 11$

لدينا من الفرضية: $3 \leq u_n \leq 11$

والدالة f متزايدة تماما ، فندخل f على كل طرف:

$$f(3) \leq f(u_n) \leq f(11)$$
$$3 \leq u_{n+1} \leq 5 \leq 11$$

اي $p(n)$ محققة من أجل $n+1$

وأخيرا: $3 \leq u_n \leq 11$ من أجل كل عدد طبيعي n

-4 بيان أن المتتالية (u_n) متناقصة بطريقتين مختلفتين:

الطريقة 01: ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \leq 0$$

لأن $f(x) - x \leq 0$ على المجال $[3; 11]$

اي المتتالية (u_n) متناقصة.

الطريقة 02: البرهان بالتراجع.

نسمي $p(n)$ الخاصية "$u_{n+1} \leq u_n$"

نتحقق من صحة الخاصية $p(n)$ من أجل $n = 0$

لدينا $u_0 = 11$ ، $u_1 = 5$

$$u_1 \leq u_0$$
$$5 \leq 11$$

أي $p(n)$ محققة من أجل $n = 0$

نفرض أن $p(n)$ محققة أي $u_{n+1} \leq u_n$

ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي $u_{n+2} \leq u_{n+1}$

لدينا من الفرضية: $u_{n+1} \leq u_n$

والدالة f متزايدة تماما على المجال $[3; 11]$ فندخل الدالة f على الأطراف:

$$f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$$
$$u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

ومنه $p(n)$ محققة من أجل $n+1$

وأخيرا: $u_{n+1} \leq u_n$ أي المتتالية (u_n) متناقصة.

-5 استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو نهاية l يطلب تعيينها:

بما أن المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 3 لأن $3 \leq u_n \leq 11$ فهي متقاربة نحو نهاية l .

تعيين l :

بما أن (u_n) متقاربة نحو l فإن :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = l$$

و لدينا $f(u_n) = u_{n+1}$

أي $f(l) = l$

فنحل المعادلة ذات المجهول l :

$$f(l) - l = 0$$

لكن لدينا مما سبق:

$$f(x)-x=0$$

أي $x=3$

ومنه نستنتج أن $f(l)-l=0$

معناه $l=3$

6- بيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$|3-u_{n+1}|\leq k|3-u_n|$$

لدينا $0<k<1$

ملاحظة

ننزل من الجزء الأيسر ثم نصعد انطلاقا من البرهان بالتراجع أي $3\leq u_n\leq 11$

لدينا:

$$|3-u_{n+1}|=|3-(2+\sqrt{u_n-2})|$$
$$=|3-2-\sqrt{u_n-2}|$$
$$=\frac{|1-\sqrt{u_n-2}||1+\sqrt{u_n-2}|}{|1+\sqrt{u_n-2}|}$$
$$=\frac{\left(1-\sqrt{u_n-2}^{\,2}\right)}{|1+\sqrt{u_n-2}|}=\frac{|1-(u_n-2)|}{|1+\sqrt{u_n-2}|}$$
$$=\frac{|3-u_n|}{1+\sqrt{u_n-2}}=|3-u_{n+1}|$$

ولدينا: $3\leq u_n\leq 11$

$$3-2\leq u_n-2\leq 11-2$$

ثم نجذر الأطراف:

$$\sqrt{3-2}\leq\sqrt{u_n-2}\leq\sqrt{11-2}$$
$$1\leq\sqrt{u_n-2}\leq 3$$

نضيف العدد 1:

$$1+1\leq\sqrt{u_n-2}+1\leq 3+1$$

نقلب الأطراف:

$$\frac{1}{4}\leq\frac{1}{1+\sqrt{u_n-2}}\leq\frac{1}{2}\ldots\ldots(1)$$

لدينا: $3\leq u_n\leq 11$ أي $3-u_n\leq 0$

أي $|3-u_n|\geq 0$

نضرب المتباينة (1) في العدد $|3-u_n|$

$$\frac{|3-u_n|}{1+\sqrt{u_n-2}}\leq\frac{1}{2}|3-u_n|$$

ومنه $|3-u_{n+1}|\leq\frac{1}{2}|3-u_n|$

بالمطابقة نجد ان: $k=\frac{1}{2}$ لأن $0<\frac{1}{2}<1$

7- استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$0\leq|3-u_n|\leq 8k^n$$

الطريقة 01:

لدينا $0\leq|3-u_{n+1}|\leq\frac{1}{2}|3-u_n|$

$n=0$: $0\leq|3-u_1|\leq\frac{1}{2}|3-u_0|$

$n=1$: $0\leq|3-u_2|\leq\frac{1}{2}|3-u_1|$

$n=2$: $0\leq|3-u_3|\leq\frac{1}{2}|3-u_2|$

$n-1$: $0\leq|3-u_n|\leq\frac{1}{2}|3-u_{n-1}|$

بالضرب طرفا لطرف (مع الاختزال):

$$0\leq|3-u_n|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{\text{عدد الحدود}}|3-u_0|$$
$$0\leq|3-u_n|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1+1}|3-u_0|$$
$$0\leq|3-u_n|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n}(8)$$

الطريقة 02:

نستعمل البرهان بالتراجع:

نسمي $p(n)$ الخاصية

$$"0\leq|3-u_n|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n}(8)"$$

من أجل $n=0$ لدينا:

$$0\leq|3-u_0|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{0}(8)$$
$$0\leq|3-11|\leq(1)(8)$$
$$0\leq|-8|\leq(8)$$
$$0\leq 8\leq 8$$

$p(n)$ محققة من أجل $n=0$

نفرض أن $p(n)$ محققة اي

$$0\leq|3-u_n|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n}(8)$$

ونبرهن صحة $p(n+1)$ اي

$$0\leq|3-u_{n+1}|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}(8)$$

لدينا من الفرضية أن

$$0\leq|3-u_n|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n}(8)$$

نضرب أطراف المتباينة في $\frac{1}{2}$ نجد:

$$\left(\frac{1}{2}\right)0 \leq \left(\frac{1}{2}\right)|3-u_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^1 \quad (8)$$

$$0 \leq \left(\frac{1}{2}\right)|3-u_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad (8)$$

لكن لدينا:

$$0 \leq |3-u_{n+1}| \leq |3-u_n|$$

حسب خاصية التعدي فإن:

$$0 \leq \left(\frac{1}{2}\right)|3-u_{n+1}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad (8)$$

ومنه $p(n+1)$ محققة

إذن من أجل كل عدد طبيعي $n+1$.

$$0 \leq |3-u_n| \leq 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

-استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

لدينا: $0 \leq |3-u_n| \leq 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$

نعلم أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ لأن $-1 < \frac{1}{2} < 1$

حسب مبرهنة الحصر فإن :

$$\lim_{n\to+\infty} |3-u_n| = 0$$

ومنه: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$

III-1- تعيين قيمة العدد α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$:

تكون (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ إذا وفقط

إذا كان $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$

$$v_n = \ln(u_n+\alpha)$$

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1}+\alpha)$$

$$v_{n+1} = \ln\left(2+\sqrt{u_n-2}+\alpha\right)$$

$$v_{n+1} = \ln\left(\sqrt{u_n-2}\left(1+\frac{2+\alpha}{\sqrt{u_n-2}}\right)\right)$$

$$\mathbf{\ln(ab) = \ln a + \ln b \ ;\ a>0 \ ;\ b>0}$$

$$v_{n+1} = \ln\left(\sqrt{u_n-2}\right) + \ln\left(1+\frac{2+\alpha}{\sqrt{u_n-2}}\right)$$

$$\mathbf{\ln\sqrt{a} = \ln a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln a}$$

$$v_{n+1} = \ln(u_n-2)^{\frac{1}{2}} + \ln\left(1+\frac{2+\alpha}{\sqrt{u_n-2}}\right)$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}\ln(u_n-2) + \ln\left(1+\frac{2+\alpha}{\sqrt{u_n-2}}\right)$$

يجب أن:

$$\ln\left(1+\frac{2+\alpha}{\sqrt{u_n-2}}\right) = 0$$

ندخل الأسية على كل طرف فنجد:

$$1+\frac{2+\alpha}{\sqrt{u_n-2}} = 1$$

لأن $e^0 = 1$

$$\frac{2+\alpha}{\sqrt{u_n-2}} = 1-1$$

$$\frac{2+\alpha}{\sqrt{u_n-2}} = 0$$

ينعدم كسر إذا انعدم بسطه لأن المقام لا ينعدم.

اي $2+\alpha = 0$ و منه $\alpha = -2$

ومنه قيمة α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية

أساسها $q=\frac{1}{2}$ هي $\alpha = -2$

- حساب الحد الأول v_0

$$v_n = \ln(u_n-2)$$

$$v_0 = \ln(u_0-2)$$

$$v_0 = \ln(11-2) = \ln 9$$

ومنه: $v_0 = \ln 9$

-استنتاج أنها متقاربة:

بما أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ و

$-1 < \frac{1}{2} < 1$ فإن (v_n) متقاربة نحو نهايتها l

2- كتابة v_n بدلالة n

$$v_n = v_0 q^n$$

$$v_n = \ln(9) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \ln(9) = 0$$

لأن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ أي $-1 < \frac{1}{2} < 1$

- استنتاج u_n بدلالة n :

لدينا $v_n = \ln(u_n-2)$

ندخل الأسية على كل طرف:

$$e^{v_n} = e^{\ln(u_n-2)}$$

$$e^{v_n} = u_n - 2$$

$$u_n = e^{v_n} + 2$$

ولدينا $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \ln 9$

$$u_n = e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n \ln 9} + 2$$

-حساب $\lim_{n\to+\infty} u_n$:

لدينا: $u_n = e^{v_n} + 2$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} [e^{v_n} + 2] = e^0 + 2$$
$$= 1 + 2 = 3$$

ومنه: $\lim_{n\to+\infty} u_n = 3$

3- حساب بدلالة n المجاميع والجداءات التالية و تعيين نهاية كل منها:

ملاحظة مهمة:

لحل مشكلة المجاميع والجداءات الغريبة نذهب إلى آخر حد من المجموع فنعدل عليه فنجد متتالية هندسية أو حسابية أو ثابتة.

$S_1 = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$

(v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$

و $v_0 = \ln 9$

$$S_1 = \text{الحد الأول للمجموع} \times \frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}$$

$$= \text{الحد الأول للمجموع} \times \frac{q^{\text{عدد الحدود}} - 1}{q - 1}$$

$$S_1 = v_0 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-0+1}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$S_1 = \ln(9) \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{2}{2} - \frac{1}{2}}$$

$$S_1 = \ln(9) \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}$$

$$S_1 = 2\ln(9) \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_1 = \lim_{n\to+\infty} \left(2\ln(9) \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]\right)$$
$$= 2\ln 9$$

لأن: $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$

$S_2 = v_{1442} + v_{1443} + \dots + v_{n+2021}$

هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية:

$$S_2 = v_{1442} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2021-1442+1}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$S_2 = v_{1442} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2021-1442+1}}{\frac{1}{2}}$$

لدينا: $v_{1442} = (\ln 9)\left(\frac{1}{2}\right)^{1442}$

$$S_2 = 2(\ln 9)\left(\frac{1}{2}\right)^{1442}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+580}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_2 = \lim_{n\to+\infty} 2(\ln 9)\left(\frac{1}{2}\right)^{1442}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+580}\right)$$

لدينا $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+580} = 0$

ومنه:

$$\lim_{n\to+\infty} S_2 = 2(\ln 9)\left(\frac{1}{2}\right)^{1442}$$

$= v_0^3 + v_1^3 + v_2^3 + \dots + v_n^3$

لدينا: $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \ln 9$

ومنه: $v_n^3 = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n \ln 9\right]^3$

$$v_n^3 = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]^3 \quad [\ln 9]^3$$

من خواص القوى:

$$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^3 = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)^n = \left(\frac{1^3}{2^3}\right)^n = \left(\frac{1}{8}\right)^n$$

$$v_n^3 = \left(\frac{1}{8}\right)^n [\ln 9]^3 = t_n$$

حيث (t_n) متتالية هندسية أساسها $q' = \frac{1}{8}$ وحده الأول: $t_0 = (\ln 9)^3$

$S_3 = t_0 + t_1 + t_2 + \dots + t_n$

مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية

$$S_3 = (\ln 9)^3 \frac{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{8}}$$

$$S_3 = \frac{8(\ln 9)^3}{7}\left[1 - \left(\frac{1}{8}\right)^{n+1}\right]$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_3 = \lim_{n\to+\infty} \frac{8(\ln 9)^3}{7}\left[1 - \left(\frac{1}{8}\right)^{n+1}\right]$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_3 = \frac{8(\ln 9)^3}{7}$$

لأن: $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{8}\right)^{n+1} = 0$

$$S_4 = \frac{8}{v_0} + \frac{8}{v_1} + \frac{8}{v_2} + \cdots + \frac{8}{v_n}$$

$$\frac{8}{v_n} = \frac{8}{\left(\frac{1}{2}\right)^n \ln 9} = \frac{8}{\ln 9}\,\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{1}{1}\,\frac{2^n}{1^n} = 2^n$$

$$\frac{8}{v_n} = \frac{8}{\ln 9}\; 2^n = t_n$$

حيث (t_n) متتالية هندسية أساسها $q' = 2$ وحدها الأول: $t_0 = \frac{8}{\ln 9}$

$$S_4 = t_0 + t_1 + t_2 + \ldots + t_n$$

$$S_4 = \frac{8}{\ln 9}\left(\frac{2^{n+1}-1}{2-1}\right) = \frac{8}{\ln 9}\left[2^{n+1}-1\right]$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_4 = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{8}{\ln 9}\left[2^{n+1}-1\right]\right) = +\infty$$

لأن: $\lim_{n\to+\infty} 2^{n+1} = +\infty$

$$S_5 = v_0 + \frac{v_1}{2} + \frac{v_2}{2} + \cdots + \frac{v_n}{2}$$

لدينا: $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \ln 9$

$$\frac{v_n}{2^n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n \ln 9}{2^n}$$

خواص القوى:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1^n}{2^n} = \frac{1}{2^n}$$

$$\frac{1}{2^n}\,\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{(2^2)^n} = \frac{1}{4^n} = \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

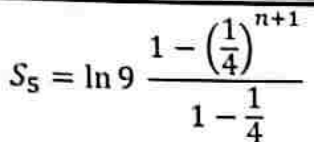
$$\frac{v_n}{2^n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n \ln 9}{2^n} = \frac{1}{2^n}\,\frac{1}{2^n}\ln 9$$

$$\frac{v_n}{2^n} = \left(\frac{1}{4}\right)^n \ln 9 = t_n$$

حيث (t_n) متتالية هندسية أساسها $q' = \frac{1}{4}$ وحدها الاول $t_0 = \ln 9$.

$$S_5 = t_0 + t_1 + t_2 + \ldots + t_n$$

مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية:



$$S_5 = \ln 9\,\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}$$

$$S_5 = \ln 9\,\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{4}{4}-\frac{1}{4}}$$

$$S_5 = \ln 9\,\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}}$$

$$S_5 = \frac{4\ln 9}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_5 = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4\ln 9}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_5 = \frac{4\ln 9}{3}$$

لأن: $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} = 0$

$$S_6 = v_0 + 2v_1 + 2^2 v_2 + \cdots + 2^n v_n$$

لدينا:

$$2^n\, v_n = 2^n\left(\frac{1}{2}\right)^n \ln 9 = 2^n\,\frac{1}{2^n}\ln 9$$

$$2^n\, v_n = \ln 9 = t_n$$

ومنه (t_n) متتالية ثابتة.

إضافة من الأستاذ:

لو وجدنا المتتالية من الشكل $n\ln 9 = t_n$ فإن (t_n) متتالية حسابية أساسها $r = \ln 9$

أو وجدنا $2^n = t_n$ فإن (t_n) متتالية هندسية أساسها $q = 2$.

$$S_6 = t_0 + t_1 + t_2 + \ldots + t_n$$

$S_6 =$ عدد الحدود × قيمة الحد

$$S_6 = (\ln 9)(n - 0 + 1)$$

$$S_6 = (n+1)(\ln 9)$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_6 = \lim_{n\to+\infty}(n+1)(\ln 9) = +\infty$$

ملاحظة مهمة جدا

لو وجدنا أن $t_n = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$

يعني $S_6 = (n+1)\left(\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$

فإن: $\lim\limits_{n\to+\infty} S_6 =$

$$\lim_{n\to+\infty}(n+1)\left(\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right) = -\infty$$

لأن $\ln\left(\frac{3}{4}\right) < 0$

$$S_7 = (u_0 - 2)(u_1 - 2) \times \ldots \times (u_n - 2)$$

لدينا: $v_n = \ln(u_n - 2)$

ندخل الأسية على كل طرف:

$$e^{v_n} = u_n - 2$$

$$e^{v_0} = u_0 - 2$$
$$e^{v_1} = u_1 - 2$$
$$\vdots$$
$$e^{v_n} = u_n - 2$$

بالتعويض في عبارة الجداء نجد:

$$S_7 = (u_0 - 2)(u_1 - 2) \times \ldots \times (u_n - 2)$$
$$S_7 = e^{v_0} \times e^{v_1} \times \ldots \times e^{v_n}$$

خواص الدالة الأسية:

$$e^a \times e^b = e^{a+b}$$

$$S_7 = e^{v_0} \times e^{v_1} \times \ldots \times e^{v_n} = e^{\underbrace{v_0 + v_1 + \cdots + v_n}_{\text{حدود متتابعة لمتتالية هندسية}}}$$

حدود متتابعة للمتتالية الهندسية التي أساسها $q = \frac{1}{2}$

وحدها الأول $v_0 = \ln 9$

$$v_0 + v_1 + \cdots + v_n = S_1$$
$$S_1 = 2\ln(9)\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$
$$\lim_{n\to+\infty} S_1 = \lim_{n\to+\infty} 2\ln 9\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$
$$= 2\ln 9$$
$$\lim_{n\to+\infty} S_7 = e^{2\ln 9} = e^{\ln 81} = 81$$

$$S_8 = \ln\left(\sqrt{u_0 - 2}\right) + \ln\left(\sqrt{u_1 - 2}\right) + \cdots + \ln\left(\sqrt{u_n - 2}\right)$$
$$\ln\sqrt{u_n - 2} = \ln(u_n - 2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln(u_n - 2)$$
$$S_8 = \frac{1}{2}\ln(u_0 - 2) + \frac{1}{2}\ln(u_1 - 2) + \cdots \frac{1}{2}\ln(u_n - 2)$$
$$S_8 = \frac{1}{2}\ln\left((u_0 - 2)(u_1 - 2) \times \ldots \times (u_n - 2)\right)$$
$$S_8 = \frac{1}{2}\ln S_7 = \frac{1}{2}\ln e^{S_1} = \frac{1}{2}S_1 \ln e^1$$

$$S_8 = \frac{1}{2}S_1$$
$$S_8 = \frac{1}{2} \times 2\ln 9\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$
$$S_8 = \ln 9\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$
$$\lim_{n\to+\infty}[S_8] = \lim_{n\to+\infty}\left[\ln 9\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)\right]$$
$$= \ln 9$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] = 0$$ أي $-1 < \frac{1}{2} < 1$ لأن

$$S_9 = v_0 + v_4 + \cdots + v_{4n}$$
$$v_{4n} = \ln 9\left(\frac{1}{2}\right)^{4n}\left(\frac{1}{16}\right)^{n} = t_n$$

t_n متتالية هندسية أساسها $q' = \frac{1}{16}$ وحدها الأول

$$t_0 = \ln 9$$
$$S_9 = t_0 + t_1 + \cdots + t_n$$
$$S_9 = (\ln 9)\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{16}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{16}}\right)$$
$$S_9 = \frac{16}{15}\ln 9\left[1 - \left(\frac{1}{16}\right)^{n+1}\right]$$
$$\lim_{n\to+\infty}[S_9] = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{16}{15}\ln 9\left[1 - \left(\frac{1}{16}\right)^{n+1}\right]\right]$$
$$= \frac{16}{15}\ln 9$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{1}{16}\right)^{n+1}\right] = 0$$ لأن $-1 < \frac{1}{16} < 1$

$$S_{10} = v_3 + v_7 + \cdots + v_{4n-1}$$
$$v_{4n-1} = 2(\ln 9)\left(\frac{1}{16}\right)^{n} = t_n$$

(t_n) متتالية هندسية أساسها $q' = \frac{1}{16}$

وحدها الأول $t_1 = \frac{\ln 9}{8}$

$$S_{10} = t_1 + t_2 + \cdots + t_n$$
$$S_{10} = \frac{\ln 9}{8}\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{16}\right)^{n-1+1}}{1 - \frac{1}{16}}\right)$$

$$S_{10} = \frac{16\ln 9}{8\times 15}\left[1-\left(\frac{1}{16}\right)^n\right]$$

$$S_{10} = \frac{2\ln 9}{15}\left[1-\left(\frac{1}{16}\right)^n\right]$$

$$\lim_{n\to+\infty}[S_{10}] = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{2\ln 9}{15}\left[1-\left(\frac{1}{16}\right)^n\right]\right] = \frac{2\ln 9}{15}$$

$$S_{11} = (v_0)^2 \times (v_1)^2 \times \dots \times (v_n)^2$$

$$(v_n)^2 = \left(\ln 9\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2 = (\ln 9)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = (\ln 9)^2\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$v_n^2 = (\ln 9)^2\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$(v_0)^2 = (\ln 9)^2$$

$$(v_1)^2 = (\ln 9)^2\left(\frac{1}{4}\right)^1$$

$$(v_2)^2 = (\ln 9)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$(v_3)^2 = (\ln 9)^2\left(\frac{1}{4}\right)^3$$

....

....

$$(v_n)^2 = (\ln 9)^2\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

بالضرب طرفا لطرف نجد:

$$S_{11} = [(\ln 9)^2]^{n+1}\left(\frac{1}{4}\right)^{1+2+\dots+n}$$

$$\underbrace{1+2+\dots+n}$$

حدود متتابعة لمتتالية حسابية اساسها $r=1$ حدها الأول 1

$$S_{11} = [(\ln 9)^2]^{n+1}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n-1+1}{2}[1+n]}$$

$$S_{11} = [\ln 9]^{2n+2}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n}{2}[1+n]}$$

$$S_{12} = \ln(v_0)^2 + \ln(v_1)^2 + \ln(v_2)^2 + \dots + \ln(v_n)^2$$

$$S_{12} = \ln(v_0^2 \times v_1^2 \times \dots \times v_n^2)$$

$$S_{12} = \ln S_{11}$$

$$S_{12} = \ln\left([\ln 9]^{2n+2}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n}{2}[1+n]}\right)$$

$$S_{12} = \ln(\ln 9)^{2n+2} + \ln\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n}{2}(1+n)}$$

$$S_{12} = (2n+2)\ln(\ln 9) + \frac{n}{2}(1+n)\ln\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$S_{12} = (n+1)\left[2\ln(\ln 9) - \frac{n}{2}\ln 4\right]$$

$$\lim_{n\to+\infty}[S_{12}] = \lim_{n\to+\infty}\left[(n+1)\left[2\ln(\ln 9) - \frac{n}{2}\ln 4\right]\right] = -\infty$$

$$S_{13} = (v_0+2) + (v_1+4) + \dots + (v_n+2n+2)$$

(v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الاول

$$v_0 = \ln 9$$

$$t_n = 2n+2$$

t_n متتالية حسابية أساسها $r=2$ وحدها الاول

$$t_0 = 2$$

$$S_{13} = (v_0+v_1+\dots+v_n) + (t_0+t_1+\dots+t_n)$$

$$S_{13} = 2\ln 9\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] + \frac{n-0+1}{2}[t_0+t_n]$$

$$S_{13} = 2\ln 9\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] + \frac{n}{2}[t_0+t_n]$$

$$\lim_{n\to+\infty}[S_{13}] = \lim_{n\to+\infty}\left[2\ln 9\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] + \frac{n}{2}[t_0+t_n]\right] = +\infty$$

$$S_{14} = \ln\left(\frac{v_0}{v_1}\right)^1 + \ln\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 + \dots + \ln\left(\frac{v_{n-1}}{v_n}\right)^n$$

$$\ln\left(\left(\frac{v_{n-1}}{v_n}\right)^n\right) = \ln\left(\frac{v_{n-1}}{\frac{1}{2}v_{n-1}}\right)^n = \ln\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)^n$$

$$= \ln(2)^n = n\ln 2 = t_n$$

(t_n) متتالية حسابية أساسها $r=\ln 2$ وحدها الاول

$: t_1 = \ln 2$

$$S_{14} = t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_n$$

$$= \frac{n-1+1}{2}[\ln 2 + n\ln 2]$$

$$S_{14} = \frac{n}{2}[\ln 2 + n\ln 2]$$

$$\lim_{n\to+\infty}[S_{14}] = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{n}{2}[\ln 2 + n\ln 2]\right] = +\infty$$

IV) 1- البرهان أن (w_n) متتالية حسابية:

تكون (w_n) متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان:

$w_{n+1} - w_n = r$ حيث $r \in \mathbb{R}$

$w_n = \ln v_n$

$w_{n+1} = \ln v_{n+1}$

$$w_{n+1} - w_n = \ln v_{n+1} - \ln v_n = \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\frac{1}{2}v_n}{v_n}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= -\ln 2 = r$$

ومنه المتتالية (w_n) حسابية أساسها $r = -\ln 2$

وحدها الأول: $w_0 = \ln v_0 = \ln(\ln 9)$

استنتاج اتجاه تغير المتتالية w_n

بما أن (w_n) متتالية حسابية أساسها

$r = -\ln 2 < 0$

فإنها متتالية متناقصة تماما

2 - كتابة w_n بدلالة n:

$w_n = w_0 + n \times r$

$w_n = \ln(\ln 9) - n \times \ln 2$

3 -تعيين قيم n إن وجدت حيث $w_n \geq \ln 10$:

$\ln(\ln 9) - n\ln 2 \geq \ln 10$

$-n\ln 2 \geq \ln 10 - \ln(\ln 9)$

نضرب المتراجحة في -1

$n\ln 2 \leq -\ln 10 + \ln(\ln 9)$

نقسم على $\ln 2$

$$n \leq \frac{-\ln 10 + \ln(\ln 10)}{\ln 2}$$

$n \leq -2.18$

هذا مستحيل، لأنه لا توجد أعداد طبيعية تحقق ذلك

ومنه قيم n غير موجودة

4- حساب T_n بدلالة n:

$T_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_{2n}$

w_n متتالية حسابية

$$T_n = \frac{2n - 0 + 1}{2}[w_0 + w_{2n}]$$

$$\left[\frac{2n+1}{2}\right][\ln(\ln 9) + \ln(\ln 9) - 2n\ln 2]$$

$$T_n = [2n+1][\ln(\ln 9) - n\ln 2]$$

$$\lim_{n\to+\infty}[T_n] = -\infty$$

مواضيع شعبة العلوم التجريبية

.4. بكالوريا 2021 علوم تجريبية

الموضوع الأول-التمرين الثالث

المتتالية العددية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$$u_n=-4n+3$$

1) بيّن أن المتتالية (u_n) حسابية يُطلب تعيين أساسها r وحدها الأول u_0.

2) من أجل كل عدد طبيعي n نضع

$$S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$$

أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$S_n=-2n^2+n+3$$

ب- عين قيمة العدد الطبيعي n بحيث

$$S_n=-30132$$

3) المتتالية العددية (v_n) حدودها موجبة تماما من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n=\ln(v_n)$

أ- اكتب عبارة v_n بدلالة n

ب- بين أن v_n متتالية هندسية أساسها e^{-4}.

$$S_n=-30132$$

4) من أجل كل عدد طبيعي n نضع:

$$S'_n=\ln\left[v_0\left(1-\frac{1}{2}\right)\right]+\ln\left[v_1\left(1-\frac{1}{3}\right)\right]+\cdots+\ln\left[v_n\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\right]$$

احسب S'_n بدلالة n.

الحل

1-بيان أن المتتالية (u_n) حسابية:

حتى تكون (u_n) متتالية حسابية يجب أن تحقق:

$$u_{n+1}-u_n=r$$

لدينا: $u_n=-4n+3$

منه $u_{n+1}=-4(n+1)+3$

أي

$$u_{n+1}-u_n=[-4(n+1)+3]-(-4n+3)$$
$$=(-4n-4+3)-(-4n+3)$$
$$=-4n-4+3+4n-3$$

ومنه $u_{n+1}-u_n=-4$

ومنه (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=-4$ وحدها الأول $u_0=-4(0)+3=3$

2-أ-بيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n أن: $S_n=-2n^2+n+3$

لدينا $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$ و (u_n) متتالية حسابية مجموعها $S_n=\frac{n+1}{2}(u_0+u_n)$

$$S_n=\frac{n+1}{2}(3-4n+3)$$
$$=\frac{n+1}{2}(-4n+6)$$
$$=(n+1)(-2n+3)$$

ومنه $S_n=-2n^2+n+3$

2-ب-تعيين قيمة n بحيث $S_n=-30132$

لدينا $S_n=-2n^2+n+3$ ولتحديد قيمة n التي من أجلها $S_n=-30132$

معناه وضع $-2n^2+n+3=-30132$

أي $-2n^2+n+30135=0$

نحسب Δ: $\Delta=241081>0$

$n_1=-\frac{245}{2}$ ...... مرفوض (n عدد طبيعي)

و $n_2=123$

ومنه قيمة n بحيث $S_n=-30132$ هي

$$n=123$$
$$u_{123}=-30132$$

3-أ-كتابة عبارة الحد العام لـ (v_n) بدلالة n:

لدينا $u_n=\ln(v_n)$

أي $v_n=e^{u_n}$

ومنه $v_n=e^{-4n+3}$

3-ب-بيان أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها e^{-4}

حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية يجب أن تحقق:

$$v_{n+1}=v_n\times q$$

لدينا $v_n=e^{-4n+3}$ ومنه $v_{n+1}=e^{-4(n+1)+3}$

$$v_{n+1}=e^{-4n-4+3}$$
$$=e^{-4n+3}\times e^{-4}$$
$$v_{n+1}=v_n\times e^{-4}$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=e^{-4}$

وحدها الأول $v_0=e^{-4(0)+3}=e^3$

4-حساب S'_n بدلالة n:

لدينا:

$$S'_n=\ln\left[v_0\left(1-\frac{1}{2}\right)\right]+\ln\left[v_1\left(1-\frac{1}{3}\right)\right]+\cdots+\ln\left[v_n\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\right]$$

و $\ln\left[v_n\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\right]=\ln\left[v_n\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\right]$

$$=\ln(v_n)+\ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$$
$$=u_n+\ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$$

ومنه:

$$S'=\left[u_0+\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right]+\left[u_1+\ln\left(\frac{2}{3}\right)\right]+\cdots+\left[u_n+\ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\right]$$

أي:

$$S'_n = (u_0 + u_2 + \cdots + u_n) + \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$$

بالتالي :

$$S'_n = S_n + \ln\left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \ldots \times \frac{n+1}{n+2}\right)$$

$$= S_n + \ln\left(\frac{1}{n+2}\right)$$

ومنه $S'_n = -2n^2 + n + 3 - \ln(n+2)$

لأن : $\ln\left(\frac{1}{n+2}\right) = -\ln(n+2)$

5. بكالوريا 2021 علوم تجريبية

الموضوع الثاني-التمرين الثالث

المتتالية العددية (u_n) معرفة بحدها الأول u_0 حيث $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_{n+1} = \frac{3}{8}(u_n + 5)$$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n < 3$.

2) بين أن (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

3) المتتالية العددية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 3(3 - u_n)$

أ- احسب v_0 ثم بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{8}$

ب- اكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = 3 - 3\left(\frac{3}{8}\right)^n$.

ج- احسب $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

4) نضع من اجل كل عدد طبيعي n:

$$P_n = (3 - u_0) \times (3 - u_1) \times \ldots \times (3 - u_n)$$

احسب P_n بدلالة n.

الحل

1-البرهان بالتراجع أن : $u_n < 3$

نسمي الخاصية $P(n)$: $u_n < 3$

من أجل $n = 0$ أي $u_0 = 0 < 3$

نفرض $P(n)$ محققة أي : $u_n < 3$ من أجل كل عدد طبيعي n

نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $u_{n+1} < 3$

لدينا من الفرضية $u_n < 3$

نضيف العدد 5 نجد $u_n + 5 < 8$

نضرب في $\frac{3}{8}$ نجد $\frac{3}{8}(u_n + 5) < \frac{3}{8}(8)$

ومنه $u_{n+1} < 3$

أي الخاصية $P(n+1)$ محققة من أجل $n+1$

إذن من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n < 3$

2-تبيين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما :

حتى تكون المتتالية (u_n) متزايدة تماما يجب أن يكون :

$$u_{n+1} - u_n > 0$$

لدينا $u_n < 3$

$u_n - 3 < 0$

أي $-u_n + 3 > 0$

ومنه $\frac{5}{8}(-u_n + 3) > 0$

وبالتالي $u_{n+1} - u_n > 0$

إذن المتتالية (u_n) متزايدة تماما

استنتاج أن (u_n) متقاربة :

بما أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الاعلى بـ 3 $(u_n < 3)$ فهي متقاربة نحو نهايتها $l \leq 3$

3-أ-حساب v_0 وتبيان أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{8}$:

$$v_0 = 3(3 - u_0) = 3(3 - 0) = 9$$

تبيان أن (v_n) متتالية هندسية :

حتى تكون هندسية يجب أن تحقق :

$$v_{n+1} = v_n \times q$$

$$v_{n+1} = 3(3 - u_{n+1})$$

$$= 3\left(3 - \frac{3}{8}(u_n + 5)\right)$$

$$= 9 - \frac{9}{8}u_n - \frac{45}{8}$$

$$= -\frac{9}{8}u_n + \frac{27}{8}$$

$$= \frac{3}{8}[-3u_n + 9]$$

$$= \frac{3}{8}(9 - 3u_n)$$

$$= \frac{3}{8}[3(3 - u_n)]$$

$$v_{n+1} = \frac{3}{8} \times v_n$$

ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{3}{8}$ وحدها الاول $v_0 = 9$

3-ب-كتابة بدلالة n عبارة الحد العام (v_n) واستنتاج أن: $u_n = 3 - 3\left(\frac{3}{8}\right)^n$

كتابة الحد العام لـ (v_n) بدلالة n :

لدينا $v_n = v_0 \times q^n = 9\left(\frac{3}{8}\right)^n$

استنتاج أن $u_n = 3 - 3\left(\frac{3}{8}\right)^n$ من أجل كل عدد طبيعي n :

نعلم أن $v_n = 9 - 3u_n$ ومنه $3u_n = 9 - v_n$

أي
$$u_n = 3 - \frac{1}{3}v_n$$
$$= 3 - \frac{1}{3}\left(9\left(\frac{3}{8}\right)^n\right)$$

ومنه
$$u_n = 3 - 3\left(\frac{3}{8}\right)^n$$

3-جـ-حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(3 - 3\left(\frac{3}{8}\right)^n\right) = 3$$

لأن $-1 < \frac{3}{8} < 1$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{8}\right)^n = 0$

4-حساب P_n بدلالة n :

لدينا
$$P_n = (3 - u_0) \times (3 - u_1) \times \dots \times (3 - u_n)$$

و $v_n = 3(3 - u_n)$ ومنه $3 - u_n = \frac{v_n}{3}$

وبالتالي
$$P_n = \frac{v_0}{3} \times \frac{v_1}{3} \times \dots \times \frac{v_n}{3}$$
$$P_n = \frac{(v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n)}{3 \times 3 \times \dots \times 3}$$
$$= \frac{v_0(v_0 q)(v_0 q^2)\dots\dots(v_0 q^n)}{3^{n+1}}$$
$$= \frac{v_0^{n+1} \times q^{\overbrace{1+2+\dots+n}^{\text{مجموع متتالية حسابية}}}}{3^{n+1}}$$
$$= \frac{9^{n+1} \times \left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{n}{2}(n+1)}}{3^{n+1}}$$
$$= \frac{9^{n+1} \times \left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{n^2+n}{2}}}{3^{n+1}}$$
$$= \frac{(3^2)^{n+1} \times \left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{n^2+n}{2}}}{3^{n+1}}$$
$$= \frac{(3^{n+1})^2 \times \left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{n^2+n}{2}}}{3^{n+1}}$$

ومنه:
$$P_n = 3^{n+1} \times \left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{n^2+n}{2}}$$

.6. بكالوريا 2020 علوم تجريبية

الموضوع الأول- التمرين الثالث

المتتالية العددية (u_n) معرفة بـ: $u_0 = \alpha$ (α عدد حقيقي)، ومن أجل كل عدد طبيعي n:
$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n - 1$$

1-نفرض أن $\alpha = -4$

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n:
$$u_n = -4$$

2- نفرض أن $\alpha \neq -4$

نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بـ:
$$v_n = u_n + 4$$

2-أ- أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{4}$

2-بـ- اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n و α ثم بيّن أنّ المتتالية (u_n) متقاربة

2-جـ- نضع من أجل كل عدد طبيعي n:
$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

احسب S_n بدلالة n و α ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

الحل

1- البرهان بالتراجع أن $u_n = -4$

نسمي الخاصية $p(n)$ حيث: $p(n)$: $u_n = -4$

-التحقق من صحة الخاصية $p(n)$

من أجل $n = 0$

$$u_0 = \alpha = -4$$

ومنه $p(0)$ محققة من أجل $n = 0$

نفرض صحة $p(n)$ من أجل n أي أن $u_n = -4$

ونبرهن صحة $p(n+1)$ من أجل $n+1$

أي أن: $u_{n+1} = -4$

لدينا: $u_n = -4$ ومنه:
$$\frac{3}{4}u_n = -4\left(\frac{3}{4}\right) = -3$$
$$\frac{3}{4}u_n - 1 = -3 - 1 = -4$$

ومنه:
$$u_{n+1} = -4$$

ومنه $p(n+1)$ محققة من أجل $n+1$

وأخيرا:من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = -4$

2-أ البرهان أن (v_n) متتالية هندسية

حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يجب أن تتحقق:

$v_{n+1} = v_n \times q$

لدينا: $v_{n+1} = u_{n+1} + 4$ ومنه:

$$v_{n+1} = \frac{3}{4}u_n - 1 + 4 = \frac{3}{4}u_n + 3$$

$$v_{n+1} = \frac{3}{4}(u_n + 4) = \frac{3}{4}v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{3}{4}$ وحدها الأول v_0 حيث:

$v_0 = u_0 + 4$

$v_0 = \alpha + 4$

2-ب كتابة عبارة u_n بدلالة α و n

لدينا (v_n) متتالية هندسية أي أن:

$v_n = v_0 \times q^n$

$$v_n = (\alpha + 4)\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

ومنه:

$v_n = u_n + 4$

$u_n = v_n - 4$

$$u_n = (\alpha + 4)\left(\frac{3}{4}\right)^n - 4$$

البرهان أن (u_n) متقاربة

نحسب نهاية u_n لما n يؤول الى $+\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} (\alpha + 4)\left(\frac{3}{4}\right)^n - 4 = -4$$

لأن:

$$-1 < \frac{3}{4} < 1$$

ومنه

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$$

ومنه (u_n) متتالية متقاربة نحو نهايتها وهي -4

جـ - حساب المجموع S_n

لدينا: $u_n = v_n - 4$

ومنه:

$$S_n = (v_0 - 4) + (v_1 - 4) + \cdots + (v_n - 4)$$

$$S_n = (v_0 + v_1 + \cdots + v_n) + (-4)(\text{عدد الحدود})$$

$$S_n = v_0 \frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q} + (-4)(n+1)$$

$$S_n = (\alpha + 4)\frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{4}} - 4(n+1)$$

$$S_n = \frac{(\alpha + 4)}{\frac{1}{4}}\left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right] - 4(n+1)$$

$$= 4\left[(\alpha + 4)\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right) - (n+1)\right]$$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} 4\left[(\alpha + 4)\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right) - (n+1)\right]$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = -\infty$$

لأن $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} = 0$ لأنّ $-1 < \frac{3}{4} < 1$

و $\lim\limits_{n\to+\infty} -4(n+1) = -\infty$

7. بكالوريا 2020 علوم تجريبية

الموضوع الثاني- التمرين الثالث

المتتالية العددية (u_n) معرفة كما يلي: $u_0 = 0$

ومن أجل عدد طبيعي n:

$$u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$$

1- أحسب كلا من u_1 و u_2 ثم خمّن اتجاه تغير المتتالية (u_n)

2- لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$$v_n = u_n - n + 1$$

2-أ- بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها 3 ، يطلب حساب حدّها الأول

2-ب- أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n

2-جـ - أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

3- من أجل كل عدد طبيعي n نضع:

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

3-أ- بين انه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$S_n = \frac{1}{2}(3^{n+1} + n^2 - n - 3)$$

3-ب-أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

الحل

1- حساب u_1 , u_2

$u_1 = 3u_0 - 2(0) + 3$

$u_1 = 3(0) - 0 + 3$

$u_1 = 3$

$u_2 = 3u_1 - 2(1) + 3$

$u_2 = 3(3) - 2 + 3$

$u_2 = 10$

-اتجاه تغير المتتالية u_n

لدينا: $u_2=10$ و $u_1=3$ و $u_0=0$

لدينا $u_1-u_0>0$ و $u_2-u_1>0$

ومنه (u_n) متتالية متزايدة تماما.

2- البرهان أن (v_n) متتالية هندسية

حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يجب تحقق:

$v_{n+1}=v_n\times q$

لدينا

$$v_{n+1}=u_{n+1}-(n+1)+1$$
$$v_{n+1}=(3u_n-2n+3)-n-1+1$$
$$v_{n+1}=3u_n-3n+3$$
$$v_{n+1}=3(u_n-n+1)=3v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=3$ وحدّها الأول v_0 حيث:

$v_0=u_0-0+1,\quad v_0=1$

ب- كتابة v_n بدلالة n

(v_n) متتالية هندسية:

$$v_n=v_0\times q^n$$
$$v_n=1\times(3)^n=3^n$$

استنتاج عبارة u_n

لدينا $v_n=u_n-n+1$ ومنه:

$$u_n=v_n+n-1$$
$$u_n=3^n+n-1$$

جـ - دراسة اتجاه تغير المتتالية u_n

ندرس إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$

لدينا:

$$u_{n+1}-u_n=(3^{n+1}+(n+1)-1)-(3^n+n-1)$$
$$u_{n+1}-u_n=3^{n+1}-3^n+1$$
$$u_{n+1}-u_n=3\times3^n-3^n+1$$
$$u_{n+1}-u_n=(3-1)3^n+1$$
$$u_{n+1}-u_n=2\times3^n+1>0$$

ومنه (u_n) متتالية متزايدة تماما

3- البرهان أن: $S_n=\frac{1}{2}(3^{n+1}+n^2-n-3)$

لدينا $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$

و $u_n=v_n+n-1$

نضع $w_n=n-1$

نلاحظ أن w_n متتالية حسابية حدها الأول $w_0=-1$ وأساسها $r=1$

ومنه $u_n=v_n+w_n$

أي:

$$S_n=(v_0+w_0)+(v_1+w_1)+\cdots+(v_n+w_n)$$
$$S_n=(v_0+v_1+\cdots+v_n)+(w_0+w_1+\cdots+w_n)$$
$$S_n=v_0.\frac{1-q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}+\frac{\text{عدد الحدود}}{2}(\text{الحد الأول}+\text{الحد الأخير})$$

$$S_n=1\,\frac{1-3^{n+1}}{1-3}+\frac{n+1}{2}(-1+n-1)$$
$$S_n=\frac{1-3^{n+1}}{-2}+\frac{(n+1)(n-2)}{2}$$
$$S_n=\frac{1}{2}[-1(1-3^{n+1})+(n+1)(n-2)]$$
$$S_n=\frac{1}{2}(3^{n+1}-1+n^2-2n+n-2)$$
$$S_n=\frac{1}{2}(3^{n+1}+n^2-n-3)$$

ب- حساب $\lim_{n\to+\infty}S_n$

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}(3^{n+1}+n^2-n-3)$$
$$\lim_{n\to+\infty}S_n=+\infty$$

لأن $\lim_{n\to+\infty}3^{n+1}=+\infty$

و $\lim_{n\to+\infty}(n^2-n-3)=+\infty$

8. بكالوريا 2019 علوم تجريبية

الموضوع الأول – التمرين الأول

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0=13$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\frac{1}{5}u_n+\frac{4}{5}$

1-أ- برهن بالتراجع أنه: من أجل كل عدد طبيعي n $u_n>1$

1-ب- ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة

2- (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$v_n=\ln(u_n-1)$

اثبت أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

3- اكتب v_n بدلالة n ثم بين أنه: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=1+\frac{12}{5^n}$ واحسب عندئذ $\lim_{n\to+\infty}u_n$

4- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n،

$$(u_0-1)(u_1-1)\times\ldots\times(u_n-1)=\left(\frac{12}{5^{\frac{n}{2}}}\right)^{n+1}$$

الحل

1-أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 1$

- نسمي الخاصية $P(n)$ "$u_n > 1$"
- من أجل $n = 0$ يكون $u_0 = 13$ و $13 > 1$ أي $u_0 > 1$ أي $P(0)$ محققة من أجل $n = 0$
- نفرض أن $P(n)$ محققة من أجل عدد طبيعي n كيفي أي $u_n > 1$

ونبرهن أن $P(n+1)$ محققة أي $u_{n+1} > 1$.

لدينا من الفرض $u_n > 1$

ومنه $\frac{1}{5}u_n > \frac{1}{5}$

$$\frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} > \frac{1}{5} + \frac{4}{5}$$

ومنه $u_{n+1} > 1$ أي $P(n+1)$ محققة

- إذن $u_n > 1$ من أجل كل عدد طبيعي n.

1-ب- دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n)

- لدراسة اتجاه تغير (u_n) يكفي دراسة إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

لدينا $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{4}{5}u_n + \frac{4}{5}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{4}{5}(1 - u_n)$$

مما سبق وجدنا أن $u_n > 1$

ومنه $1 - u_n < 0$

$$\frac{4}{5}(1 - u_n) < 0$$

ومنه $u_{n+1} - u_n < 0$

معناه (u_n) متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

استنتاج التقارب

بما أن (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة.

2-إثبات أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

لكي تكون (v_n) حسابية يلزم ويكفي أن يكون $v_{n+1} - v_n = r$

لدينا $v_n = \ln(u_n - 1)$

ومنه $v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 1)$

أي $v_{n+1} = \ln(\frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} - 1)$

$$v_{n+1} = \ln\left(\frac{1}{5}u_n - \frac{1}{5}\right)$$

$$v_{n+1} = \ln(\frac{1}{5}(u_n - 1))$$

$$v_{n+1} = \ln(\frac{1}{5}) + \ln(u_n - 1)$$

$$v_{n+1} = \ln(\frac{1}{5}) + v_n$$

ومنه $v_{n+1} - v_n = \ln(\frac{1}{5})$

معناه (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = \ln\left(\frac{1}{5}\right)$ وحدها الأول

$$= \ln(u_0 - 1) = \ln(13 - 1) = \ln(12)$$

3- كتابة (v_n) بدلالة n

(v_n) متتالية حسابية ومنه $v_n = v_0 + nr$

$$v_n = \ln(12) + n\ln(\frac{1}{5})$$

$$v_n = \ln(12) + \ln((\frac{1}{5})^n)$$

ومنه $v_n = \ln(\frac{12}{5^n})$

-برهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $= 1 + \frac{12}{5^n}$

لدينا $v_n = \ln(u_n - 1)$

<u>طريقة 1:</u>

$$e^{v_n} = e^{\ln(u_n - 1)} = u_n - 1$$

ومنه $u_n = e^{v_n} + 1$

$$u_n = e^{\ln\left(\frac{12}{5^n}\right)} + 1$$

$$u_n = \frac{12}{5^n} + 1$$

<u>طريقة 2:</u>

$$\ln\left(1 + \frac{12}{5^n} - 1\right) = \ln\left(\frac{12}{5^n}\right)$$

$$\ln(1 + \frac{12}{5^n} - 1) = v_n = \ln(u_n - 1)$$

بالمطابقة نجد $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$

-حساب نهاية المتتالية (u_n)

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{12}{5^n}\right)$$

لدينا $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5^n}\right) = 0$ لأنّ $-1 < \left(\frac{1}{5}\right) < 1$

ومنه نستنتج أن $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$

4- تبيان أن:

$$(u_0-1)(u_1-1)\times\ldots\times(u_n-1)=\left(\frac{12}{5^{\frac{n}{2}}}\right)^{n+1}$$

لدينا

$$(u_0-1)(u_1-1)\times..\times(u_n-1)$$
$$=e^{ln((u_0-1)(u_1-1)\times\ldots\times(u_n-1))}$$
$$=e^{ln((u_0-1)+ln(u_1-1)+\cdots+ln(u_n-1))}$$
$$=e^{v_0+v_1+v_2+\cdots+v_n}$$

بأخذ S_n مجموع متتالية حسابية v_n يكون

$$S_n=v_0+v_1+\cdots+v_n=\frac{(v_0+v_n)(n+1)}{2}$$

$$S_n=\frac{\left(\ln(12)+\ln\left(\frac{12}{5^n}\right)\right)(n+1)}{2}$$

$$S_n=\frac{(n+1)}{2}\ln\left(\frac{(12)^2}{5^n}\right)$$

و

$$(u_0-1)(u_1-1)\times..\times(u_n-1)=e^{v_0+v_1+v_2+\cdots+v_n}$$
$$=e^{S_n}$$

$$e^{S_n}=e^{\frac{n+1}{2}\ln\left(\frac{(12)^2}{5^n}\right)}=e^{\ln\left(\frac{(12)^2}{5^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$
$$=\frac{(12)^{n+1}}{\left(5^{\frac{n}{2}}\right)^{n+1}}$$

ومنه

$$(u_0-1)(u_1-1)\times\ldots\times(u_n-1)=\left(\frac{12}{(5)^{\frac{n}{2}}}\right)^{n+1}$$

9. بكالوريا 2019 علوم تجريبية

الموضوع الثاني – التمرين الثاني

f الدالة المعرفة على المجال $[4;7]$ بـ:

$$f(x)=\sqrt{x+2}+4$$

1-أ- بيّن أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[4;7]$

1-ب- استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4;7]$ فإن $f(x)\in[4;7]$

2- برهن أنه: من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4;7]$ فإن $f(x)-x=\frac{-x^2+9x-14}{x-4+\sqrt{x+2}}$

ثم استنتج أنه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4;7]$ فإن $f(x)-x\geq 0$

3-(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0=4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f(u_n)$

3-أ-برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n

$$4\leq u_n\leq 7$$

3-ب- استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم بين أنها متقاربة

4-أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n

$$7-u_{n+1}\leq\frac{1}{4}(7-u_n)$$

4-ب-استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n $0\leq 7-u_n\leq 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$، ثم أحسب نهاية المتتالية(u_n)

الحل

1-أ- بيان أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[4;7]$

لدينا: f دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق على المجال $]-2;+\infty[$ إذا هي كذلك على المجال $[4;7]$

ودالتها المشتقة هي:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}$$

لما $x\in[4;7]$ يكون $\frac{1}{2\sqrt{x+2}}>0$ ومنه f دالة متزايدة تماما على المجال $[4;7]$

1-ب- استنتاج أنه من أجل كل $x\in[4;7]$ يكون $f(x)\in[4;7]$

لدينا: $x\in[4;7]$ اذا: $4\leq x\leq 7$

وبما أن f دالة متزايدة تماما على $[4;7]$ فإن:

$$f(4)\leq f(x)\leq f(7)$$
$$4\leq\sqrt{6}+4\leq f(x)\leq\sqrt{9}+4$$
$$4\leq f(x)\leq 3+4$$
$$4\leq f(x)\leq 7$$

ومنه نستنتج أن $f(x)\in[4;7]$

2- برهان أنه $f(x)-x=\frac{-x^2+9x-14}{x-4+\sqrt{x+2}}$

لدينا

$$f(x)-x=\sqrt{x+2}+4-x$$
$$=\frac{\left(\sqrt{x+2}-(x-4)\right)\left(\sqrt{x+2}+(x-4)\right)}{\sqrt{x+2}+(x-4)}$$
$$=\frac{x+2-(x-4)^2}{\sqrt{x+2}+(x-4)}$$
$$=\frac{x+2-x^2-16+8x}{\sqrt{x+2}+x-4}$$
$$=\frac{-x^2+9x-14}{\sqrt{x+2}+x-4}$$

-استنتاج أن $f(x)-x\geq 0$

لدينا $x\in[4;7]$

ومنه $x \geq 4$

$x-4 \geq 0$

و $\sqrt{x+2} > 0$

$\sqrt{x+2}+x-4 > 0$

ومنه إشارة $f(x)-x$ من إشارة

$-x^2+9x-14$

لدينا:

$-x^2+9x-14=0$

$\Delta = 81-4(-14)(-1)$

$\Delta = 25$

$\sqrt{\Delta} = 5$

$x_1 = \frac{-9+5}{-2} = 2$

$x_2 = \frac{-9-5}{-2} = 7$

ومنه $-x^2+9x-14 = -(x-2)(x-7)$

لدينا $x \leq 7$

ومنه $x-7 \leq 0$

$x-2 \geq 0$

ومنه $-(x-2)(x-7) \geq 0$

إذن وفي الأخير نستنتج أن $f(x)-x \geq 0$

3-أ- البرهان بالتراجع أن $4 \leq u_n \leq 7$

- نسمي الخاصية $p(n)$: $4 \leq u_n \leq 7$
- من أجل $n=0$ يكون $u_0 = 4$ و $4 \leq 4 \leq 7$

ومنه $4 \leq u_0 \leq 7$

اذا الخاصية $p(n)$ محققة من أجل قيمة ابتدائية $n=0$

ونفرض أن $p(n)$ محققة من أجل عدد طبيعي n كيفي أي $4 \leq u_n \leq 7$ محققة

ونبرهن أن $p(n+1)$ محققة أي $4 \leq u_{n+1} \leq 7$

لدينا من فرضية التراجع: $4 \leq u_n \leq 7$

أي $u_n \in [4;7]$

ولدينا من السؤال (1 – ب) نجد أن لما $x \in [4;7]$ يكون $f(x) \in [4;7]$

إذن $f(u_n) \in [4;7]$

ومنه $4 \leq f(u_n) \leq 7$

$4 \leq u_{n+1} \leq 7$

ومنه خاصية التراجع محققة من أجل $n+1$ أي أن $p(n+1)$ محققة

- إذن من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن: $4 \leq u_n \leq 7$

3-ب-استنتاج اتجاه تغير (u_n)

لدينا من نتيجة السؤال 2 نجد أن لما $x \in [4;7]$ فإن $f(x)-x \geq 0$

ولدينا من نتيجة السؤال 3-أ-من أجل كل عدد ط... n يكون $4 \leq u_n \leq 7$

ومنه فإن من أجل كل عدد طبيعي n يكون $f(u_n)-u_n \geq 0$

إذن $u_{n+1}-u_n \geq 0$

ومنه نستنتج أن المتتالية (u_n) متزايدة

بيان أنها متقاربة:

بما أن المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأ... بالعدد 7 فأنها متقاربة نحو نهايتها l

4-أ-بيان أن $7-u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(7-u_n)$

لدينا $7-u_{n+1} = 7-\sqrt{u_n+2}-4$

$= 3-\sqrt{u_n+2}$

$= \frac{(3-\sqrt{u_n+2})(3+\sqrt{u_n+2})}{3+\sqrt{u_n+2}}$

$= \frac{9-(u_n+2)}{3+\sqrt{u_n+2}}$

$= \frac{7-u_n}{3+\sqrt{u_n+2}}$

ولدينا $4 \leq u_n \leq 7$

ومنه $6 \leq u_n+2 \leq 9$

$\sqrt{6} \leq \sqrt{u_n+2} \leq 3$

$4 < 3+\sqrt{6} \leq 3+\sqrt{u_n+2} \leq 6$

ومنه $(*)$ ...... $\frac{1}{6} \leq \frac{1}{3+\sqrt{u_n+2}} \leq \frac{1}{4}$

وبما أن $u_n \leq 7$ فإن $7-u_n \geq 0$

بضرب المتباينة $(*)$ في $7-u_n$ نجد

$0 \leq \frac{7-u_n}{6} \leq \frac{7-u_n}{3+\sqrt{u_n+2}} \leq \frac{7-u_n}{4}$

ومنه $7-u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(7-u_n)$

4-ب- استنتاج أن $0 \leq 7-u_n \leq 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$

من السؤال السابق $0 \leq 7-u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(7-u_n)$

ومنه من أجل قيم n: $0 \leq 7-u_1 \leq \frac{1}{4}(7-u_0)$

$0 \leq 7-u_2 \leq \frac{1}{4}(7-u_1)$

.

.

$0 \leq 7-u_n \leq \frac{1}{4}(7-u_{n-1})$

بضرب طرفا لطرف والاختزال نجد

$$0 \le 7 - u_n \le \left(\frac{1}{4}\right)^n (7 - u_0)$$

ومنه نجد $0 \le 7 - u_n \le \left(\frac{1}{4}\right)^n \times 3$

حساب نهاية المتتالية (u_n)

لدينا $0 \le 7 - u_n \le \left(\frac{1}{4}\right)^n \times 3$

و $\lim\limits_{n\to+\infty} 3\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$

لأن $-1 < \frac{1}{4} < 1$

ومنه وحسب مبرهنة الحصر نجد أن

$$\lim_{n\to+\infty} (7 - u_n) = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 7$$

.10 بكالوريا 2018 علوم تجريبية

الموضوع الأول - التمرين الأول

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول u_0 حيث $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_{n+1} = 1 - \frac{9}{u_n + 5}$$

1- أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n > -2$

1-ب- بيّن أنّ (u_n) متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ واستنتج أنها متقاربة.

2-نضع من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{1}{u_n+2}$

- أثبت أنّ المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{3}$ يطلب تعيين حدها الأول.

3-عبّر بدلالة n عن v_n و u_n ، وأحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4-بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_0v_0 + u_1v_1 + \dots + u_nv_n = \frac{1}{3}(1 - n^2)$$

الحل

1-أ - البرهان بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n أن: $U_n > -2$

- نسمي $P(n)$ الخاصية "$U_n > -2$"

- من اجل $n = 0$ أي $U_0 = 1$ ومنه $U_0 > -2$ و $1 > -2$

أي $P(0)$ محققة من أجل $n = 0$

- نفرض أن $P(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n كيفي أي $U_n > -2$ محققة، ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $U_{n+1} > -2$

لدينا من الفرضية $U_n > -2$

نضيف 5 للطرفين $U_n + 5 > -2 + 5$

ثم نضع المقلوب $\frac{1}{U_n+5} < \frac{1}{3}$

نضرب في -9 نجد $-\frac{9}{U_n+5} > -3$

نضيف 1 نجد $1 - \frac{9}{U_n+5} > -2$

ومنه $U_{n+1} > -2$

ومنه الخاصية $P(n+1)$ محققة

- إذن من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $U_n > -2$

1-ب - البرهان أن (U_n) متتالية متناقصة تماما:

يكفي أن نبرهن أن إشارة الفرق $U_{n+1} - U_n < 0$ مع $U_n > -2$

$$U_{n+1} - U_n = 1 - \frac{9}{U_n + 5} - U_n$$

$$= \frac{U_n + 5 - 9 - U_n^2 - 5U_n}{U_n + 5}$$

$$= \frac{-U_n^2 - 4U_n - 4}{U_n + 5}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{-(U_n^2 + 4U_n + 4)}{U_n + 5}$$

نلاحظ أن العبارة $U_n^2 + 4U_n + 4$ هي المتطابقة الشهيرة $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ تصبح

$$U_{n+1} - U_n = \frac{-(U_n + 2)^2}{U_n + 5}$$

وهناك طريقة أخرى:

لتحليل المعادلة $U_n^2 + 4U_n + 4$ نقوم بحساب المميز

$\Delta = 16 - 4(1)(4) = 0$ أي هناك حل مضاعف

$$U_n = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2} = -2$$

وتحليل العبارة يكون

$$U_n^2 + 4U_n + 4 = (U_n + 2)(U_n + 2) = (U_n + 2)^2$$

ندرس إشارة المقام:

لدينا $U_n > -2$

نضيف 5 للطرفين $U_n + 5 > 3 > 0$

ومنه المقام موجب فالإشارة من إشارة البسط

ندرس إشارة البسط: $-(u_n + 2)^2$

لدينا $U_n > -2$

$U_n + 2 > 0$

نقوم بتربيع الطرفين والضرب في الإشارة (−) نجد

$$-(U_n+2)^2<0$$

ومنه $U_{n+1}-U_n<0$

ومنه المتتالية (U_n) متناقصة تماما على N

استنتاج أن (U_n) متتالية متقاربة:

بما أن (U_n) متتالية متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد -2 لأن: $U_n>-2$ فهي متقاربة نحو نهايتها l

2- البرهان أن (V_n) متتالية حسابية:

لكي تكون (V_n) متتالية حسابية يكفي أن نبرهن أن:

$$V_{n+1}=V_n+r$$

لدينا $V_n=\frac{1}{U_n+2}$

ومنه $V_{n+1}=\frac{1}{U_{n+1}+2}$

$$V_{n+1}=\frac{1}{1-\frac{9}{U_n+5}+2}=\frac{1}{3-\frac{9}{U_n+5}}$$

$$=\frac{1}{\frac{3U_n+15-9}{U_n+5}}$$

$$=\frac{U_n+5}{3U_n+15-9}$$

$$V_{n+1}=\frac{U_n+5}{3U_n+6}$$

نقوم بتفكيك العدد 5 إلى 3 + 2 يصبح

$$V_{n+1}=\frac{U_n+2+3}{3(U_n+2)}$$

$$=\frac{U_n+2}{3(U_n+2)}+\frac{3}{3(U_n+2)}$$

$$V_{n+1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{U_n+2}$$

أي $\boxed{V_{n+1}=V_n+\frac{1}{3}}$

ومنه (V_n) متتالية حسابية أساسها $r=\frac{1}{3}$

حساب V_0:

$$V_0=\frac{1}{U_0+2}=\frac{1}{1+2}$$

$$\boxed{V_0=\frac{1}{3}}$$

3-التعبير عن V_n و U_n بدلالة n وحساب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$:

التعبير عن V_n بدلالة n:

لدينا:

$\geq p$ مع $V_n=V_p+(n-p)r$

$$V_n=V_0+nr$$

$$\boxed{V_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}n}$$

التعبير عن U_n بدلالة n:

لدينا $V_n=\frac{1}{U_n+2}$

ومنه $V_n(U_n+2)=1$

$$V_nU_n+2V_n=1$$

$$V_nU_n=1-2V_n$$

$$U_n=\frac{1-2V_n}{V_n}$$

ومنه $U_n=-2+\frac{1}{V_n}$

نعوض عبارة $V_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}n$ نجد

$$\boxed{U_n=-2+\frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}n}=-2+\frac{3}{n+1}}$$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$:

$$\lim_{n\to+\infty}U_n=\lim_{n\to+\infty}\left(-2+\frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}n}\right)=-2+0$$

ومنه $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=-2}$

4-التبيين أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$U_0V_0+U_1V_1+\cdots+U_nV_n=\frac{1}{3}(1-n^2)$$

نستطيع حل هذا السؤال بطريقتين:

الطريقة الأولى: الطريقة الاستنتاجية

لدينا من الجواب السابق (رقم 3) أن

$$V_nU_n=1-2V_n$$

ومنه $V_0U_0=1-2V_0$

ومنه $U_1V_1=1-2V_1$

....

....

$$V_nU_n=1-2V_n$$

نقوم بالجمع طرف لطرف عموديا فنتحصل على:

$U_0V_0+U_1V_1+\cdots+U_nV_n$
$=(1-2V_0)+(1-2V_1)+\cdots+(1-2V_n)$

نلاحظ أن العدد 1 تكرر $n-0+1=n+1$ مرة (عدد حدود متتالية) ونكتب:

$U_0V_0+U_1V_1+\cdots+U_nV_n$
$=1(n+1)+[(-2V_0)+(-2V_1)+\cdots+(-2V_n)]$

نستخرج -2 كعامل مشترك يصبح

$U_0V_0+U_1V_1+\cdots+U_nV_n$
$=1(n+1)-2(V_0+V_1+\cdots+V_n)$

إن العبارة $(V_0 + V_1 + \cdots + V_n)$ هي مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية إذن:

$$U_0V_0 + U_1V_1 + \cdots + U_nV_n$$
$$= 1(n+1) - 2\,\frac{n+1}{2}(V_0 + V_n)$$

نعوض V_0 و V_n بما يساويهما نجد

$$U_0V_0 + U_1V_1 + \cdots + U_nV_n$$
$$= (n+1) - (n+1)\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}n\right)$$
$$= (n+1) - (n+1)\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}n\right)$$
$$= (n+1) - \frac{1}{3}(n+1)(2+n)$$
$$= (n+1) - \frac{1}{3}[n^2 + 3n + 2]$$

نضرب $(n+1)$ في العدد $\frac{3}{3}$ ثم نستخرج $\frac{1}{3}$ كعامل مشترك نجد

$$U_0V_0 + U_1V_1 + \cdots + U_nV_n$$
$$= \frac{1}{3}[3n + 3 - n^2 - 3n - 2]$$

ومنه $U_0V_0 + U_1V_1 + \cdots + U_nV_n = \frac{1}{3}[1 - n^2]$

الطريقة الثانية: البرهان بالتراجع

نسمي $P(n)$ الخاصية

$$U_0V_0 + U_1V_1 + \cdots + U_nV_n = \frac{1}{3}[1 - n^2]$$

من أجل $n = 0$ يكون $U_0 = 1$ و $V_0 = \frac{1}{3}$

$$v_0u_0 = \frac{1}{3}$$

و $\frac{1}{3}(1 - (0)^2) = \frac{1}{3}$

ومنه $U_0V_0 = \frac{1}{3}[1 - 0^2]$

أي $P(O)$ محققة من أجل كل $n = 0$

نفرض أن $P(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n

أي $U_0V_0 + U_1V_1 + \cdots + U_nV_n = \frac{1}{3}[1 - n^2]$

محققة، ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي

$$U_0V_0 + U_1V_1 + \cdots + U_nV_n + U_{n+1}V_{n+1}$$
$$= \frac{1}{3}[1 - (n+1)^2]$$

لدينا من الفرض

$$U_0V_0 + U_1V_1 + \cdots + U_nV_n = \frac{1}{3}[1 - n^2]$$

ومنه

$$U_0V_0 + U_1V_1 + \cdots + U_nV_n + U_{n+1}V_{n+1}$$
$$= \frac{1}{3}[1 - n^2] + U_{n+1}V_{n+1}$$

ولدينا

$$U_{n+1}V_{n+1} = 1 - 2V_{n+1} = 1 - 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}(n+1)\right)$$

بالتعويض نجد

$$\frac{1}{3}(1 - n^2) + u_{n+1} \times v_{n+1} = \frac{1}{3}[1 - n^2] +$$
$$1 - 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}(n+1)\right)$$

ننشر ثم نستخرج $\frac{1}{3}$ كعامل مشترك نجد:

$$\frac{1}{3}[1 - n^2 + 3 - 2 - 2n - 2]$$
$$= \frac{1}{3}[1 - n^2 - 1 - 2n]$$
$$= \frac{1}{3}[1 - (n^2 + 2n + 1)]$$

نلاحظ أن $(n^2 + 2n + 1)$ متطابقة شهيرة

ومنه $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$U_0V_0 + U_1V_1 + \cdots + U_nV_n + U_{n+1}V_{n+1}$$
$$= \frac{1}{3}[1 - (n+1)^2]$$

ومنه الخاصية $P(n+1)$ محققة

- إذن من أجل كل عدد طبيعي n فإن:

$U_0V_0 + U_1V_1 + \cdots + U_nV_n = \frac{1}{3}[1 - n^2]$ صحيحة

11. بكالوريا 2018 علوم تجريبية

الموضوع الثاني - التمرين الأول

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي: $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_{n+1} = u_n + \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$$

1- أحسب كل من u_1 ، u_2 و u_3 .

2- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $\frac{2n+3}{2n+1} > 1$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

3-(v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = 2n + 1$.

3-أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $e^{u_n} = v_n$.

3-ب- استنتج عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4- أحسب المجموعين S_n و T حيث:

$$S_n = \ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right) + \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) + \ldots + \ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right)$$

و $T = e^{u_{1439}} + e^{u_{1440}} + \ldots + e^{u_{2018}}$

الحل

1-حساب U_1 ، U_2 و U_3:

حساب U_1:

لدينا $U_{n+1}=U_n+\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$

ومنه $U_{0+1}=U_0+\ln\left(\frac{2(0)+3}{2(0)+1}\right)$

$$U_1=0+\ln\left(\frac{3}{1}\right)$$

$$\boxed{U_1=\ln(3)}$$

حساب U_2:

$$U_{1+1}=U_1+\ln\left(\frac{2(1)+3}{2(1)+1}\right)$$

$$=\ln(3)+\ln\left(\frac{5}{3}\right)$$

من خواص اللوغاريتم أن:

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$$

ومنه $U_2=\ln(3)+\ln(5)-\ln(3)$

$$\boxed{U_2=\ln(5)}$$

حساب U_3

$$U_{2+1}=U_2+\ln\left(\frac{2(2)+3}{2(2)+1}\right)$$

$$=\ln(5)+\ln\left(\frac{7}{5}\right)$$

$$U_3=\ln(5)+\ln(7)-\ln(5)$$

$$\boxed{U_3=\ln(7)}$$

2-البرهان من أجل كل عدد طبيعي n أن: $\frac{2n+3}{2n+1}>1$ واستنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n):

- البرهان من أجل كل عدد طبيعي n أن:

$$\frac{2n+3}{2n+1}>1$$

يكفي أن نبرهن أن

$$\frac{2n+3}{2n+1}-1>0$$

لدينا $\frac{2n+3}{2n+1}-1=\frac{2n+3-2n-1}{2n+1}$

$$=\frac{2}{2n+1}$$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $\frac{2}{2n+1}>0$

أي $\frac{2n+3}{2n+1}>1$

- استنتاج اتجاه تغير المتتالية (U_n):

ندرس إشارة الفرق $U_{n+1}-U_n$

$$U_{n+1}-U_n=U_n+\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)-U_n$$

$$U_{n+1}-U_n=\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$$

ولدينا مما سبق أن:

$$\frac{2n+3}{2n+1}>1$$

بما أن دالة لوغاريتم متزايدة فإنه بإدخالها على المتراجحة لا تغير اشارتها ومنه

$$\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)>\ln(1)$$

وبما أن $\ln(1)=0$ يصبح

$$\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)>0$$

أي $U_{n+1}-U_n>0$

ومنه المتتالية (U_n) متزايدة تماما على N

3-أ- البرهان بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n أن: $e^{U_n}=V_n$

- نسمي $P(n)$ الخاصية $e^{U_n}=V_n$

من اجل $n=0$ أي $U_0=0$ و $V_0=1$ ومنه

$e^{U_0}=V_0$ أي $1=1$

أي $P(0)$ محققة من أجل $n=0$

نفرض أن $P(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n كيفي

أي $e^{U_n}=V_n$ محققة، ونبرهن صحة $P(n+1)$

أي $e^{U_{n+1}}=V_{n+1}$

لدينا $e^{U_{n+1}}=e^{U_n+\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)}$

من خواص الدالة الأسية $e^{a+b}=e^a\times e^b$

ومنه $e^{U_{n+1}}=e^{U_n}\times e^{\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)}$

كذلك من خواص الدالة الأسية $e^{\ln(a)}=a$ و لد

من الفرضية $e^{U_n}=V_n=2n+1$ ومنه

$_{n+1}=(2n+1)\times\frac{2n+3}{2n+1}$

$_{n+1}=2n+3$

ولكن $V_{n+1}=2(n+1)+1=2n+3$

ومنه $e^{U_{n+1}}=V_{n+1}$

ومنه الخاصية $P(n+1)$ محققة

- إذن: $e^{U_n}=V_n$ من أجل كل عدد طبيعي n

3-ب – استنتاج U_n بدلالة n واستنتاج $\lim_{n\to+\infty} U_n$:

- استنتاج U_n بدلالة n:

لدينا مما سبق أن $e^{U_n} = V_n$

ومنه
$$\ln(e^{U_n}) = \ln(V_n)$$
$$U_n = \ln(V_n)$$

ومنه $\boxed{U_n = \ln(2n+1)}$

- استنتاج $\lim_{n\to+\infty} U_n$:

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} [\ln(2n+1)]$$
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty}$$

4-حساب المجموعين S_n و T:

حساب المجموع S_n:

لدينا $S_n = \ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right) + \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{V_n}{V_{n-1}}\right)$

من خواص اللوغاريتم

$$\ln(a) + \ln(b) + \ln(c) = \ln(a \times b \times c)$$

ومنه $S_n = \ln\left(\frac{V_1}{V_0} \times \frac{V_2}{V_1} \times \ldots \times \frac{V_n}{V_{n-1}}\right)$

يتم اختزال الحدود مع بعضها بالقسمة V_1 مع V_1 و V_2 مع V_2 وهكذا، ويتبقى لنا أصغر حد وأكبر حد فقط:

$$S_n = \ln\left(\frac{V_n}{V_0}\right) = \ln\left(\frac{2n+1}{1}\right)$$

ومنه $\boxed{S_n = \ln(2n+1)}$

حساب المجموع T:

لدينا مما سبق أن $e^{U_n} = V_n$ ومنه
$$e^{U_{1439}} = V_{1439}$$
$$e^{U_{1440}} = V_{1440}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$e^{U_{2018}} = V_{2018}$$

نقوم بالجمع طرفا لطرف عموديا فنتحصل على:
$$T = V_{1439} + V_{1440} + \cdots + V_{2018}$$

لكن المتتالية (V_n) حسابية أساسها $r = 2$ (لأن $V_{n+1} = V_n + 2$) ومنه
$$T = \frac{2018 - 1439 + 1}{2}[V_{1439} + V_{2018}]$$
$$T = \frac{580}{2}[2(1439) + 1 + 2(2018) + 1]$$
$$\boxed{T_n = 2\,005\,640}$$

12. بكالوريا 2017 الاستثنائية علوم تجريبية

الموضوع الأول- التمرين الأول

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 1 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n + 1 \end{cases}$$

1-أحسب الحدين: u_1 و v_1 .

2-أ- اكتب $u_{n+2} - u_{n+1}$ بدلالة $u_{n+1} - u_n$.

2-ب- باستعمال البرهان بالتراجع برهن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما و المتتالية (v_n) متناقصة تماما.

3- نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:
$$w_n = u_n - v_n$$
برهن أن المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدّها الأول w_0 ثم عبّر عن w_n بدلالة n .

4- بيّن أنّ المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان.

الحل

1-حساب الحدين U_1 و V_1:

حساب U_1

لدينا $U_{n+1} = \frac{3}{4}U_n + 1$

بتعويض $n = 0$ يصبح: $U_{0+1} = \frac{3}{4}U_0 + 1$
$$U_1 = \frac{3}{4}(1) + 1 = \frac{7}{4}$$

ومنه $\boxed{U_1 = \frac{7}{4}}$

حساب V_1

لدينا $V_{n+1} = \frac{3}{4}V_n + 1$

بتعويض $n = 0$ يصبح: $V_{0+1} = \frac{3}{4}V_0 + 1$
$$V_1 = \frac{3}{4}(6) + 1$$

ومنه $\boxed{V_1 = \frac{11}{2}}$

2-أ-كتابة $(U_{n+2} - U_{n+1})$ بدلالة $(U_{n+1} - U_n)$:

لدينا $U_{n+1} = \frac{3}{4}U_n + 1$

ومنه $U_{n+2} = \frac{3}{4}U_{n+1} + 1$

بالتعويض نجد
$$U_{n+2} - U_{n+1} = \frac{3}{4}U_{n+1} + 1 - \left(\frac{3}{4}U_n + 1\right)$$

إذن $U_{n+2} - U_{n+1} = \frac{3}{4}(U_{n+1} - U_n)$

2-ب- البرهان بالتراجع أن (U_n) متتالية متزايدة تماما و(V_n) متتالية متناقصة تماما:

- البرهان بالتراجع أن (U_n) متتالية متزايدة تماما:

للبرهان (U_n) متزايدة تماما يكفي أن نبرهن بالتراجع أن $U_{n+1} - U_n > 0$

- نسمي $P(n)$ الخاصية $U_{n+1} - U_n > 0$

من اجل $n = 0$ أي $U_{0+1} - U_0 > 0$

$$U_1 - U_0 > 0$$

$$\frac{7}{4} - 1 = \frac{3}{4} > 0$$

ومنه $P(O)$ محققة من أجل $n = 0$

نفرض أن $P(n)$ محققة من أجل كل $n \geq 0$ أي $U_{n+1} - U_n > 0$ محققة، ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $U_{n+2} - U_{n+1} > 0$

لدينا من الجواب السابق :

$$U_{n+2} - U_{n+1} = \frac{3}{4}(U_{n+1} - U_n)$$

ولدينا من الفرضية $U_{n+1} - U_n > 0$

وبما أن $\frac{3}{4} > 0$ فإنه $U_{n+2} - U_{n+1} > 0$

ومنه الخاصية $P(n+1)$ محققة

- إذن $U_{n+1} - U_n > 0$ من أجل كل عدد طبيعي n

أي المتتالية (U_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

البرهان بالتراجع أن (V_n) متتالية متناقصة تماما:

يكفي أن نبرهن بالتراجع أن $V_{n+1} - V_n < 0$

- نسمي $P(n)$ الخاصية $V_{n+1} - V_n < 0$

من اجل $n = 0$ يكون

$$V_{0+1} - V_0 < 0$$

$$V_1 - V_0 < 0$$

$$\frac{11}{2} - 6 = \frac{-1}{2} < 0$$

ومنه $P(O)$ محققة من أجل $n = 0$

- نفرض أن $P(n)$ محققة من أجل كل $n \geq 0$ أي $V_{n+1} - V_n < 0$ محققة، ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $V_{n+2} - V_{n+1} < 0$

نستنتج مما سبق أن:

$$V_{n+2} - V_{n+1} = \frac{3}{4}(V_{n+1} - V_n)$$

(لأن U_{n+1} و V_{n+1} لهما نفس العبارة)

ولدينا من الفرضية $V_{n+1} - V_n < 0$

وبما أن $\frac{3}{4} > 0$ ومن الفرضية $V_{n+1} - V_n < 0$ فإنه

$$V_{n+2} - V_{n+1} < 0$$

ومنه الخاصية $P(n+1)$ محققة

- إذن $V_{n+1} - V_n < 0$ من أجل كل عدد طبيعي n

أي المتتالية (V_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

3-البرهان أن (W_n) متتالية هندسية:

حتى تكون (W_n) متتالية هندسية يكفي أن نبرهن أ

$$W_{n+1} = W_n \times q$$

$$W_{n+1} = U_{n+1} - V_{n+1}$$

$$= \frac{3}{4}U_n + 1 - (\frac{3}{4}V_n + 1)$$

$$W_{n+1} = \frac{3}{4}(U_n - V_n) = \frac{3}{4}W_n$$

ومنه $\boxed{W_{n+1} = W_n \frac{3}{4}}$

أي المتتالية (W_n) هندسية أساسها $q = \frac{3}{4}$

حساب الحد الأول W_0:

لدينا $W_n = U_n - V_n$

$$W_0 = U_0 - V_0$$

$$W_0 = 1 - 6$$

ومنه $\boxed{W_0 = -5}$

التعبير عن W_n بدلالة n:

$$W_n = W_0 q^n$$

بالتعويض نجد $\boxed{W_n = -5\left(\frac{3}{4}\right)^n}$

4-البرهان أن المتتالية (U_n) والمتتالية (V_n) متجاورتان:

بما أن (U_n) متتالية متزايدة تماما و (V_n) متتالية متناقصة تماما و أيضا

$$\lim_{n \to +\infty}(U_n - V_n) = \lim_{n \to +\infty}(W_n) = \lim_{n \to +\infty} -5\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$$

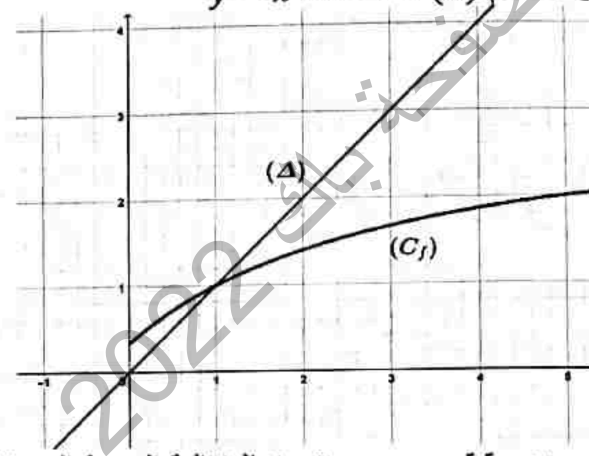
لأن $\lim_{n \to +\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ أي $-1 < \frac{3}{4} < 1$

ومنه المتتالية (U_n) والمتتالية (V_n) متجاورتان

13. بكالوريا 2017 الاستثنائية علوم تجريبية

الموضوع الثاني- التمرين الثاني

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{3x+1}{x+3}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ والمستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$



α عدد حقيقي موجب، (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول u_0 حيث $u_0=\alpha$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=f(u_n)$

I-عيّن قيمة α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة.

II-نضع في كل ما يلي $\alpha=5$

II-1-أ- أنقل الشكل المقابل ثمّ مثّل على حامل محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2، u_3 (دون حساب الحدود).

II-1-ب- ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها.

II-2-نعتبر (v_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}$.

II-2-أبرهن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب تعيين حدها الأول.

II-2-ب-عبّر بدلالة n عن v_n و u_n ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$.

II-3-أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n=v_n+v_{n+1}+\ldots+v_{n+2016}$$

ثم استنتج بدلالة n المجموع S'_n حيث:

$$S'_n=\frac{1}{u_n+1}+\frac{1}{u_{n+1}+1}+\frac{1}{u_{n+2}+1}+\ldots+\frac{1}{u_{n+2016}+1}.$$

الحل

I-تعيين قيمة α حتى تكون (U_n) متتالية ثابتة:

المتتالية (U_n) ثابتة يعني أن

$$U_{n+1}=U_n=U_0=\alpha$$

أي أن جميع حدود المتتالية تساوي العدد α ونكتب

$$\frac{3\alpha+1}{\alpha+3}=\alpha$$

$$\frac{3\alpha+1}{\alpha+3}-\alpha=0$$

$$\frac{3\alpha+1-\alpha^2-3\alpha}{\alpha+3}=0$$

$$\frac{1-\alpha^2}{\alpha+3}=0$$

ومنه

$$1-\alpha^2=0$$

$$\alpha^2=1$$

أي

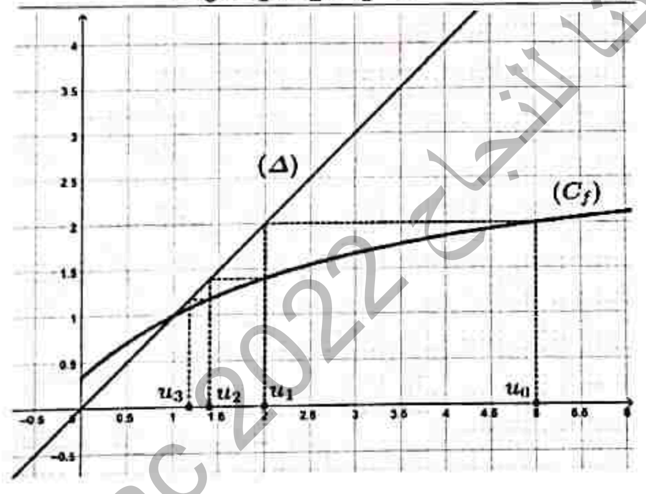
$\alpha=1 \to$ مقبول لأنّ $\alpha>0$

أو

$\alpha=-1 \to$ مرفوض لأنّ $\alpha<0$

ومنه قيمة α حتى تكون (U_n) ثابتة هي $\boxed{\alpha=1}$

II-1-أ- تمثيل الحدود U_0, U_1, U_2, U_3:



II-1-ب- وضع تخمين حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) وتقاربها:

نلاحظ أن $U_0>U_1>U_2>U_3$ يعني أن المتتالية (U_n) تبدو متناقصة وتتقارب نحو فاصلة نقطة تقاطع (C_f) مع (Δ)

II-2-أ-البرهان أن (V_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$:

تكون (V_n) متتالية هندسية إذا كان $V_{n+1}=V_n\times q$

لدينا

$$V_{n+1}=\frac{U_{n+1}-1}{U_{n+1}+1}$$

$$V_{n+1}=\frac{\frac{3U_n+1}{U_n+3}-1}{\frac{3U_n+1}{U_n+3}+1}$$

$$V_{n+1}=\frac{3U_n+1-U_n-3}{3U_n+1+U_n+3}$$

$$V_{n+1}=\frac{2U_n-2}{4U_n+4}$$

$$V_{n+1}=\frac{2}{4}\frac{U_n-1}{U_n+1}=\frac{1}{2}\frac{U_n-1}{U_n+1}$$

ومنه $\boxed{V_{n+1}=\frac{1}{2}V_n}$

ومنه (V_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$

حساب حدها الأول V_0:

لدينا

$$V_n=\frac{U_n-1}{U_n+1}$$

$$V_0=\frac{U_0-1}{U_0+1}=\frac{5-1}{5+1}=\frac{2}{3}$$

إذن $\boxed{V_0=\frac{2}{3}}$

II-2-ب- التعبير عن V_n و U_n بدلالة n:

التعبير عن V_n بدلالة n:

لدينا $V_n=V_0\times q^n$

بالتعويض نجد $\boxed{V_n=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

التعبير عن U_n بدلالة n:

لدينا

$$V_n=\frac{U_n-1}{U_n+1}$$

وبضرب الوسطين في الطرفين نجد

$$V_n(U_n+1)=U_n-1$$
$$V_nU_n+V_n=U_n-1$$
$$V_nU_n-U_n=-1-V_n$$
$$U_n(V_n-1)=-1-V_n$$

يصبح $U_n=\frac{-1-V_n}{V_n-1}$

ولدينا مما سبق أن $V_n=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$ بعد تعويض نجد

$$\boxed{U_n=\frac{-1-\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}}$$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$:

$$\lim_{n\to+\infty}U_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{-1-\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}$$

ونعلم أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ لأنّ العدد $1>\frac{1}{2}>$

يصبح $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-1}{-1}=1$

ومنه $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=1}$

II-3- حساب S_n بدلالة n واستنتاج S'_n:

حساب S_n بدلالة n:

لدينا (V_n) متتالية هندسية يصبح

$S_n=V_p\left(\frac{q^{n-p+1}-1}{q-1}\right)$ مع $n\geq p$

$$S_n=V_n\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2016-n+1}-1}{\left(\frac{1}{2}\right)-1}$$

ولدينا مسبقا أن $V_n=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$ يصبح

$$S_n=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2017}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$S_n=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2017}}{\frac{2-1}{2}}$$

$$S_n=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2017}}{\frac{1}{2}}$$

إذن $S_n=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n\times\frac{2}{1}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2017}\right]$

ومنه $\boxed{S_n=\frac{4}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2017}\right]}$

استنتاج S'_n بدلالة n:

لدينا $V_n=\frac{U_n-1}{U_n+1}$

نضيف العدد 1 و -1 للبسط (لا يؤثر ذلك على النتيجة) يصبح

$$V_n=\frac{U_n-1}{U_n+1}=\frac{U_n-1+1-1}{U_n+1}$$

$$V_n=\frac{U_n+1}{U_n+1}-\frac{2}{U_n+1}$$

$$V_n=1-\frac{2}{U_n+1}$$

$$\frac{2}{U_n+1}=1-V_n$$

نضرب الطرفين في $\frac{1}{2}$ نجد $\frac{2}{U_n+1}\times\frac{1}{2}=\frac{1-V_n}{2}$

ومنه $\frac{1}{U_n+1}=\frac{1-V_n}{2}$

نضع $n=n+1$ نجد $\frac{1}{U_{n+1}+1}=\frac{1-V_{n+1}}{2}$

نضع $n=n+2$ نجد

$$\frac{1}{U_{n+2}+1}=\frac{1-V_{n+2}}{2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{U_{n+2016}+1}=\frac{1-V_{n+2016}}{2}$$

نقوم بالجمع طرفا لطرف عموديا فنحصل على S'_n أي:

$$S'_n=\frac{1-V_n}{2}+\frac{1-V_{n+1}}{2}+\cdots+\frac{1-V_{n+2016}}{2}$$

$$S'_n=\frac{1-V_n+1-V_{n+1}+\cdots+1-V_{n+2016}}{2}$$

نلاحظ أن العدد 1 تكرر $n+2016-n+1$ (عدد حدود متتالية):

$$S'_n=\frac{1(n+2016-n+1)-[V_n+V_{n+1}+\cdots+V_{n+2016}]}{2}$$

$$S'_n=\frac{2017-[V_n+V_{n+1}+\cdots+V_{n+2016}]}{2}$$

نلاحظ أن $[V_n+V_{n+1}+\cdots+V_{n+2016}]$ هي نفسها S_n التي حسبناها سابقا:

$$S'_n=\frac{2017-S_n}{2}$$

ونعلم أن $S_n=\frac{4}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2017}\right]$

بتعويضها نجد

$$\boxed{S'_n=\frac{2017-\left(\frac{4}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2017}\right]\right)}{2}}$$

14. بكالوريا 2017 العادية علوم تجريبية

الموضوع الأول- التمرين الثاني

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0=\frac{1}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n

$$u_{n+1}=3-\frac{10}{u_n+4} \text{ و } v_n=\frac{u_n+2}{1-u_n}$$

1- أ- برهن بالتراجع أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n $0<u_n<1$

1-ب- بيّن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

2- أ- بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{5}{2}$ ثمّ عبّر عن حدّها العام v_n بدلالة n.

2-ب- أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=1-\frac{3}{v_n+1}$ ثم استنتج النهاية $\lim_{n\to\infty}u_n$

الحل

1-أ - البرهان بالتراجع أن $0<U_n<1$ من أجل كل عدد طبيعي n:

- نسمي $P(n)$ الخاصية "$0<U_n<1$"

من أجل $n=0$ لدينا $U_0=\frac{1}{4}$ و $0<\frac{1}{4}<1$

ومنه $0<U_0<1$

أي $P(O)$ محققة من أجل $n=0$

نفرض أن $P(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي كيفي n أي $0<U_n<1$ محققة،

ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $0<U_{n+1}<1$ محققة.

لدينا من الفرضية

$$0<U_n<1$$

$$0+4<U_n+4<1+4$$

$$\frac{1}{5}<\frac{1}{U_n+4}<\frac{1}{4}$$

$$\frac{-10}{4}<\frac{-10}{U_n+4}<\frac{-10}{5}$$

$$0<3+\frac{-10}{4}<3+\frac{-10}{U_n+4}<3+\frac{-10}{5}$$

تصبح $0<\frac{1}{2}<U_{n+1}<1$

ومنه الخاصية $P(n+1)$ محققة

إذن $0<U_n<1$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n

1-ب - البرهان أن (U_n) متتالية متزايدة تماما:

ندرس إشارة الفرق $U_{n+1} - U_n$

$$U_{n+1} - U_n = 3 - \frac{10}{U_n + 4} - U_n$$

$$= \frac{3U_n + 12 - 10 - {U_n}^2 - 4U_n}{U_n + 4}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{-{U_n}^2 - U_n + 2}{U_n + 4}$$

بما أن المقام موجب لأنّ $0 < U_n < 1$

عند إضافة العدد 4 نجد: $0 < 4 < U_n + 4 < 5$

ومنه إشارة $u_{n+1} - u_n$ من إشارة البسط فنقوم بتحليله لأنه معادلة من الدرجة الثانية:

$$-{U_n}^2 - U_n + 2 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4(-1)(2) = 9$$

بما أن $\Delta > 0$ فالعبارة لها حلين U_{n1} و U_{n2}:

$$\sqrt{\Delta} = 3$$

$$U_{n1} = \frac{1-3}{2(-1)} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$U_{n2} = \frac{1+3}{2(-1)} = \frac{4}{-2} = -2$$

إن وجد للمعادلة حلان فنقوم بتحليلها بالقاعدة التي تقول:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

إذا نكتب:

$$U_{n+1} - U_n = \frac{-{U_n}^2 - U_n + 2}{U_n + 4}$$

$$= \frac{-1(U_n - 1)(U_n + 2)}{U_n + 4}$$

$$= \frac{(1 - U_n)(U_n + 2)}{U_n + 4}$$

بما أن $U_n + 4$ موجبة

و $U_n + 2$ أيضا موجبة لأنّ

$$0 < 2 < U_n + 2 < 3$$

وكذلك $1 - U_n$ أيضا موجبة لأنّ $U_n < 1$

أي $1 - U_n > 0$

ومنه المتتالية (U_n) متزايدة تماما على N

استنتاج أن (U_n) متتالية متقاربة:

بما أن (U_n) متتالية متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 1 لأنّ $0 < U_n < 1$ فهي متقاربة نحو نهايتها l.

2-أ - البرهان أن (V_n) متتالية هندسية:

تكون (V_n) متتالية هندسية إذا كان $V_{n+1} = V_n \times q$

$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1} + 2}{1 - U_{n+1}} = \frac{3 - \frac{10}{U_n + 4} + 2}{1 - \left(3 - \frac{10}{U_n + 4}\right)}$$

$$= \frac{5U_n + 10}{2 - 2U_n}$$

نقوم بإخراج العدد $\frac{5}{2}$ كعامل مشترك يصبح:

$$V_{n+1} = \frac{5}{2} \times \frac{U_n + 2}{1 - U_n} = V_n \times \frac{5}{2}$$

إذن $\boxed{V_{n+1} = V_n \times \frac{5}{2}}$

ومنه (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{5}{2}$

حساب V_0: $V_n = \frac{U_n + 2}{1 - U_n}$

$$V_0 = \frac{U_0 + 2}{1 - U_0}$$

$$V_0 = \frac{\frac{1}{4} + 2}{1 - \frac{1}{4}} = 3$$

إذن $\boxed{V_0 = 3}$

التعبير عن V_n بدلالة n:

لدينا: $V_n = V_p \times q^{n-p}$ مع $p \geq$

$$V_n = V_0 \times q^n$$

$$\boxed{V_n = 3 \times \left(\frac{5}{2}\right)^n}$$

2-ب - إثبات أنّ: $U_n = 1 - \frac{3}{V_n + 1}$

لدينا $V_n = \frac{U_n + 2}{1 - U_n}$

بضرب الوسطين في الطرفين نجد:

$$V_n(1 - U_n) = U_n + 2$$

$$V_n - V_n U_n = U_n + 2$$

$$V_n - 2 = U_n + V_n U_n$$

نخرج U_n عامل مشترك نجد:

$$V_n - 2 = U_n(V_n + 1)$$

$$U_n = \frac{V_n - 2}{V_n + 1}$$

$$U_n = \frac{v_n + 1 - 1 - 2}{v_n + 1}$$

$$= \frac{v_n + 1}{v_n + 1} - \frac{3}{v_n + 1}$$

$$U_n = 1 - \frac{3}{v_n + 1}$$

استنتاج $\lim_{n \to +\infty} U_n$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{3}{3\left(\frac{5}{2}\right)^n + 1}\right)$$

ولدينا $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{2}\right)^n=+\infty$ لأنّ $1<\frac{5}{2}$

إذا يصبح: $\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{3}{3\left(\frac{5}{2}\right)^n+1}\right)=0$

وبالتالي: $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{3}{3\left(\frac{5}{2}\right)^n+1}\right)=1$

ومنه $\boxed{\lim_{n\to+\infty}U_n=1}$

15. بكالوريا 2017 العادية علوم تجريبية

الموضوع الثاني- التمرين الثاني

المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

f الدالة المعرّفة على المجال $[-4;1]$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{3x-16}{x+11}$$

وليكن (C_f) المنحنى الممثل لها، (Δ) المستقيم ذو المعادلة : $y=x$

I-تحقّق أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-4;1]$ ثم بيّن أنّه من أجل كل $x\in[-4;1]$ فإنّ: $f(x)\in[-4;1]$

II-(u_n) متتالية معرّفة بحدّها الأول $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=f(u_n)$

II-1-أنقل الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 (لا يطلب حساب حدود) ثمّ ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها.

II-2-برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$-4<u_n\leq 0$$

ثم بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

II-3-لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة كما يلي:

من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n\times u_n=1-4v_n$

أثبت أنّ المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{7}$ ، ثم أحسب المجموع S حيث:

$$S=v_0\times u_0+v_1\times u_1+\ldots+v_{2016}\times u_{2016}$$

الحل

I-التحقق أن الدالة متزايدة تماما على $[-4,1]$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $[-4,1]$ و مشتقتها:

$$f'(x)=\frac{3(x+11)-1\,(3x-16)}{(x+11)^2}$$

$$f'(x)=\frac{3x+33-3x+16}{(x+11)^2}=\frac{49}{(x+11)^2}>0$$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-4,1]$.

البرهان أنه $-4\leq x\leq 1$ فإن $-4\leq f(x)\leq 1$:

إذا كان $-4\leq x\leq 1$ والدالة f متزايدة تماما على المجال $[-4,1]$ فإن $f(-4)\leq f(x)\leq f(1)$

$$f(-4)=\frac{-12-16}{-4+11}=\frac{-28}{7}=-4$$

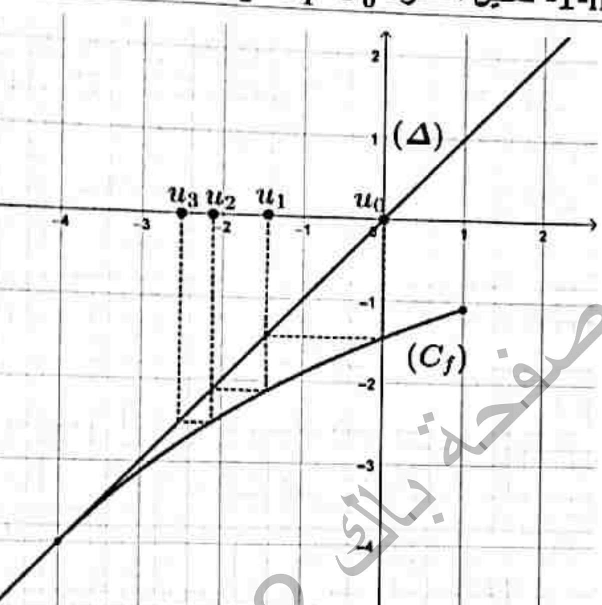
$$f(1)=\frac{3-16}{1+11}=\frac{-13}{12}$$

يصبح:

$$-4\leq f(x)\leq\frac{-13}{12}\leq 1$$

ومنه $-4\leq f(x)\leq 1$

II-1- تمثيل الحدود U_0، U_1، U_2، U_3:



وضع تخمين حول تغير اتجاه (U_n) وتقاربها:

نلاحظ أن $U_0 > U_1 > U_2 > U_3$

ومنه تبدو (U_n) متتالية متناقصة وتتقارب نحو فاصلة نقطة تقاطع (C_f) و (Δ)

II-2- البرهان بالتراجع أن $-4 < U_n \le 0$:

نسمي $P(n)$ الخاصية: $-4 < U_n \le 0$

من أجل $n = 0$ أي $U_0 = 0$ يكون

$-4 < U_0 \le 0$

$-4 < 0 \le 0$

إذا $P(0)$ محققة من أجل $n = 0$

نفرض أن $P(n)$ محققة أي $-4 < U_n \le 0$ محققة، ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي

$-4 < U_{n+1} \le 0$

لدينا من الفرضية $-4 < U_n \le 0$ والدالة f متزايدة تماما على $[-4,0]$ فيكون

$f(-4) < f(U_n) \le f(0)$

$-4 < U_{n+1} \le \frac{-16}{11} \le 0$

ومنه الخاصية $P(n+1)$ محققة

- إذن $-4 < U_n \le 0$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

البرهان أن (U_n) متتالية متناقصة تماما:

نبرهن أن $U_{n+1} - U_n < 0$

بما أن $f(U_n) = U_{n+1}$ يكون

$$U_{n+1} - U_n = \frac{3U_n - 16 - U_n^2 - 11U_n}{U_n + 11}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{-U_n^2 - 8U_n - 16}{U_n + 11}$$

المقام موجب تماما لأنّ $-4 < U_n \le 0$ ومنه

$0 < 7 < U_n + 11 \le +11$

يبقى البسط نقوم بتحليله:

$$-U_n^2 - 8U_n - 16 = 0$$

$$\Delta = 64 - 4(-1)(-16) = 0$$

$$U_{n0} = \frac{-b}{2a} = \frac{+8}{-2} = -4$$

إن وجد للمعادلة حل مضاعف فنقوم بتحليلها بالقاعدة التي تقول: $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)(x - x_0)$

إذا نكتب:

$$U_{n+1} - U_n = \frac{-U_n^2 - 8U_n - 16}{U_n + 11}$$

$$= \frac{-(U_n + 4)^2}{U_n + 11} < 0$$

ومنه (U_n) متناقصة تماما على N

II-3- البرهان أن (V_n) متتالية حسابية أساسها

$$r = \frac{1}{7}$$

يكفي أن نبرهن أن $V_{n+1} = V_n + r$

نجد أولا V_{n+1}

$$V_n U_n = 1 - 4V_n$$

$$V_n U_n + 4V_n = 1$$

$$V_n(U_n + 4) = 1$$

$$V_n = \frac{1}{U_n + 4}$$

$$V_n = \frac{1}{U_n + 4}$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1} + 4}$$

ومنه

$$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{U_{n+1} + 4} - V_n$$

$$= \frac{1}{\frac{3U_n - 16}{U_n + 11} + 4} - \frac{1}{U_n + 4}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{\frac{3U_n - 16 + 4U_n + 44}{U_n + 11}} - \frac{1}{U_n + 4}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{U_n + 11}{7U_n + 28} - \frac{1}{U_n + 4}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{U_n + 11 - 7}{7(U_n + 4)} = \frac{1}{7}$$

إذن $\boxed{V_{n+1} - V_n = \frac{1}{7}}$

حساب V_0:

$$V_n = \frac{1}{U_n + 4}$$

$$V_0 = \frac{1}{U_0 + 4}$$

$$V_0 = \frac{1}{0+4} = \frac{1}{4}$$

ومنه $\boxed{V_0 = \frac{1}{4}}$

ومنه (V_n) متتالية حسابية أساسها $r = \frac{1}{7}$ وحدها الأول $V_0 = \frac{1}{4}$

عبارة الحد العام:

لدينا $V_n = V_0 + nr$

$$\boxed{V_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{7}n}$$

حساب S :

لدينا $V_n U_n = 1 - 4V_n$

ومنه $V_0 U_0 = 1 - 4V_0$

$V_1 U_1 = 1 - 4V_1$

....

....

$V_{2016} U_{2016} = 1 - 4V_{2016}$

نقوم بالجمع طرف لطرف عموديا فنحصل على المجموع S أي:

$$S = V_0U_0 + V_1U_1 \dots + V_{2016}U_{2016}$$
$$= (1 - 4V_0) + (1 - 4V_1) \dots + (1 - 4V_{2016})$$

نلاحظ أن العدد 1 تكرر $2016 - 0 + 1 = 2017$ (عدد حدود متتالية) والعدد 4 عامل مشترك ونكتب:

$$S = 1(2017) - 4(V_0 + V_1 \dots + V_{2016})$$

نلاحظ أن $(V_0 + V_1 \dots + V_{2016})$ هي عبارة عن مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية اذا:

$$S = 1(2017) - 4\left[\frac{2017}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{2016}{7}\right)\right]$$

$$S = 2017 - 4\left[\frac{2017}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{2016}{7}\right)\right]$$

$$\boxed{S = -1161792}$$

16. بكالوريا 2016 العادية علوم تجريبية

الموضوع الأول- التمرين الثالث

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على المجال $I = [0; 4]$ كما يلي: $f(x) = \frac{13x}{9x+13}$

1-أ- بيّن أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال I .

1-ب- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I، $f(x)$ ينتمي إلى I .

2- لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول $u_0 = 4$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ ، من أجل كل عدد طبيعي n.

2-أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n \leq 4$

2-ب- ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ، ثمّ استنتج انها متقاربة.

3- بيّن أنه من أجل عدد طبيعي n: $u_n \neq 0$.

4- لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = 2 + \frac{13}{u_n}$

4-أ-برهن أنّ المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0 .

4-ب- أكتب v_n بدلالة n .

4-جـ- استنتج أنّ: $u_n = \frac{52}{36n+13}$ وذلك من أجل كل عدد طبيعي n، ثمّ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

الحل

1-أ – البرهان أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $I = [0,4]$

الدالة f قابلة للاشتقاق على I ودالتها المشتقة هي

$$f'(x) = \frac{13(9x+13) - 9(13x)}{(9x+13)^2}$$
$$= \frac{13(9x) + 169 - 9(13x)}{(9x+13)^2}$$
$$f'(x) = \frac{169}{(9x+13)^2}$$

لدينا $\frac{169}{(9x+13)^2} > 0$ من أجل كل $x \in I$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على I

1-ب – البرهان أن إذا كان $0 \le x \le 4$ فإن $0 \le f(x) \le 4$

إذا كان $0 \le x \le 4$ وبما أن الدالة f متزايدة تماما على $[0,4]$ فإن: $f(0) \le f(x) \le f(4)$

$$0 \le f(x) \le \frac{52}{49} \le 4$$

أي $0 \le f(x) \le 4$ معناه $f(x) \in I$

2-أ - البرهان بالتراجع أن $0 \le U_n \le 4$ من أجل كل عدد طبيعي n:

- نسمي $P(n)$ الخاصية "$0 \le U_n \le 4$"

من اجل $n = 0$ لدينا $U_0 = 4$ و $0 \le 4 \le 4$

ومنه $0 \le U_0 \le 4$

أي $P(O)$ محققة من أجل $n = 0$

- نفرض أن $P(n)$ محققة من أجل كل عدد n طبيعي كيفي أي $0 \le U_n \le 4$ محققة، ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $0 \le U_{n+1} \le 4$ محققة:

لدينا من الفرضية $0 \le U_n \le 4$

والدالة f متزايدة تماما على $[0,4]$ اي

$$f(0) \le f(U_n) \le f(4)$$

نعلم أن $f(U_n) = U_{n+1}$ يصبح

$$0 \le U_{n+1} \le \frac{52}{49} \le 4$$

أي $0 \le U_{n+1} \le 4$

ومنه الخاصية $P(n+1)$ محققة

- إذن $0 \le U_n \le 4$ صحيحة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

2-ب – دراسة اتجاه تغير المتتالية (U_n):

ندرس إشارة الفرق $U_{n+1} - U_n$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{13U_n}{9U_n + 13} - U_n$$

$$= \frac{13U_n - 9U_n^2 - 13U_n}{9U_n + 13}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{-9U_n^2}{9U_n + 13}$$

لدينا

$$0 \le U_n \le 4$$
$$0 \le 9U_n \le 36$$
$$0 < 13 \le 9U_n + 13 \le 49$$

ومنه المقام موجب

ولدينا

$$0 \le U_n \le 4$$
$$0 \le U_n^2 \le 16$$
$$0 \le 9U_n^2 \le 9(16)$$
$$-9(16) \le -9U_n^2 \le 0$$

ومنه البسط سالب

إذن: المتتالية (U_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

استنتاج أن (U_n) متتالية متقاربة:

بما أن (U_n) متتالية متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد 0 لأنّ $0 \le U_n \le 4$ فهي متقاربة نح نهايتها l

3-البرهان أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن $U_n \neq 0$

للإجابة على ذلك نستعمل البرهان بالتراجع

- نسمي $P(n)$ الخاصية $U_n \neq 0$

من اجل $n = 0$ لدينا $U_0 = 4$ و $4 \neq 0$

ومنه $U_0 \neq 0$ أي $P(O)$ محققة من أجل $n = 0$

- نفرض أن $P(n)$ محققة من أجل كل n عدد طبيعي كيفي أي $U_n \neq 0$ محققة، ونبرهن صحة $P(n+1)$

أي $U_{n+1} \neq 0$ محققة:

لدينا من السؤال(2-ب) $0 \le u_n$

ومن فرضية التراجع $u_n \neq 0$

ومنه $0 < u_n$

$$0 < 9u_n$$
$$0 < 13 < 9u_n + 13$$
$$0 < \frac{1}{9u_n + 13} < \frac{1}{13} \ldots (1)$$

ولدينا $0 < u_n$

$$0 < 13u_n \ldots (2)$$

بضرب (1) في (2) نجد $0 < \frac{13u_n}{9u_n+13}$

ومنه $0 < u_{n+1}$

اذا $u_{n+1} \neq 0$

ومنه الخاصية $p(n+1)$ محققة

- إذن $u_n \neq 0$ من أجل كل عدد طبيعي n

4-أ - البرهان أن (V_n) متتالية حسابية:

تكون (V_n) متتالية حسابية إذا كان $V_{n+1} = V_n + r$

لدينا $V_n = 2 + \frac{13}{U_n}$

$$V_{n+1} = 2 + \frac{13}{U_{n+1}}$$

$$V_{n+1} = 2 + \frac{13}{\frac{13U_n}{9U_n+13}} = 2 + \frac{9U_n+13}{U_n}$$

$$V_{n+1} = \frac{2U_n+9U_n+13}{U_n}$$

$$V_{n+1} = \frac{11U_n+13}{U_n} = \frac{11U_n}{U_n} + \frac{13}{U_n}$$

$$V_{n+1} = 11 + \frac{13}{U_n} = \frac{13}{U_n} + 2 + 9$$

$$\boxed{V_{n+1} = V_n + 9}$$

ومنه (V_n) متتالية حسابية أساسها $r = 9$

حساب V_0:

لدينا $V_0 = 2 + \frac{13}{U_0} = 2 + \frac{13}{4}$

$$\boxed{V_0 = \frac{21}{4}}$$

4-ب - كتابة V_n بدلالة n:

عبارة الحد العام للمتتالية الحسابية هو

$V_n = V_p + (n-p)r$ مع $n \geq p$

$$V_n = V_0 + nr$$

$$\boxed{V_n = \frac{21}{4} + 9n}$$

4-جـ – البرهان أن $U_n = \frac{52}{36n+13}$:

لدينا

$$V_n = 2 + \frac{13}{U_n}$$

$$\frac{13}{U_n} = \frac{V_n - 2}{1}$$

$$13 = U_n(V_n - 2)$$

$$U_n = \frac{13}{(V_n - 2)}$$

$$U_n = \frac{13}{\frac{21}{4} + 9n - 2} = \frac{13(4)}{36n + 13}$$

ومنه $U_n = \frac{52}{36n+13}$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{52}{36n+13}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{52}{36n}\right)$$

ومنه $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0}$

17. بكالوريا 2016 العادية علوم تجريبية

الموضوع الثاني- التمرين الثالث

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ مجموعة الأعداد الطبيعية بحدها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n بـ: $u_{n+1} = \frac{2u_n+2}{u_n+3}$ ولتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كلّ عدد طبيعي n بـ: $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}$.

1-بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدّها الأول v_0 .

2-أ- عبّر بدلالة n عن عبارة الحد العام v_n .

2-ب- استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

2-جـ- أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3-أ-أحسب بدلالة n المجموع:

$$S_n = v_0 + v_1 + \ldots\ldots + v_n$$

3-ب- تحقق أنّ: $\frac{1}{u_n+2} = \frac{1}{3}(1 - v_n)$ وذلك من أجل كل عدد طبيعي n .

3-جـ- استنتج بدلالة n المجموع:

$$S'_n = \frac{1}{u_0+2} + \frac{1}{u_1+2} + \ldots\ldots + \frac{1}{u_n+2}$$

الحل

1-البرهان أن (V_n) متتالية هندسية:

تكون (V_n) متتالية هندسية إذا كان $V_{n+1} = V_n \times q$

لدينا $V_n = \frac{U_n-1}{U_n+2}$

$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1} - 1}{U_{n+1} + 2}$$

$$V_{n+1} = \frac{\frac{2U_n+2}{U_n+3} - 1}{\frac{2U_n+2}{U_n+3} + 2} = \frac{\frac{2U_n + 2 - 1(U_n+3)}{U_n+3}}{\frac{2U_n + 2 + 2(U_n+3)}{U_n+3}}$$

$$V_{n+1} = \frac{2U_n + 2 - U_n - 3}{2U_n + 2 + 2U_n + 6} = \frac{U_n - 1}{4U_n + 8}$$

نقوم بإخراج العدد $\frac{1}{4}$ كعامل مشترك يصبح:

$$V_{n+1} = \frac{1}{4}\,\frac{U_n - 1}{U_n + 2}$$

$$\boxed{V_{n+1} = \frac{1}{4} V_n}$$

ومنه (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{4}$

حساب V_0:

لدينا $V_0 = \frac{U_0-1}{U_0+2} = \frac{0-1}{0+2}$

$$\boxed{V_0 = -\frac{1}{2}}$$

2-أ - التعبير عن V_n بدلالة n:

بما أن (V_n) متتالية هندسية فإن:

$$V_n = V_0 \times q^n$$

$$\boxed{V_n = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n}$$

2-ب-استنتاج بدلالة n عبارة (U_n)

لدينا $V_n = \frac{U_n-1}{U_n+2}$

باستعمال جداء الوسطين في جداء الطرفين نجد

$$V_n(U_n+2) = U_n - 1$$
$$V_n U_n + 2V_n = U_n - 1$$
$$V_n U_n - U_n = -1 - 2V_n$$
$$U_n(V_n - 1) = -1 - 2V_n$$
$$U_n = \frac{-1-2V_n}{V_n - 1}$$

ولدينا من الجواب السابق $V_n = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$

نعوضها نجد

$$U_n = \frac{-1-2\left(-\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)}{-\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1}$$

ومنه $\boxed{U_n = \frac{-1+\left(\frac{1}{4}\right)^n}{-\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1}}$

2-جـ- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{-1+\left(\frac{1}{4}\right)^n}{-\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1}\right]$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{4^n} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 1$$

ومنه $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1}$

3-أ – حساب S_n بدلالة n

بما أن S_n عبارة عن مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{4}$ وحدها الأول $V_0 = -\frac{1}{2}$

$S_n = V_p\left(\frac{q^{n-p+1}-1}{q-1}\right)$ مع $n \geq p$

حيث p دليل الحد الأول للمجموع، و $n-p+1$ تمثل عدد الحدود

$$S_n = V_0\,\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n-0+1}-1}{\frac{1}{4}-1}$$

$$S_n = -\frac{1}{2}\,\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{4}-1}$$

$$S_n = -\frac{1}{2}\,\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}-1}{\frac{-3}{4}}$$

$$S_n = -\frac{1}{2}\,\frac{-4}{3}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}-1\right]$$

إذن $\boxed{S_n = \frac{2}{3}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}-1\right]}$

3-ب – التحقق أن $\frac{1}{U_n+2} = \frac{1}{3}(1-V_n)$

بما أنها علاقة مساواة فننطلق من طرف لنصل للطرف الآخر:

لدينا

$$\frac{1}{3}(1-V_n) = \frac{1}{3}\left(1-\frac{U_n-1}{U_n+2}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{U_n+2-U_n+1}{U_n+2}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{3}{U_n+2}\right)$$

ومنه $\frac{1}{3}(1-V_n) = \frac{1}{U_n+2}$

3-جـ - استنتاج S'_n بدلالة n:

لدينا $S'_n = \frac{1}{U_0+2} + \frac{1}{U_1+2} + \cdots + \frac{1}{U_n+2}$

ولدينا

$$\frac{1}{U_0+2} = \frac{1}{3}(1-V_0)$$
$$\frac{1}{U_1+2} = \frac{1}{3}(1-V_1)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{1}{U_n+2} = \frac{1}{3}(1-V_n)$$

نقوم بتعويض كل حد بما يساويه في S'_n يصبح

$$S'_n = \frac{1}{3}(1-V_0) + \frac{1}{3}(1-V_1) + \cdots + \frac{1}{3}(1-V_n)$$

$$S'_n = \frac{1}{3}[1 - V_0 + 1 - V_1 + \cdots + 1 - V_n]$$

$$S'_n = \frac{1}{3}[1+1+1+\cdots+1-(V_0+V_1+\cdots+V_n)]$$

نلاحظ أن العدد 1 تكرر $n - 0 + 1$ (عدد حدود المتتالية):

$$S'_n = \frac{1}{3}[1(n+1) - (V_0 + V_1 + \cdots + V_n)]$$

ونلاحظ أن $(V_0 + V_1 + \cdots + V_n)$ هي نفسها S_n التي حسبناها سابقا: $S'_n = \frac{1}{3}[(n+1) - S_n]$

ومنه

$$\boxed{S'_n = \frac{1}{3}\left[(n+1) - \frac{2}{3}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1\right]\right]}$$

18. بكالوريا 2016 الاستثنائية علوم تجريبية

الموضوع الأول- التمرين الثاني

I-f الدالة العددية المعرّفة على $[0; +\infty[$ المجال بـ:

$$f(x) = \sqrt{2x+8}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

I-1-أ- أحسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

I-1-ب- أدرس اتجاه تغيّر الدالة f ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

I-2-عيّن إحداثيي نقطة تقاطع المنحنى (C_f)مع المستقيم (Δ) الذي $y = x$ معادلة له.

I-3-أرسم(C_f) و(Δ) .

II-(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = f(u_n)$

II-1-مثّل في الشكل السابق على محور الفواصل، الحدود u_0، u_1، u_2 وu_3 (بدون حساب) موضحا خطوط الإنشاء.

II-2-ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية(u_n) وتقاربها.

II-3-أ- برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعيn أن:

$$0 \le u_n < 4$$

II-3-ب- أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

II-3-جـ- بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n

$$4 - u_{n+1} \le \frac{1}{2}(4 - u_n)$$

ثم استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعيn:

$$4 - u_n \le \frac{1}{2^n}(4 - u_0)$$

II-3-د- استنتج $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

الحل

I-1-أ - حساب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{2x+8} = +\infty$$

ومنه

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$$

I-1-ب – دراسة اتجاه تغير الدالة f على $[0, +\infty[$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $[0, +\infty[$ ودالتها المشتقة هي:

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+8}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+8}} > 0$$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على $[0, +\infty[$

جدول التغيرات

x	0 → $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\sqrt{8}$ ↗ $+\infty$

I-2-تعيين احداثيي نقطة تقاطع (C_f) مع (Δ)

لإيجاد احداثيي نقطة تقاطع منحنى مع مستقيم نحل المعادلة $f(x) = y$

$$\sqrt{2x+8} = x$$

نقوم بتربيع الطرفين يصبح

$$2x + 8 = x^2$$

$$-x^2 + 2x + 8 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4(-1)(8) = 4 + 32 = 36$$

$$\sqrt{\Delta} = 6$$

$$x_1 = \frac{-2-6}{-2} = 4$$

هذا الحل مقبول لأنّ $x \ge 0$ (من معطيات التمرين)

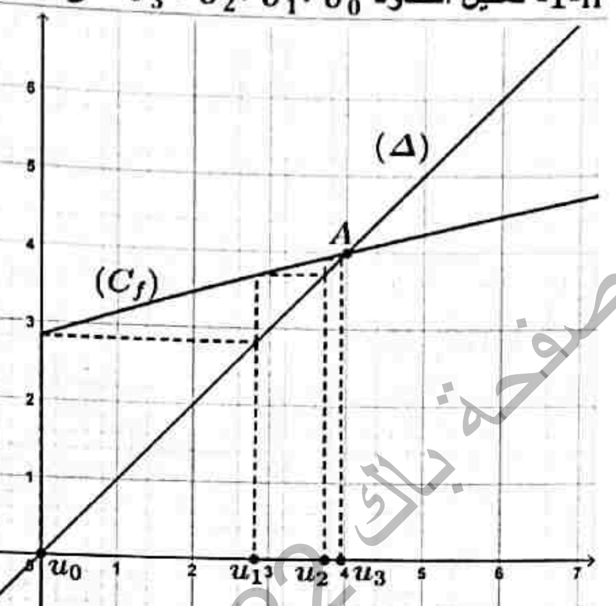
$$x_2 = \frac{-2+6}{-2} = -2$$

هذا الحل مرفوض لأنّ $x \ge 0$

إذا نقطة التقاطع هي $\boxed{(C) \cap (\Delta) = \{A(4,4)\}}$

I-3- رسم (C_f) و (Δ)

II-1- تمثيل الحدود U_0 ، U_1 ، U_2 ، U_3 على الشكل



II-2- وضع تخمين حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) وتقاربها:

نلاحظ أن $U_0 < U_1 < U_2 < U_3$ يعني أن المتتالية (U_n) متزايدة تماما وتتقارب نحو فاصلة نقطة تقاطع (C_f) مع (Δ)

II-3- أ - البرهان بالتراجع أن $0 \le U_n < 4$ من أجل كل عدد طبيعي n:

- نسمي $P(n)$ الخاصية $0 \le U_n < 4$
- من اجل $n = 0$ لدينا $U_0 = 0$ و $0 \le 0 < 4$

ومنه $0 \le U_0 < 4$ أي $P(O)$ محققة من أجل $n = 0$

- نفرض أن $P(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي كيفي n أي $0 \le U_n < 4$ محققة، ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $0 \le U_{n+1} < 4$

لدينا من الفرضية $0 \le U_n < 4$

وبما أن الدالة f متزايدة على المجال $[0,4]$ فإن

$f(0) \le U_{n+1} < f(4)$

$0 \le \sqrt{8} \le U_{n+1} < 4$

ومنه الخاصية $P(n+1)$ محققة

- إذن $0 \le U_n < 4$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

II-3- ب – دراسة اتجاه تغير المتتالية (U_n)

ندرس إشارة الفرق بين $U_{n+1} - U_n$

$$U_{n+1} - U_n = \sqrt{2U_n + 8} - U_n$$

نقوم باستخدام المرافق (أي نضرب ونقسم على نفس العدد)

$$U_{n+1} - U_n = \frac{(\sqrt{2U_n + 8} - U_n)(\sqrt{2U_n + 8} + U_n)}{(\sqrt{2U_n + 8} + U_n)}$$

باستخدام المتطابقة الشهيرة $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ على البسط نجد

$$U_{n+1} - U_n = \frac{-U_n{}^2 + 2U_n + 8}{(\sqrt{2U_n+8} + U_n)}$$

بالنسبة لإشارة المقام موجبة لأنه من السؤال السابق لدينا $0 \le U_n < 4$

و $0 \le U_{n+1} < 4$ أي

$0 \le \sqrt{2U_n + 8} < 4$

بالجمع طرفا لطرف نجد

$0 \le \sqrt{2U_n + 8} + U_n < 8$

أما بالنسبة للبسط فهو معادلة من الدرجة الثانية نقوم بتحليلها كالتالي:

لدينا $-U_n{}^2 + 2U_n + 8 = 0$

نلاحظ أنها نفس المعادلة التي قمنا بحلها سابقا مع تغيير مكان x بـ U_n إذا سيكون لها نفس الحلول وهي

$U_a = -2$ و $U_b = 4$

إن وجد للمعادلة حلان فنقوم بتحليلها بالقاعدة التي تقول: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

ومنه:

$$-U_n{}^2 + 2U_n + 8 = -1(U_n - 4)(U_n + 2)$$

يصبح لدينا

$$U_{n+1} - U_n = \frac{-U_n{}^2 + 2U_n + 8}{(\sqrt{2U_n + 8} + U_n)}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{-1(U_n - 4)(U_n + 2)}{(\sqrt{2U_n + 8} + U_n)}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{(-U_n + 4)(U_n + 2)}{(\sqrt{2U_n + 8} + U_n)}$$

بما أن $U_n + 2$ موجبة لأنّ $0 \le U_n < 4$

أي $0 \le 2 \le U_n + 2 < 6$

وكذلك $-U_n + 4$ أيضا موجبة لأنّ $U_n < 4$

أي $4 - U_n > 0$

إذا $U_{n+1} - U_n > 0$

ومنه المتتالية (U_n) متزايدة تماما على N

II-3- جـ – البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $4-U_{n+1}\le\frac{1}{2}(4-U_n)$

لدينا:

$$4-U_{n+1}=4-f(U_n)=4-\sqrt{2U_n+8}$$

نضرب بالمرافق

$$4-U_{n+1}=\frac{(4-\sqrt{2U_n+8})(4+\sqrt{2U_n+8})}{(4+\sqrt{2U_n+8})}$$

باستخدام المتطابقة الشهيرة $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ على البسط نجد

$$4-U_{n+1}=\frac{16-(2U_n+8)}{(4+\sqrt{2U_n+8})}$$

$$4-U_{n+1}=\frac{8-2U_n}{(4+\sqrt{2U_n+8})}$$

$$4-U_{n+1}=\frac{2(4-U_n)}{(4+\sqrt{2U_n+8})}$$

ولدينا من البرهان بالتراجع سابقا أن

$$0\le U_{n+1}<4$$

$$0\le\sqrt{2U_n+8}<4$$

$$4+0\le 4+\sqrt{2U_n+8}<4+4$$

ثم نضع المقلوب يصبح

$$0\le\frac{1}{8}<\frac{1}{4+\sqrt{2U_n+8}}\le\frac{1}{4}$$

نضرب كل الأطراف في $2(4-U_n)$ يصبح

$$\frac{2(4-U_n)}{8}<\frac{2(4-U_n)}{4+\sqrt{2U_n+8}}\le\frac{2(4-U_n)}{4}$$

ومنه

$$\frac{2(4-U_n)}{4+\sqrt{2U_n+8}}\le\frac{2(4-U_n)}{4}$$

$$\frac{2(4-U_n)}{4+\sqrt{2U_n+8}}\le\frac{1}{2}(4-U_n)$$

ومنه $4-U_{n+1}\le\frac{1}{2}(4-U_n)$

استنتاج أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن

$$\mathbf{4-U_n\le\frac{1}{2^n}(4-U_0)}$$

يمكن استنتاج ذلك باستعمال البرهان بالتراجع

- نسمي $P(n)$ الخاصية: $4-U_n\le\frac{1}{2^n}(4-U_0)$

- من اجل $n=0$ أي $U_0=0$ ومنه

$4-0\le\frac{1}{1}(4-0)$ أي $4-U_0\le\frac{1}{2^0}(4-U_0)$

أي $4\le4$

أي $P(0)$ محققة من أجل $n=0$

- نفرض أن $P(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n

أي $4-U_n\le\frac{1}{2^n}(4-U_0)$ محققة، ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي أن $4-U_{n+1}\le\frac{1}{2^{n+1}}(4-U_0)$ محققة:

لدينا من الفرضية $4-U_n\le\frac{1}{2^n}(4-U_0)$

نضرب أطراف المتباينة في العدد $\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}(4-U_n)\le\frac{1}{2^{n+1}}(4-U_0)$$

ولدينا من الجواب السابق أن

$4-U_{n+1}\le\frac{1}{2}(4-U_n)$ يصبح إذا

$$4-U_{n+1}\le\frac{1}{2}(4-U_n)\le\frac{1}{2^{n+1}}(4-U_0)$$

حسب قوانين الحصر يصبح

$$4-U_{n+1}\le\frac{1}{2^{n+1}}(4-U_0)$$

ومنه الخاصية $P(n+1)$ محققة

- إذن $4-U_n\le\frac{1}{2^n}(4-U_0)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

II-3- د-استنتاج: $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$

لدينا $0\le4-U_n\le\frac{1}{2^n}(4-U_0)$

هنا سنستخدم طريقة الحصر

$$0\le\lim_{n\to+\infty}(4-U_n)\le\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}(4-U_0)$$

نهاية $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}=0$ أي $\lim\limits_{n\to+\infty}(4-U_n)=0$

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=4$

إذن $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=4}$

19. بكالوريا 2016 الاستثنائية علوم تجريبية

الموضوع الثاني- التمرين الثاني

I- f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\frac{5x}{x+2}$$

I-1-أ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

I-1-ب- أدرس اتجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيّراتها.

I-2-بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$: $f(x)\ge0$

II- (u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{5u_n}{u_n+2}$.

II-1-أ- برهن بالتراجع من اجل عدد طبيعي n:

$$1 \leq u_n \leq 3$$

II-ب- أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ، ثمّ استنتج أنها متقاربة.

II-2-(v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$v_n = 1 - \frac{3}{u_n}$$

II-2-أ-برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{5}$ ، يطلب حساب حدها الأول v_0 .

II-2-ب-أكتب بدلالة n عبارة v_n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

II-2-جـ-أحسب نهاية المتتالية (u_n) .

II-3-أكتب بدلالة n المجموع S_n حيث:

. $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \ldots + \frac{1}{u_n}$

الحل

I-1-أ - حساب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{5x}{x+2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{5x}{x} = 5$$

ومنه $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 5}$

I-1-ب – دراسة اتجاه تغير الدالة f على $[0,+\infty[$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $[0,+\infty[$ ودالتها المشتقة هي

$$f'(x) = \frac{5(x+2) - 1(5x)}{(x+2)^2} = \frac{5x + 10 - 5x}{(x+2)^2}$$

لدينا $f'(x) = \frac{10}{(x+2)^2} > 0$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على $[0,+\infty[$

جدول تغيرات الدالة f على $[0,+\infty[$

x	0 ⟶ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	0 ↗ 5

I-2- التبيان أن من أجل كل x ينتمي $[0,+\infty[$ فإن $f(x) \geq 0$

من جدول التغيرات نجد أن $f(x) \geq 0$ والدالة f متزايدة تماما على $[0,+\infty[$

II-1- أ - البرهان بالتراجع أن $1 \leq U_n \leq 3$ من أجل كل عدد طبيعي n:

- نسمي $P(n)$ الخاصية $1 \leq U_n \leq 3$
- من أجل $n = 0$ لدينا $U_0 = 1$ و $1 \leq 1 \leq 3$ ومنه $1 \leq U_0 \leq 3$ أي $P(0)$ محققة من أجل $n = 0$
- نفرض أن $P(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n أي $1 \leq U_n \leq 3$ محققة، ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي أن $1 \leq U_{n+1} \leq 3$ محققة

لدينا من الفرضية $1 \leq U_n \leq 3$

والدالة f متزايدة تماما على $[1,3]$ ومنه

$$f(1) \leq f(U_n) \leq f(3)$$

$$1 \leq \frac{5}{3} \leq U_{n+1} \leq 3$$

ومنه $1 \leq U_{n+1} \leq 3$

ومنه الخاصية $P(n+1)$ محققة

- إذن $1 \leq U_n \leq 3$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

II-1- ب – دراسة اتجاه تغير المتتالية (U_n):

ندرس إشارة الفرق $U_{n+1} - U_n$ على المجال $[1,3]$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{5U_n}{U_n + 2} - U_n$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{-{U_n}^2 + 3U_n}{U_n + 2}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{U_n(-U_n + 3)}{U_n + 2}$$

ومنه المقام $U_n + 2$ موجب لأن

$$1 \leq U_n \leq 3$$

$$0 < 3 \leq U_n + 2 \leq 5$$

و U_n أيضا موجبة لأنّ

$$0 < 1 \leq U_n \leq 3$$

و $-U_n + 3$ كذلك موجبة لأن

$$U_n \leq 3$$

$$0 \leq -U_n + 3$$

ومنه المتتالية (U_n) متزايدة تماما على $[1,3]$

استنتاج أن (U_n) متتالية متقاربة:

بما أن (U_n) متتالية متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 3 لأنّ $1 \leq U_n \leq 3$ فهي متقاربة نحو نهايتها l

II-1-أ- برهن بالتراجع من اجل عدد طبيعي n:

$$1 \le u_n \le 3$$

II-ب- أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ، ثمّ استنتج أنها متقاربة.

II-2- (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$v_n = 1 - \frac{3}{u_n}$$

II-2-أ-برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{5}$ ، يطلب حساب حدها الأول v_0 .

II-2-ب-أكتب بدلالة n عبارة v_n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

II-2-جـ-أحسب نهاية المتتالية (u_n) .

II-3-أكتب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n} .$$

الحل

I-1-أ - حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{5x}{x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5x}{x} = 5$$

ومنه $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 5}$

I-1-ب – دراسة اتجاه تغير الدالة f على $[0,+\infty[$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $[0,+\infty[$ ودالتها المشتقة هي

$$f'(x) = \frac{5(x+2) - 1(5x)}{(x+2)^2} = \frac{5x + 10 - 5x}{(x+2)^2}$$

لدينا $f'(x) = \frac{10}{(x+2)^2} > 0$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على $[0,+\infty[$

جدول تغيرات الدالة f على $[0,+\infty[$

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	0 ↗ 5

I-2- التبيان أن من أجل كل x ينتمي $[0,+\infty[$ فإن $f(x) \ge 0$

من جدول التغيرات نجد أن $f(x) \ge 0$

والدالة f متزايدة تماما على $[0,+\infty[$

II-1- أ - البرهان بالتراجع أن $1 \le U_n \le 3$ من أجل كل عدد طبيعي n:

- نسمي $P(n)$ الخاصية $1 \le U_n \le 3$
- من أجل $n = 0$ لدينا $U_0 = 1$ و $1 \le 1 \le 3$ ومنه $1 \le U_0 \le 3$

أي $P(0)$ محققة من أجل $n = 0$

- نفرض أن $P(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n أي $1 \le U_n \le 3$ محققة، ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي أن $1 \le U_{n+1} \le 3$ محققة

لدينا من الفرضية $1 \le U_n \le 3$

والدالة f متزايدة تماما على $[1,3]$ ومنه

$$f(1) \le f(U_n) \le f(3)$$

$$1 \le \frac{5}{3} \le U_{n+1} \le 3$$

ومنه $1 \le U_{n+1} \le 3$

ومنه الخاصية $P(n+1)$ محققة

- إذن $1 \le U_n \le 3$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

II-1- ب – دراسة اتجاه تغير المتتالية (U_n):

ندرس إشارة الفرق $U_{n+1} - U_n$ على المجال $[1,3]$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{5U_n}{U_n+2} - U_n$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{-U_n{}^2 + 3U_n}{U_n+2}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{U_n(-U_n+3)}{U_n+2}$$

ومنه المقام $U_n + 2$ موجب لأن

$$1 \le U_n \le 3$$

$$0 < 3 \le U_n + 2 \le 5$$

و U_n أيضا موجبة لأن

$$0 < 1 \le U_n \le 3$$

و $-U_n + 3$ كذلك موجبة لأن

$$U_n \le 3$$

$$0 \le -U_n + 3$$

ومنه المتتالية (U_n) متزايدة تماما على $[1,3]$

استنتاج أن (U_n) متتالية متقاربة:

بما أن (U_n) متتالية متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 3 لأنّ $1 \le U_n \le 3$ فهي متقاربة نحو نهايتها l

II-2-أ- البرهان أن (V_n) متتالية هندسية:

تكون (V_n) متتالية هندسية إذا كان $V_{n+1} = V_n \times q$

لدينا $V_n = 1 - \frac{3}{U_n}$ ومنه

$$V_{n+1} = 1 - \frac{3}{U_{n+1}}$$

$$V_{n+1} = 1 - \frac{3}{\frac{5U_n}{U_n+2}}$$

$$V_{n+1} = 1 - \frac{3(U_n+2)}{5U_n}$$

$$V_{n+1} = \frac{5U_n - 3U_n - 6}{5U_n}$$

$$V_{n+1} = \frac{2U_n - 6}{5U_n}$$

$$V_{n+1} = \frac{2}{5}\,\frac{U_n - 3}{U_n}$$

$$V_{n+1} = \frac{2}{5}\left(1 - \frac{3}{U_n}\right)$$

$$\boxed{V_{n+1} = \frac{2}{5} V_n}$$

ومنه (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{5}$

حساب V_0:

لدينا $V_n = 1 - \frac{3}{U_n}$

$$V_0 = 1 - \frac{3}{U_0} = 1 - \frac{3}{1}$$

ومنه $\boxed{V_0 = -2}$

II-2-ب- عبارة V_n بدلالة n:

نعلم أن (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{5}$

وحدها الأول $V_0 = -2$

لدينا: $V_n = V_0 \times q^n$

ومنه $\boxed{V_n = -2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n}$

استنتاج عبارة (U_n) بدلالة n:

لدينا $V_n = 1 - \frac{3}{U_n}$

$$\frac{3}{U_n} = 1 - V_n$$

$$\frac{3}{U_n} = \frac{1 - V_n}{1}$$

$$3 = U_n(1 - V_n)$$

$$U_n = \frac{3}{1 - V_n}$$

ومنه $\boxed{U_n = \frac{3}{1+2\times\left(\frac{2}{5}\right)^n}}$

II-2- جـ - حساب $\lim_{n\to+\infty} U_n$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{3}{1+2\times\left(\frac{2}{5}\right)^n}\right]$$

ولدينا $-1 < \frac{2}{5} < 1$ إذن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$ ومنه

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{3}{1+0} = 3}$$

II-3- كتابة S_n بدلالة n:

لدينا $U_n = \frac{3}{1-V_n}$

أي $U_0 = \frac{3}{1-V_0}$

ونفس الامر يتكرر مع الحدود الاخرى

أي

$$S_n = \frac{1}{\frac{3}{1-V_0}} + \frac{1}{\frac{3}{1-V_1}} + \frac{1}{\frac{3}{1-V_2}} + \cdots + \frac{1}{\frac{3}{1-V_n}}$$

$$S_n = \frac{1-V_0}{3} + \frac{1-V_1}{3} + \frac{1-V_2}{3} + \cdots + \frac{1-V_n}{3}$$

$$S_n = \frac{1-V_0+1-V_1+1-V_2+\cdots+1-V_n}{3}$$

نلاحظ أن العدد 1 تكرر $n-0+1$ (عدد حدود متتالية):

$$S_n = \frac{1(n+1) - (V_0+V_1+V_2+\cdots+V_n)}{3}$$

نلاحظ أن $(V_0+V_1+V_2+\cdots+V_n)$ هي مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية، ومنه نجد

$$S_n = \frac{(n+1) - \left(\frac{-2\left(\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}-1\right)}{\frac{2}{5}-1}\right)}{3}$$

$$S_n = \frac{1}{3}\left[(n+1) + 2\,\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}-1}{\frac{-3}{5}}\right]$$

ومنه $\boxed{S_n = \frac{1}{3}\left[(n+1) - \frac{10}{3}\left(\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} - 1\right)\right]}$

20. بكالوريا 2015 علوم تجريبية

الموضوع الأول - التمرين الثالث

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = e^2 - 1$
ومن أجل كل عدد طبيعي n:
$u_{n+1} = (1 + u_n)e^{-2} - 1$.

1- أحسب u_1، u_2 و u_3 .

2- أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n:
$1 + u_n > 0$

3-بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة. هل هي متقاربة؟ علّل.

4-نضع أنه من اجل كل عدد طبيعي n:
$v_n = 3(1 + u_n)$

4-أ- أثبت أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأوّل.

4-ب- أكتب v_n و u_n بدلالة n، ثمّ أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

4-جـ- بيّن أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$:
$\ln v_0 + \ln v_1 + \ldots + \ln v_n = (n+1)(-n + 2 + \ln 3)$

الحل

1-حساب U_1 ، U_2 و U_3

حساب U_1

لدينا $U_{n+1} = (1 + U_n)e^{-2} - 1$
$U_{0+1} = (1 + U_0)e^{-2} - 1$
ولدينا $U_0 = e^2 - 1$ بتعويضه نجد
$U_1 = (1 + e^2 - 1)e^{-2} - 1$
$U_1 = e^2 e^{-2} - 1 = e^{2-2} - 1 = e^0 - 1$
ومنه $\boxed{U_1 = 0}$

حساب U_2

$U_{1+1} = (1 + U_1)e^{-2} - 1$
$U_2 = (1 + U_1)e^{-2} - 1$
ولدينا $U_1 = 0$ بتعويضه نجد
$U_2 = (1 + 0)e^{-2} - 1$
$\boxed{U_2 = e^{-2} - 1}$

حساب U_3

$U_{2+1} = (1 + U_2)e^{-2} - 1$
$U_3 = (1 + U_2)e^{-2} - 1$
ولدينا $U_2 = e^{-2} - 1$ بتعويضه نجد
$U_3 = (1 + e^{-2} - 1)e^{-2} - 1$
$U_3 = e^{-2}e^{-2} - 1 = e^{-2-2} - 1 = e^{-4} - 1$
ومنه $\boxed{U_3 = e^{-4} - 1}$

2-اثبات أن: $1 + U_n > 0$

للبرهان ان $1 + U_n > 0$ نستعمل البرهان بالتراجع
- نسمي $P(n)$ الخاصية $1 + U_n > 0$
من اجل $n = 0$ لدينا $U_0 = e^2 - 1$
و $1 + e^2 - 1 > 0$
ومنه $1 + U_0 > 0$
أي $P(0)$ محققة من أجل $n = 0$
- نفرض أن $P(n)$ محققة من أجل كل n
أي $1 + U_n > 0$ محققة، ونبرهن صحة $P(n+1)$
أي $1 + U_{n+1} > 0$:
لدينا : $1 + U_{n+1} = 1 + (1 + U_n)e^{-2} - 1$
$= (1 + U_n)e^{-2}$
وبما أن $e^{-2} > 0$ و $1 + U_n > 0$ وهذا من الفرضية ومنه $1 + U_{n+1} > 0$
ومنه الخاصية $P(n+1)$ محققة
- إذن $1 + U_n > 0$ من اجل عدد طبيعي n

3-البرهان أن (U_n) متتالية متناقصة:

ندرس إشارة الفرق $U_{n+1} - U_n$
$U_{n+1} - U_n = (1 + U_n)e^{-2} - 1 - U_n$
$= e^{-2} + U_n e^{-2} - 1 - U_n$
$U_{n+1} - U_n = U_n(e^{-2} - 1) + e^{-2} - 1$
نستخرج $e^{-2} - 1$ كعامل مشترك يصبح
$U_{n+1} - U_n = (e^{-2} - 1)(U_n + 1)$
لكن لدينا من الجواب السابق أن $1 + U_n > 0$ قيمة موجبة، و $e^{-2} - 1 < 0$ لأنّ العدد e^{-2} أصغر من 1
ومنه المتتالية (U_n) متناقصة على $\mathbb{N}$

معرفة هل (U_n) متتالية متقاربة:

بما أن (U_n) متتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد (-1) لأن $1 + U_n > 0$ فهي متقاربة نحو نهاية l

4-أ - البرهان أن (V_n) متتالية هندسية:

تكون (V_n) متتالية هندسية إذا كان $V_{n+1} = V_n \times q$
$V_n = 3(1 + U_n)$
$V_{n+1} = 3(1 + U_{n+1})$
نعوض $U_{n+1} = (1 + U_n)e^{-2} - 1$ نجد
$V_{n+1} = 3(1 + (1 + U_n)e^{-2} - 1)$
$= 3(1 + U_n)e^{-2}$
إذن $\boxed{V_{n+1} = V_n e^{-2}}$
ومنه (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = e^{-2}$

حساب V_0:

$V_n = 3(1 + U_n)$
$V_0 = 3(1 + U_0) = 3(1 + e^2 - 1)$
ومنه $\boxed{V_0 = 3e^2}$

ب-التعبير عن V_n و U_n بدلالة n :

التعبير عن V_n بدلالة n :

لدينا:

$$V_n = V_p \times q^{n-p}$$

مع $n \geq p$

$$V_n = V_0 \times q^{n-0}$$

$$V_n = 3e^2 \times (e^{-2})^n = 3e^2 \times e^{-2n}$$

ومنه $\boxed{V_n = 3e^{-2n+2}}$

التعبير عن U_n بدلالة n :

لدينا

$$V_n = 3(1 + U_n)$$

$$\frac{V_n}{3} = 1 + U_n$$

$$U_n = \frac{V_n}{3} - 1$$

لدينا $V_n = 3e^{-2n+2}$ نعوضها نجد

$$U_n = \frac{3e^{-2n+2}}{3} - 1$$

إذن

$$\boxed{U_n = e^{-2n+2} - 1}$$

حساب: $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} (e^{-2n+2} - 1)$$
$$= \lim_{n\to+\infty} (e^{-2n}\, e^2 - 1)$$

ونعلم أن $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{e^n}\right) = 0$ ومنه

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n = -1}$$

4-جـ – البرهان أن

$$\ln(V_0) + \ln(V_1) + \cdots + \ln(V_n) = (n+1)(-n+2+\ln(3))$$

لدينا من عبارة الحد العام أن

$$V_n = 3e^{-2n+2} > 0$$

نقوم بإدخال الدالة ln على الطرفين

$$\ln(V_n) = \ln(3e^{-2n+2})$$
$$= \ln(3) + \ln(e^{-2n+2})$$
$$\ln(V_n) = \ln(3) - 2n + 2$$

ومنه

$$\ln(V_0) = \ln(3) - 2(0) + 2$$
$$\ln(V_1) = \ln(3) - 2(1) + 2$$
$$\ln(V_2) = \ln(3) - 2(2) + 2$$

... ...

... ...

$$\ln(V_n) = \ln(3) - 2n + 2$$

نقوم بالجمع طرفا لطرف عموديا فنتحصل على:

$$\ln(V_0) + \ln(V_1) + \cdots + \ln(V_n) =$$
$$[\ln(3) - 2(0) + 2] + [\ln(3) - 2(1) + 2] + \cdots + [\ln(3) - 2n + 2]$$

نلاحظ أن العدد $\ln(3)$ تكرر $n - 0 + 1 = n + 1$ مرة (عدد حدود متتالية) ونكتب:

$$\ln(V_0) + \ln(V_1) + \cdots + \ln(V_n) =$$
$$(n+1)\ln(3) + [(-2(0)+2) + (-2(1)+2) + \cdots + (-2n+2)]$$

ونلاحظ أن $W_n = -2n + 2$ هي متتالية حسابية أساسها $r = -2$ وحدها الأول هو $W_0 = 2$

إذا العبارة

$$[(-2(0)+2) + (-2(1)+2) + \cdots + (-2n+2)]$$

هي مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية يصبح:

$$\ln(V_0) + \ln(V_1) + \cdots + \ln(V_n) =$$
$$(n+1)\ln(3) + \frac{n+1}{2}[2 + 2 - 2n]$$

$$\ln(V_0) + \ln(V_1) + \cdots + \ln(V_n) =$$
$$(n+1)\ln(3) + \frac{n+1}{2}[4 - 2n]$$

نستخرج 2 كعامل مشترك نجد:

$$\ln(V_0) + \ln(V_1) + \cdots + \ln(V_n) =$$
$$(n+1)\ln(3) + (n+1)[2 - n]$$

نستخرج $(n+1)$ عامل مشترك نجد:

$$\ln(V_0) + \ln(V_1) + \cdots + \ln(V_n) =$$
$$(n+1)\,(\ln(3) + 2 - n)$$

ومنه

$$\ln(V_0) + \ln(V_1) + \cdots + \ln(V_n) =$$
$$(n+1)\,(-n + 2 + \ln(3))$$

21. بكالوريا 2015 علوم تجريبية

الموضوع الثاني التمرين الثالث

المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

I- f الدالة المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ:

$$f(x) = \frac{4x+1}{x+1}$$

و (C_f) تمثيلها البياني.

I-1-عيّن اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0;+\infty[$.

I-2-أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (D) ذي المعادلة $y = x$.

I-3-مثّل (C_f) و (D) على المجال $[0;6]$.

II-نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرّفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \text{ و } \begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$$

II-1-أ- أنشئ على حامل محور الفواصل الحدود: u_0، u_1، u_2 و u_3؛ v_0، v_1، v_2 و v_3 دون حسابها.

II-1-ب- خمّن اتجاه تغير وتقارب كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

II-2-أ-أثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$:

$2 \le u_n < \alpha$ و $\alpha < v_n \le 5$ حيث

$$\alpha = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$$

II-2-ب- استنتج اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n).

II-3-أ- أثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$:

$$v_{n+1} - u_{n+1} \le \frac{1}{3}(v_n - u_n)$$

II-3-ب- بيّن أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$:

$$0 < v_n - u_n \le \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

II-3-جـ- استنتج ان: $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$ ؛ ثمّ حدّد نهاية كل من (u_n) و (v_n) .

الحل

I-1- تعيين اتجاه تغير الدالة f على $[0,+\infty[$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $[0,+\infty[$ ودالتها المشتقة هي

$$f'(x) = \frac{4(x+1)-1(4x+1)}{(x+1)^2} = \frac{4x+4-4x-1}{(x+1)^2}$$

ومنه

$$\boxed{f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}}$$

بما أن $\frac{3}{(x+1)^2} > 0$ مهما يكن $x \in [0,+\infty[$ فالدالة f متزايدة تماما على المجال $[0,+\infty[$

I-2- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D):

ندرس إشارة الفرق بين $f(x) - y$ على المجال $[0,+\infty[$

$$f(x) - y = \frac{4x+1}{x+1} - x$$

$$f(x) - y = \frac{4x+1-x(x+1)}{x+1}$$

$$f(x) - y = \frac{-x^2+3x+1}{x+1}$$

إشارة المقام $x+1 > 0$ على المجال $[0,+\infty[$

يكفي دراسة إشارة البسط $-x^2+3x+1$

$$-x^2+3x+1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4(-1)(1) = 13$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{13}$$

ومنه:

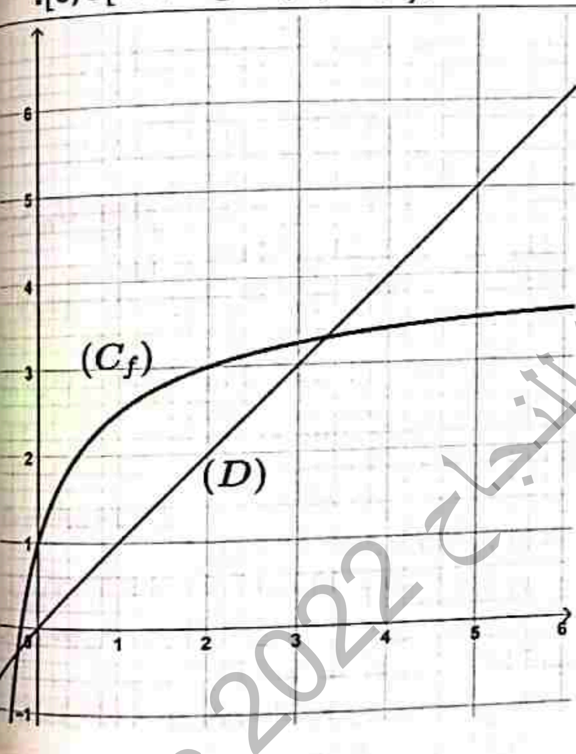
$$x_1 = \frac{3+\sqrt{13}}{2} = \alpha$$

$x_2 = \frac{-3+\sqrt{13}}{-2}$ مرفوض لأن : $x \ge 0$

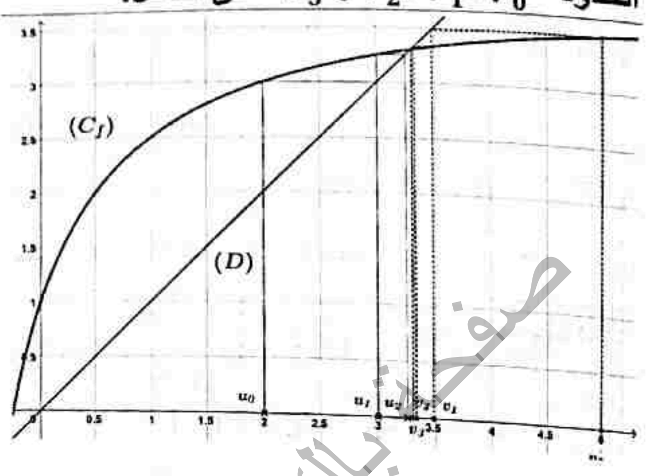
جدول الإشارة على المجال $[0,+\infty[$ يكون بالشكل:

x	0		α		$+\infty$
$x+1$		$+$		$+$	
$-x^2+3x+1$		$+$	0	$-$	
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	
وضعية (C_f) بالنسبة الى (D)		(C_f) فوق (D)	(C_f) يقطع (D)	(C_f) تحت (D)	

I-3-تمثيل (C_f) و (D) على المجال $[0,6[$:



II-1-أ - تمثيل الحدود U_0، U_1، U_2 و U_3 ثم الحدود V_0، V_1، V_2 و V_3 على الشكل:



II-1- ب - وضع تخمين حول اتجاه تغير المتتاليتين (U_n) و (V_n) وتقاربهما:

نلاحظ أن $U_0 < U_1 < U_2 < U_3$

أي (U_n) متتالية متزايدة وتتقارب نحو فاصلة نقطة تقاطع (C_f) و(D)

ونلاحظ أن

$$V_0 > V_1 > V_2 > V_3$$

أي (V_n) متتالية متناقصة وتتقارب نحو فاصلة نقطة تقاطع (C_f) و(D)

II-2-أ – إثبات أن من أجل $n \in N$ يكون $2 \le U_n < \alpha$:

نستعمل البرهان بالتراجع

- نسمي $P(n)$ الخاصية $2 \le U_n < \alpha$

- من اجل $n = 0$ لدينا $U_0 = 2$ و $2 \le 2 < \alpha$

ومنه $2 \le U_0 < \alpha$

أي $P(0)$ محققة من أجل $n = 0$

- نفرض أن $P(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n أي $2 \le U_n < \alpha$ محققة، ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $2 \le U_{n+1} < \alpha$ محققة:

لدينا من الفرضية $2 \le U_n < \alpha$ والدالة المرفقة f متزايدة على $[2,\alpha[$ فإن

$$f(2) \le f(U_n) < f(\alpha) \le 5$$

ولدينا من نتائج السؤال $(I\text{-}2\text{-})$ أن α هو حل للمعادلة $f(x) - x = 0$

ومنه $f(\alpha) - \alpha = 0$

$$f(\alpha) = \alpha$$

و $f(2) = \frac{8+1}{2+1} = \frac{9}{3} = 3$

$$2 \le 3 \le U_{n+1} < f(\alpha) = \alpha$$

ومنه $2 \le U_{n+1} < \alpha$

ومنه الخاصية $P(n+1)$ محققة

- إذن $2 \le U_n < \alpha$ من أجل كل n عدد طبيعي

إثبات أن من أجل $n \in N$ يكون $\alpha < V_n \le 5$:

نستعمل البرهان بالتراجع

- نسمي $P(n)$ الخاصية $\alpha < V_n \le 5$

- من اجل $n = 0$ لدينا $U_0 = 5$ و $\alpha < 5 \le 5$

ومنه $\alpha < V_0 \le 5$

أي $P(0)$ محققة من أجل كل $n = 0$

- نفرض أن $P(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n أي $\alpha < V_n \le 5$ محققة، ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $\alpha < V_{n+1} \le 5$ محققة:

لدينا من الفرضية $\alpha < V_n \le 5$ والدالة المرفقة f متزايدة تماما على $]\alpha, 5]$ فإن

$$\alpha = f(\alpha) < f(V_n) \le f(5)$$

$$\alpha < V_{n+1} \le 3{,}5$$

ومنه $\alpha < V_{n+1} \le 5$

ومنه الخاصية $P(n+1)$ محققة

- إذن من أجل عدد طبيعي n : $\alpha < V_n \le 5$

II-2-ب استنتاج اتجاه تغير المتتاليتين (U_n)و(V_n)

لدراسة اتجاه تغير (U_n) ندرس إشارة الفرق $U_{n+1} - U_n$ على $[2,\alpha[$

$$U_{n+1} - U_n = f(U_n) - U_n$$

بما أن U_n يشبه x للدالة المرفقة فإنه يمكننا استغلال جدول الوضعية من جواب سابق، نجد أن على ℕفإن:

$$f(x) - x > 0$$

أي $f(U_n) - U_n > 0$

ومنه $U_{n+1} - U_n > 0$

أي المتتالية (U_n) متزايدة تماما على ℕ من أجل كل عدد طبيعي n

لدراسة اتجاه تغير (V_n) ندرس إشارة الفرق $V_{n+1} - V_n$ على $]\alpha, 5]$

$$V_{n+1} - V_n = f(V_n) - V_n$$

بما أن V_n يشبه x للدالة المرفقة فإنه يمكننا استغلال جدول الوضعية من جواب سابق، نجد أن على ℕ فإن:

$$f(x) - x < 0$$

أي $f(V_n) - V_n < 0$

ومنه $V_{n+1} - V_n < 0$

أي المتتالية (V_n) متناقصة تماما على ℕ من أجل كل n عدد طبيعي

II-3-أ – اثبات أنه من أجل كل $n \in N$ فإن $V_{n+1} - U_{n+1} \le \frac{1}{3}(V_n - U_n)$

لدينا $V_{n+1} - U_{n+1} = f(V_n) - f(U_n)$

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{4V_n + 1}{V_n + 1} - \frac{4U_n + 1}{U_n + 1}$$

$$= \frac{(4V_n + 1)(U_n + 1) - (V_n + 1)(4U_n + 1)}{(V_n + 1)(U_n + 1)}$$

$$V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{4(V_n - U_n) + U_n - V_n}{(V_n + 1)(U_n + 1)}$$

نستخرج الإشارة (-) كعامل مشترك من $(U_n - V_n)$ يصبح

$$V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{4(V_n - U_n) - (V_n - U_n)}{(V_n + 1)(U_n + 1)}$$

نستخرج $(V_n - U_n)$ كعامل مشترك نجد

$$V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{(V_n - U_n)(4 - 1)}{(V_n + 1)(U_n + 1)}$$

$$V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{3(V_n - U_n)}{(V_n + 1)(U_n + 1)}$$

ولدينا من البرهان بالتراجع سابقا أن:

أي $U_n + 1 \geq 2 + 1$

ومنه $U_n + 1 \geq 3$

ولدينا $V_n \geq 2$ لأنّ بالحصر

$$5 \geq V_n \geq \alpha > U_n \geq 2$$

$V_n \geq 2$ أي $V_n + 1 \geq 2 + 1$

ومنه $V_n + 1 \geq 3$

وبالضرب طرف لطرف نجد

$$(V_n + 1)(U_n + 1) \geq 9$$

نضع المقلوب للطرفين نجد $\frac{1}{(V_n+1)(U_n+1)} \leq \frac{1}{9}$

نضرب في العدد 3 $\frac{3}{(V_n+1)(U_n+1)} \leq \frac{1}{3}$

نقوم بضرب الطرفين في $(V_n - U_n)$ نجد

$$\frac{3(V_n - U_n)}{(V_n + 1)(U_n + 1)} \leq \frac{1}{3}(V_n - U_n)$$

ومنه $V_{n+1} - U_{n+1} \leq \frac{1}{3}(V_n - U_n)$

II-3-ب – اثبات أنه من أجل كل $n \in N$ فإن $0 < V_n - U_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

الطريقة (1): نستعمل البرهان بالتراجع

- نسمي $P(n)$ الخاصية $0 < V_n - U_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$
- من اجل $n = 0$ لدينا $U_0 = 2$ و $V_0 = 5$

و $0 < 5 - 2 = 3 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$

ومنه $0 < V_0 - U_0 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{0-1}$ أي $P(O)$ محققة من أجل $n = 0$

- نفرض أن $P(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n كيفي

أي $0 < V_n - U_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ محققة، ونبرهن صحة $P(n+1)$ من أجل $(n+1)$

أي $0 < V_{n+1} - U_{n+1} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n}$ محققة:

لدينا من الفرضية

$$0 < V_n - U_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

نضرب كل المتباينة في $\frac{1}{3}$ نجد

$$0 < \frac{1}{3}(V_n - U_n) \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$0 < \frac{1}{3}(V_n - U_n) \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

لكن لدينا العلاقة $V_{n+1} - U_{n+1} \leq \frac{1}{3}(V_n - U_n)$

ومنه $0 < V_{n+1} - U_{n+1} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n}$

ومنه الخاصية $P(n+1)$ محققة من أجل $n+1$

- إذن من أجل كل عدد طبيعي n فإن:

$$0 < V_n - U_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

الطريقة (2):

لدينا $0 < V_{n+1} - U_{n+1} \leq \frac{1}{3}(V_n - U_n)$

نقوم بإنقاص درجة (1-) من دلائل المتتاليتين نجد

$$0 < V_n - U_n \leq \frac{1}{3}(V_{n-1} - U_{n-1})$$

$$0 < V_{n-1} - U_{n-1} \leq \frac{1}{3}(V_{n-2} - U_{n-2})$$

$$0 < V_{n-2} - U_{n-2} \leq \frac{1}{3}(V_{n-3} - U_{n-3})$$

$$\vdots$$

$$0 < V_1 - U_1 \leq \frac{1}{3}(V_0 - U_0)$$

نضرب المتباينات طرف لطرف تذهب كل الأطرا المتشابهة بقاعدة الاختزال ويتبقى

$$0 < V_n - U_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\dots\left(\frac{1}{3}\right)(V_0 - U_0)$$

العدد $\left(\frac{1}{3}\right)$ تكررت $n - 1 + 1 = n$ (عدد حدود متتالية)

$$0 < V_n - U_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n}(V_0 - U_0)$$

لدينا $U_0 = 2$ و $V_0 = 5$ يصبح

$$0 < V_n - U_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n}(5 - 2)$$

$$0 < V_n - U_n \le \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad (3)$$

والعدد 3 يمكن كتابته بالشكل $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$ يصبح

$$0 < V_n - U_n \le \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$$

ومنه

$$0 < V_n - U_n \le \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

II-3-جـ- استنتاج أن $\lim_{n\to+\infty}(V_n - U_n) = 0$

لدينا

$$0 < V_n - U_n \le \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

ولدينا $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 0$ لأن: $-1 < \frac{1}{3} < 1$

ومنه باستعمال مبرهنة النهاية بالمقارنة أو بالحصر

فإن $\lim_{n\to+\infty}(V_n - U_n) = 0$

تحديد نهاية كل من (U_n) و (V_n):

لدينا $\lim_{n\to+\infty}(V_n - U_n) = 0$

أي $\lim_{n\to+\infty}(V_n) = \lim_{n\to+\infty}(U_n) = l$

لكن (U_n) و (V_n) كلاهما متقاربتان معناه

$$\lim_{n\to+\infty} U_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} U_n = l$$

يصبح لدينا

$$f(l) = \frac{4l+1}{l+1} = l$$

$$4l + 1 = l^2 + l$$

$$-l^2 + 3l + 1 = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{13}$$

$$l_1 = \frac{-3-\sqrt{13}}{-2} = \frac{3+\sqrt{13}}{2} = \alpha$$

$$l_2 = \frac{-3+\sqrt{13}}{-2}$$

لا تنتمي إلى $]2, \alpha[$ ولا إلى $]\alpha, 5]$

ومنه

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty} U_n = \alpha = \frac{3+\sqrt{13}}{2}}$$

22. بكالوريا 2014 علوم تجريبية

الموضوع الأول - التمرين الأول

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرّفة كما يلي $u_0 = 1$ ومن اجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{4}{3}$$

و (v_n) المتتالية العددية المعرّفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n = u_n + 4$.

1- بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

2- اكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n.

3- ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$.

4- احسب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

5- لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $w_n = 5\left(\frac{1}{v_n+5} - 1\right)$

5-أ- بيّن أنّ المتتالية (w_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

5-ب- احسب $\lim_{n\to+\infty}(u_n - w_n)$.

الحل

1-البرهان أن (V_n) متتالية هندسية:

تكون (V_n) متتالية هندسية إذا كان $V_{n+1} = V_n \times q$

لدينا $V_n = U_n + 4$

$$V_{n+1} = U_{n+1} + 4$$

$$V_{n+1} = \frac{2}{3}U_n - \frac{4}{3} + 4 = \frac{2}{3}U_n + \frac{8}{3}$$

نستخرج $\frac{2}{3}$ كعامل مشترك نجد

$$V_{n+1} = \frac{2}{3}(U_n + 4) = \frac{2}{3}V_n$$

إذن $\boxed{V_{n+1} = \frac{2}{3}V_n}$

ومنه (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$

حساب V_0:

$$V_n = U_n + 4$$

$$V_0 = U_0 + 4 = 1 + 4 = 5$$

$$\boxed{V_0 = 5}$$

2-كتابة V_n و U_n بدلالة n :

كتابة V_n بدلالة n: مع $n \ge P$

لدينا: $V_n = V_p \times q^{n-p}$

$$V_n = V_0 \times q^n$$

ومنه $\boxed{V_n = 5\times\left(\frac{2}{3}\right)^n}$

كتابة U_n بدلالة n:

لدينا

$$V_n = U_n + 4$$

$$U_n = V_n - 4$$

ومنه $\boxed{U_n = 5\times\left(\frac{2}{3}\right)^n - 4}$

3-دراسة اتجاه تغير المتتالية (U_n) على N:

ندرس إشارة الفرق $U_{n+1}-U_n$

$$U_{n+1}-U_n = 5\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 4 - \left[5\times\left(\frac{2}{3}\right)^n - 4\right]$$

$$U_{n+1}-U_n = 5\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 4 - 5\times\left(\frac{2}{3}\right)^n + 4$$

نستخرج $5\left(\frac{2}{3}\right)^n$ كعامل مشترك نجد

$$U_{n+1}-U_n = 5\left(\frac{2}{3}\right)^n\left[\left(\frac{2}{3}\right)-1\right] = 5\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(-\frac{1}{3}\right)$$

ومنه $-\frac{1}{3}<0$ و $5\left(\frac{2}{3}\right)^n>0$ أي

المتتالية (U_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

4-حساب S_n

لدينا $U_n = V_n - 4$

ومنه من أجل قيم n نجد

$$U_0 = V_0 - 4$$

$$U_1 = V_1 - 4$$

.

.

$$U_n = V_n - 4$$

نقوم بعملية الجمع طرفا لطرف عموديا نجد

$$S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n - 4 - 4 - 4 \ldots - 4$$

نلاحظ أن العدد -4 تكرر $n-0+1 = n+1$ (عدد حدود المتتالية) يصبح

$$S_n = [V_0 + V_1 + \cdots + V_n] - 4(n+1)$$

ونلاحظ أن $[V_0 + V_1 + \cdots + V_n]$ هي مجموع حدود متتابعة للمتتالية الهندسية (V_n):

$$S_n = 5\left[\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}-1}{\frac{2}{3}-1}\right] - 4(n+1)$$

ومنه $\boxed{S_n = -15\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 1\right] - 4(n+1)}$

5-أ - البرهان أن (W_n) متتالية متزايدة على $\mathbb{N}$:

ندرس إشارة الفرق $W_{n+1}-W_n$

$$W_{n+1}-W_n = 5\left(\frac{1}{V_{n+1}+5}-1\right) - 5\left(\frac{1}{V_n+5}-1\right)$$

$$W_{n+1}-W_n = \frac{5}{V_{n+1}+5} - 5 - \frac{5}{V_n+5} + 5$$

$$W_{n+1}-W_n = \frac{5}{V_{n+1}+5} - \frac{5}{V_n+5}$$

$$W_{n+1}-W_n = \frac{5}{5\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+5} - \frac{5}{5\times\left(\frac{2}{3}\right)^n+5}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1} - \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}$$

$$W_{n+1}-W_n = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1} - \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}$$

لدينا $\frac{2}{3}<1$ ....(1)

و $\left(\frac{2}{3}\right)^n>0$ ومنه بضرب $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ في متراجحة (1

نجد:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(\frac{2}{3}\right) < \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} < \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1 < \left(\frac{2}{3}\right)^n+1$$

$$\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1} > \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}$$

$$\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1} > \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}$$

ومنه

$$W_{n+1}-W_n>0$$

أي أن المتتالية (W_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

5-ب -حساب: $\lim_{n\to+\infty}(U_n - W_n)$

$$\lim_{n\to+\infty}(U_n - W_n) = \lim_{n\to+\infty}\left[5\times\left(\frac{2}{3}\right)^n - 4 - 5\left(\frac{1}{5\times\left(\frac{2}{3}\right)^n + 5} - 1\right)\right]$$

ونهاية $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ لأن $-1 < \frac{2}{3} < 1$

$$\lim_{n\to+\infty}(U_n - W_n) = (-4 - 1 + 5) = 0$$

ومنه $\boxed{\lim_{n\to+\infty}(U_n - W_n) = 0}$

23. بكالوريا 2014 علوم تجريبية

الموضوع الثاني - التمرين الأول

I-نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية ℕ بحدها العام:

$$u_n = e^{\frac{1}{2}-n}$$

(e هو أساس اللوغاريتم النيبيري)

I-1-بيّن أنّ (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

I-2-أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$ ،ماذا تستنتج؟

I-3-أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث:
$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

II-نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = \ln(u_n)$

(ln يرمز الى اللوغاريتم النيبيري).

II-1-عبّر عن v_n بدلالة n ثم استنتج نوع المتتالية (v_n).

II-2-أ- أحسب بدلالة n العدد P_n حيث:
$p_n = \ln(u_0 \times u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n)$.

II-2-ب- عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث:

$$P_n + 4n > 0$$

الحل

I-1-البرهان أن (U_n) متتالية هندسية:

تكون (U_n) متتالية هندسية إذا كان $U_{n+1} = U_n \times q$

لدينا $U_n = e^{\frac{1}{2}-n}$

$$U_{n+1} = e^{\frac{1}{2}-(n+1)} = e^{\frac{1}{2}-n-1} = e^{\frac{1}{2}-n}e^{-1}$$

ومنه $\boxed{U_{n+1} = U_n\, e^{-1}}$

ومنه (U_n) متتالية هندسية أساسها $q = e^{-1} = \frac{1}{e}$

حساب U_0:

$$U_0 = e^{\frac{1}{2}-0} = \sqrt{e}$$

ومنه $\boxed{U_0 = \sqrt{e}}$

I-2- حساب: $\lim_{n\to+\infty}(U_n)$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty}\left(e^{\frac{1}{2}-n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(e^{\frac{1}{2}}\, e^{-n}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{e}\,\frac{1}{e^n}\right) = 0$$

ومنه $\boxed{\lim_{n\to+\infty}(U_n) = 0}$

نستنتج أن المتتالية (U_n) متقاربة نحو 0

I-3-حساب S_n بدلالة n

بما أن S_n هي مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية اذا

$$S_n = U_0\,\frac{q^{n-0+1} - 1}{q - 1}$$

$$S_n = \sqrt{e}\,\frac{\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1} - 1}{\left(\frac{1}{e}\right) - 1}$$

نستبدل $\frac{1}{e}$ بـ e^{-1}

$$S_n = \sqrt{e} \times \frac{(e^{-1})^{n+1} - 1}{\frac{1-e}{e}}$$

$$S_n = \sqrt{e} \times e \times \frac{(e)^{-(n+1)} - 1}{1 - e}$$

إذن $\boxed{S_n = \sqrt{e} \times e \times \frac{e^{-n-1} - 1}{1-e}}$

II-1- التعبير عن V_n بدلالة n :

لدينا $V_n = \ln(U_n)$

$$V_n = \ln\left(e^{\frac{1}{2}-n}\right)$$

من خواص اللوغاريتم أن $\ln(a^n) = n\ln(|a|)$

وأن $\ln(e) = 1$ يصبح

$$V_n = \frac{1}{2} - n\ln(e) = \frac{1}{2} - n$$

ومنه $\boxed{V_n = \frac{1}{2} - n}$

استنتاج نوع المتتالية (V_n):

$$V_{n+1} = V_n + r$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{2} - (n+1) = \frac{1}{2} - n - 1$$

إذن $\boxed{V_{n+1} = V_n - 1}$

ومنه (V_n) متتالية حسابية أساسها $r = -1$ وحدها الأول $V_0 = \frac{1}{2}$

II-2-أ – حساب بدلالة n العدد P_n حيث:

$$P_n = \ln(U_0 \times U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n)$$

من خواص اللوغاريتم أن

$$\ln(a \times b \times c) = \ln(|a|) + \ln(|b|) + \ln(|c|)$$

$$P_n = \ln(U_0) + \ln(U_1) + \ln(U_2) + \dots + \ln(U_n)$$

بما ان $V_n = \ln(U_n)$

فإن: $P_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$

إذا يصبح P_n مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية و هي (V_n):

$$P_n = \left(\frac{n-0+1}{2}\right)[V_0 + V_n]$$

$$P_n = \left(\frac{n+1}{2}\right)\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - n\right]$$

$$P_n = \left(\frac{n+1}{2}\right)[1-n]$$

$$P_n = \frac{(n+1)(1-n)}{2}$$

ومنه $\boxed{P_n = \frac{-n^2+1}{2}}$

II-2-ب-تعيين قيم العدد الطبيعي n حيث:

$$P_n + 4n > 0$$

لدينا

$$P_n + 4n > 0$$

$$\frac{-n^2+1}{2} + 4n > 0$$

$$\frac{-n^2+8n+1}{2} > 0$$

نضرب الطرفين في 2 نجد:

$$-n^2 + 8n + 1 > 0$$

نبحث عن جذور العبارة

$$-n^2 + 8n + 1$$

$$b^2 - 4ac = 64 - 4(-1)(1) = 64 + 4 = 68$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{68}$$

$$n_1 = \frac{8+\sqrt{68}}{2} \simeq 8{,}12$$

$$n_2 = \frac{-8+\sqrt{68}}{-2} \simeq -0{,}12$$

نضع جدول الإشارة (يكون خاصا بالأعداد الطبيعية فقط يعني $[0, +\infty[$):

n	0	n_1	$+\infty$
$-n^2+8n+1$	$+$	0	$-$

ومنه قيم العدد الطبيعي n حيث $P_n + 4n > 0$

$\boxed{n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}}$

24. بكالوريا 2013 علوم تجريبية

الموضوع الأول - التمرين الثاني

I-المتتالية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{5^{n+1}}{6^n}$

I-1-بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدّها الأول.

I-2-أحسب $\lim_{n\to+\infty} v_n$.

II- المتتالية (u_n) معرفة بـ: $u_0 = 1$ ، ومن اجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \sqrt{5u_n + 6}$

II-1-برهن بالتراجع أنّه، من اجل كل عدد طبيعي n، $1 \le u_n \le 6$.

II-2-أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

II-3-أ- برهن أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n، $6 - u_{n+1} \le \frac{5}{6}(6 - u_n)$

II-3-ب- بيّن أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n، $0 \le 6 - u_n \le v_n$ استنتج $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

الحل

I-1-البرهان أن (V_n) متتالية هندسية:

تكون (V_n) متتالية هندسية إذا كان $V_{n+1} = V_n \times q$

لدينا

$$V_n = \frac{5^{n+1}}{6^n}$$

$$V_{n+1} = \frac{5^{n+1+1}}{6^{n+1}} = \frac{5^{n+1} \times 5}{6^n \times 6}$$

$\boxed{V_{n+1} = V_n \times \frac{5}{6}}$

ومنه (V_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{5}{6}$

حساب V_0:

$$V_0=\frac{5^{0+1}}{6^0}=\frac{5}{1}$$

$$\boxed{V_0=5}$$

كتابة V_n بدلالة n : مع $n\geq p$

لدينا:

$$V_n=V_p\times q^{n-p}$$

ومنه

$$\boxed{V_n=5\times\left(\frac{5}{6}\right)^n}$$

I -2-حساب $\lim_{n\to+\infty}(V_n)$

$$\lim_{n\to+\infty}(V_n)=\lim_{n\to+\infty}\left(5\times\left(\frac{5}{6}\right)^n\right)$$

بما أن $-1<q<1$ فإن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n=0$ ومنه

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}V_n=0}$$

ومنه (V_n) متقاربة نحو 0

II -1-البرهان بالتراجع أن $1\leq U_n\leq 6$:

- نسمي $P(n)$ الخاصية $1\leq U_n\leq 6$
- من اجل $n=0$ لدينا $U_0=1$ و $1\leq 1\leq 6$

ومنه $1\leq U_0\leq 6$

أي $P(0)$ محققة من أجل $n=0$

- نفرض أن $P(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n أي $1\leq U_n\leq 6$ محققة، ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $1\leq U_{n+1}\leq 6$ محققة:

لدينا من الفرضية

$$1\leq U_n\leq 6$$

نضرب في 5 ثم نضيف 6 ثم نجذر نجد:

$$\sqrt{1\times 5+6}\leq\sqrt{5U_n+6}\leq\sqrt{6\times 5+6}$$

$$1\leq\sqrt{11}\leq U_{n+1}\leq\sqrt{36}$$

ومنه

$$1\leq U_{n+1}\leq 6$$

ومنه الخاصية $P(n+1)$ محققة

- إذن $1\leq U_n\leq 6$ من أجل كل عدد طبيعي n

II -2-دراسة اتجاه تغير المتتالية (U_n):

ندرس إشارة الفرق $U_{n+1}-U_n$

$$U_{n+1}-U_n=\sqrt{5U_n+6}-U_n$$

نستعمل المرافق:

$$U_{n+1}-U_n=\frac{\left(\sqrt{5U_n+6}-U_n\right)\left(\sqrt{5U_n+6}+U_n\right)}{\left(\sqrt{5U_n+6}+U_n\right)}$$

$$U_{n+1}-U_n=\frac{5U_n+6-{U_n}^2}{\left(\sqrt{5U_n+6}+U_n\right)}$$

ندرس إشارة المقام: $\left(\sqrt{5U_n+6}+U_n\right)$

لدينا من البرهان السابق أن

$$1\leq U_n\leq 6$$
$$1\leq U_{n+1}\leq 6$$

نقوم بالجمع عموديا نجد

$$0\leq 2\leq\sqrt{5U_n+6}+U_n\leq 12$$

ومنه $\left(\sqrt{5U_n+6}+U_n\right)$ موجب، بما أن المقام موجب فإشارة $U_{n+1}-U_n$ من إشارة البسط

ندرس إشارة البسط: $5U_n+6-{U_n}^2$

طريقة 1:

نضع $U_n=x$

$$-x^2+5x+6$$

$$\Delta=25-4(-1)(6)=49$$

$$\sqrt{\Delta}=7$$

$$x_1=\frac{-5-7}{-2}=6$$

$$x_2=\frac{-5+7}{-2}=-1$$

جدول الإشارة للبسط:

x	0	-1	1	6	$+\infty$
$-x^2+5x+6$	$-$	0	$+$	$+$ 0	$-$

من الجدول نجد أن $-x^2+5x+6\geq 0$ على المجال $[1,6]$

أي $u_{n+1}-u_n\geq 0$ ومنه (u_n) متزايدة تماما

طريقة 2:

إن وجد للمعادلة حلان فنقوم بتحليلها بالقاعدة التي تقول:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

إذا نكتب:

$$-{U_n}^2+5U_n+6=-(U_n-6)(U_n+1)$$

بما أن $1\leq U_n\leq 6$ فإن $U_n+1>0$

ومنه (U_n+1) موجبة

و $U_n\leq 6$ أي $U_n-6\leq 0$ أي $-(U_n-6)\geq 0$

ومنه $-(U_n-6)$ موجبة

ومنه

$$-{U_n}^2+5U_n+6=-(U_n-6)(U_n+1)>0$$

ومنه (U_n) متزايدة تماما

II -3-أ – البرهان ان من أجل كل n ∈ N:
$6-U_{n+1}\le\frac{5}{6}(6-U_n)$

$6-U_{n+1}=6-\sqrt{5U_n+6}$

نضرب في المرافق نجد

$$6-U_{n+1}=\frac{(6-\sqrt{5U_n+6})(6+\sqrt{5U_n+6})}{(6+\sqrt{5U_n+6})}$$

$$6-U_{n+1}=\frac{36-(5U_n+6)}{(6+\sqrt{5U_n+6})}$$

$$=\frac{-5U_n+30}{(6+\sqrt{5U_n+6})}$$

$$=\frac{5(-U_n+6)}{(6+\sqrt{5U_n+6})}$$

ومنه

$$6-U_{n+1}=\frac{5(6-U_n)}{(6+\sqrt{5U_n+6})}$$

ولدينا

$$1\le U_{n+1}\le 6$$
$$6+1\le 6+\sqrt{5U_n+6}\le 6+6$$
$$6\le 7\le 6+\sqrt{5U_n+6}\le 12$$

أي

$$6\le 6+\sqrt{5U_n+6}$$

ثم نضع المقلوب للطرفين

$$\frac{1}{6+\sqrt{5U_n+6}}\le\frac{1}{6}$$

نضرب الطرفين في $5(6-U_n)$ نجد

$$\frac{5(6-U_n)}{6+\sqrt{5U_n+6}}\le\frac{5}{6}(6-U_n)$$

ومنه: $6-U_{n+1}\le\frac{5}{6}(6-U_n)$

II -3-ب - البرهان ان من أجل كل $n\in N$:
$0\le 6-U_n\le V_n$

للبرهان أن $0\le 6-U_n\le V_n$ نستعمل البرهان بالتراجع

نسمي $P(n)$ الخاصية $0\le 6-U_n\le V_n$

من اجل $n=0$ لدينا $U_0=1$ و $V_0=5$

و $0\le 6-1\le 5$ ومنه $0\le 6-U_0\le V_0$

أي $P(0)$ محققة من أجل $n=0$

نفرض أن $P(n)$ محققة من أجل كل n

أي $0\le 6-U_n\le V_n$ محققة، ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $0\le 6-U_{n+1}\le V_{n+1}$

لدينا من الفرضية

$$0\le 6-U_n\le V_n$$

نعوض $V_n=5\left(\frac{5}{6}\right)^n$ نجد

$$0\le 6-U_n\le 5\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

نضرب الأطراف في $\frac{5}{6}$ نجد

$$0\le\frac{5}{6}(6-U_n)\le 5\left(\frac{5}{6}\right)^n\left(\frac{5}{6}\right)$$

$$0\le\frac{5}{6}(6-U_n)\le 5\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}$$

من الجواب السابق لدينا $6-U_{n+1}\le\frac{5}{6}(6-U_n)$

وأيضا $V_{n+1}=5\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}$ نعوض نجد

$$0\le 6-U_{n+1}\le V_{n+1}$$

ومنه الخاصية $P(n+1)$ محققة

إذن $0\le 6-U_n\le V_n$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n

استنتاج: $\lim_{n\to+\infty}(U_n)$

لدينا من البرهان السابق أن $0\le 6-U_n\le V_n$

و $\lim_{n\to+\infty}V_n=\lim_{n\to+\infty}\left(5\left(\frac{5}{6}\right)^n\right)=0$

باستعمال النهايات بالحصر نجد أن

$$\lim_{n\to+\infty}(6-U_n)=0$$

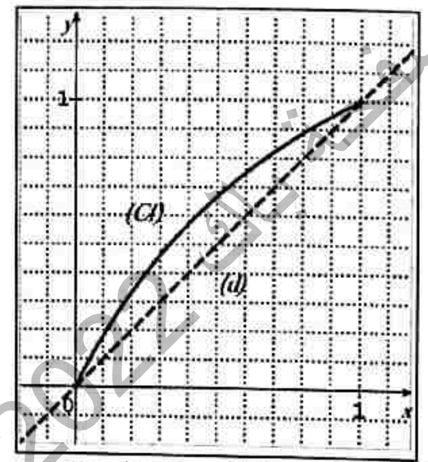
ومنه $\boxed{\lim_{n\to+\infty}U_n=6}$

أي المتتالية (U_n) متقاربة نحو 6

25. بكالوريا 2013 علوم تجريبية

الموضوع الثاني - التمرين الثاني

لشكل المقابل، (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرّفة على المجال $[0;1]$ بالعلاقة $f(x)=\frac{2x}{x+1}$ ،
و (d) المستقيم ذو المعادلة $y=x$.



1- (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=\frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n،

$$u_{n+1}=f(u_n)$$

1-أ- أعد رسم هذا الشكل في ورقة الإجابة، ثم مثّل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على محور الفواصل دون حسابها، مبرزا خطوط التمثيل.

1-ب- ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها.

2-أ- أثبت أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$

2-ب- برهن بالتراجع أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n . $0<u_n<1$

2-جـ- ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

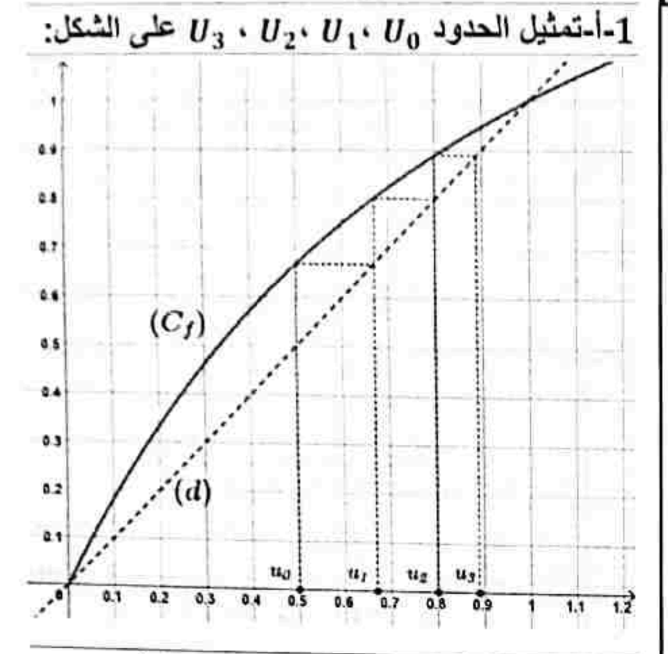
3- (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n=\frac{u_n-1}{u_n}$.

3-أ- برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$، يطلب حساب حدها الأول v_0

3-ب- أحسب نهاية (u_n).

الحل

1-أ- تمثيل الحدود U_0 ، U_1 ، U_2 ، U_3 على الشكل:



1-ب- وضع تخمين حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) وتقاربها:

نلاحظ أن $U_0<U_1<U_2<U_3$

أي تبدو (U_n) متتالية متزايدة تماما وتتقارب نحو فاصلة نقطة تقاطع (C_f) و (d)

2- أ- إثبات ان الدالة f متزايدة تماما على $[0,1]$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $[0,1]$ ودالتها المشتقة هي

$$f'(x)=\frac{2(x+1)-1(2x)}{(x+1)^2}=\frac{2x+2-2x}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}>0$$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على $[0,1]$

2-ب- البرهان بالتراجع أن $0<U_n<1$

- نسمي $P(n)$ الخاصية $0<U_n<1$

- من اجل $n=0$ لدينا $U_0=\frac{1}{2}$ و $0<\frac{1}{2}<1$

ومنه $0<U_0<1$

أي $P(0)$ محققة من أجل $n=0$

- نفرض أن $P(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n أي $0<U_n<1$ محققة، ونبرهن صحة $P(n+1)$

أي $0<U_{n+1}<1$ محققة:

لدينا من الفرضية $0<U_n<1$

و الدالة f متزايدة تماما على $[0,1]$ يصبح

$$f(0)<f(U_n)<f(1)$$

$$0 < U_{n+1} < 1$$

ومنه الخاصية $P(n+1)$ محققة

- إذن $0 < U_n < 1$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n

2-جـ – دراسة اتجاه تغير (U_n):

لدراسة اتجاه تغير (U_n) ندرس إشارة الفرق $U_{n+1} - U_n$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{2U_n}{U_n + 1} - U_n$$
$$= \frac{2U_n - U_n(U_n + 1)}{U_n + 1}$$
$$U_{n+1} - U_n = \frac{-U_n{}^2 + U_n}{U_n + 1}$$

ندرس إشارة الكسر:

نضع $U_n = x$

$$\frac{-x^2 + x}{x + 1}$$

ندرس إشارة البسط:

$$-x^2 + x = 0$$
$$x(-x + 1) = 0$$
$$\begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ -x + 1 = 0 \quad \text{أي} \quad x = 1 \end{cases}$$

ندرس إشارة المقام: $x + 1 \neq 0 \rightarrow x \neq -1$

نضع جدول الإشارة:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$-x^2+x$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\frac{-x^2+x}{x+1}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

من الجدول نلاحظ أن $\frac{-x^2+x}{x+1} \geq 0$ على $[0,1]$

أي $u_{n+1} - u_n \geq 0$ ومنه (u_n) متزايدة تماما

ط 2- لدينا

$$\frac{-u_n^2 + u_n}{u_n + 1} = \frac{u_n(-u_n + 1)}{u_n + 1}$$

من البرهان بالتراجع

$u_n > 0$ ....(1)

$0 < u_n < 1$

$1 < u_n + 1 < 2$

ومنه

$u_n + 1 > 0$ ....(2)

ولدينا أيضا من البرهان بالتراجع أن: $u_n < 1$ ومنه

$u_n < 1$

$-u_n > -1$

$-u_n + 1 > 0$ ....(3)

من (1) و (2) و(3) نستنتج أن: $\frac{u_n(-u_n+1)}{u_n+1} > 0$

ومنه (u_n) متزايدة تماما

3-أ - البرهان أن (V_n) متتالية هندسية:

تكون (V_n) متتالية هندسية إذا كان $V_{n+1} = V_n \times q$

$$V_n = \frac{U_n - 1}{U_n}$$
$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1} - 1}{U_{n+1}}$$
$$V_{n+1} = \frac{\frac{2U_n}{U_n+1} - 1}{\frac{2U_n}{U_n+1}} = \frac{\frac{2U_n - U_n - 1}{U_n+1}}{\frac{2U_n}{U_n+1}}$$
$$= \frac{U_n - 1}{2U_n}$$

نستخرج $\frac{1}{2}$ كعامل مشترك نجد $V_{n+1} = \frac{1}{2}\,\frac{U_n-1}{U_n}$

ومنه $\boxed{V_{n+1} = \frac{1}{2} V_n}$

ومنه (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$

حساب V_0:

$$V_0 = \frac{U_0 - 1}{U_0} = \frac{\frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2}}$$
$$\boxed{V_0 = -1}$$

التعبير عن V_n بدلالة n:

لدينا: مع $n \geq p$

$$V_n = V_p \times q^{n-p}$$
$$V_n = V_0 \times q^n$$

ومنه $\boxed{V_n = -1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}$

3-ب-حساب $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

أولا نستخرج عبارة U_n بدلالة n

لدينا

$$V_n = \frac{U_n - 1}{U_n}$$
$$V_n U_n = U_n - 1$$
$$V_n U_n - U_n = -1$$
$$U_n(V_n - 1) = -1$$
$$U_n = \frac{-1}{V_n - 1}$$

ونعلم أن $V_n = -1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ نعوض نجد

$$U_n = \frac{-1}{-1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}$$

ومنه $\boxed{U_n = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1}}$

إذن $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1}\right)$

لكن $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ ومنه $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 1}$

26. بكالوريا 2012 علوم تجريبية

الموضوع الأول - التمرين الأول

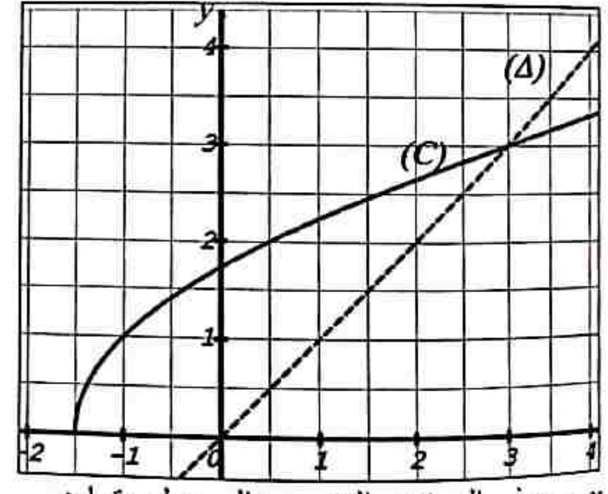
نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = 1$ ومن اجل كل عدد طبيعي n

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$$

1- لتكن h الدالة المعرفة على المجال $\left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[$ كمايلي:

$$h(x) = \sqrt{2x + 3}$$

و (C) تمثيلها البياني و (Δ) المستقيم ذو المعادلة



$y = x$ في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس. (انظر الشكل المقابل).

1-أ- أعد رسم الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثم مثل على محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 . (دون حسابها موضحا خطوط الانشاء).

1-ب- ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر (u_n) وتقاربها.

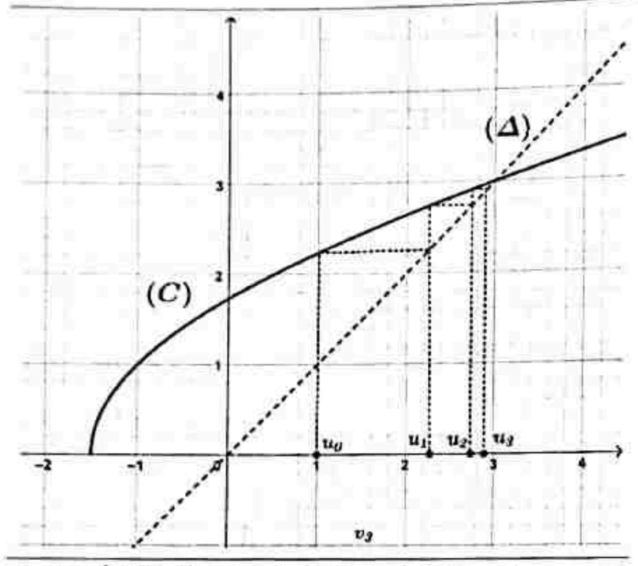
2- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0 < u_n < 3$.

3-أ- أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

3-ب- استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة، ثم احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

الحل.

1-أ - تمثيل الحدود U_0 ، U_1 ، U_2 ، U_3 على الشكل:



1-ب - وضع تخمين حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) وتقاربها:

نلاحظ أن $U_0 < U_1 < U_2 < U_3$

أي (U_n) متتالية متزايدة تماما وتتقارب نحو فاصلة نقطة تقاطع (C_f) و (Δ)

2- البرهان بالتراجع من أجل $n \in \mathbb{N}$ أن $0 < U_n < 3$

- نسمي $P(n)$ الخاصية $0 < U_n < 3$
- من اجل $n = 0$ لدينا $U_0 = 1$ و $0 < 1 < 3$ و $0 < U_0 < 3$

أي $P(O)$ محققة من أجل $n = 0$

- نفرض أن $P(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n أي $0 < U_n < 3$ محققة، ونبرهن صحة $P(n+1)$

أي $0 < U_{n+1} < 3$ محققة:

لدينا من الفرضية

$$0 < U_n < 3$$

نضرب في 2 ثم نضيف 3 نجد

$$(2)0 + 3 < 2U_n + 3 < (2)3 + 3$$

ثم نجذر نجد:

$$\sqrt{3} < \sqrt{2U_n + 3} < \sqrt{9}$$

$$0 < \sqrt{3} < U_{n+1} < 3$$

ومنه:

$$0 < U_{n+1} < 3$$

ومنه الخاصية $P(n+1)$ محققة

- إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < U_n < 3$

3-أ - دراسة اتجاه تغير (U_n):

لدراسة اتجاه تغير (U_n) ندرس إشارة الفرق

$$U_{n+1} - U_n$$

$$U_{n+1} - U_n = \sqrt{2U_n + 3} - U_n$$

نضرب في المرافق نجد

$$U_{n+1} - U_n = \frac{(\sqrt{2U_n+3} - U_n)(\sqrt{2U_n+3} + U_n)}{(\sqrt{2U_n+3} + U_n)}$$

$$= \frac{2U_n + 3 - U_n^2}{(\sqrt{2U_n+3} + U_n)}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{-U_n^2 + 2U_n + 3}{(\sqrt{2U_n+3} + U_n)}$$

ندرس إشارة المقام:

لدينا من الجواب السابق أن

$$0 < U_n < 3$$

$$0 < U_{n+1} < 3$$

نقوم بالجمع طرفا لطرف نجد

$$0 < \sqrt{2U_n + 3} + U_n < 6$$

ومنه المقام موجب فالإشارة من إشارة البسط

ندرس إشارة البسط:

$$-U_n^2 + 2U_n + 3 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4(-1)(3) = 16$$

$$\sqrt{\Delta} = 4$$

$$U_{n_1} = \frac{-2-4}{-2} = 3$$

$$U_{n_2} = \frac{-2+4}{-2} = -1$$

إن وجد للمعادلة حلان فنقوم بتحليلها بالقاعدة التي تقول:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

إذا نكتب:

$$-U_n^2 + 2U_n + 3 = -(U_n - 3)(U_n + 1)$$

بما أن $0 < U_n < 3$ فإن $0 < 1 < U_n + 1 < 4$

ومنه $(U_n + 1) > 0$ موجبة

و $U_n < 3$ أي $(U_n - 3)(-1) > 0(-1)$

أي $-(U_n - 3) > 0$ ومنه $-(U_n - 3)$ موجبة

ومنه

$$-U_n^2 + 2U_n + 3 = -(U_n - 3)(U_n + 1) > 0$$

ومنه (U_n) متزايدة تماما

3-ب - استنتاج أن المتتالية (U_n) متقاربة:

بما أن (U_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 3 فإنها متقاربة نحو نهايتها l

حساب: $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

بما أن (U_n) متقاربة نحو نهايتها l فإن القاعدة تقول:

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} U_{n+1} = l$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} (\sqrt{2U_n + 3}) = l$$

أي : $\sqrt{2l + 3} = l$

نقوم بتربيع الطرفين نجد

$$2l + 3 = l^2$$

$$-l^2 + 2l + 3 = 0$$

نلاحظ أنها نفس المعادلة التي حللناها في الجواب السابق $(-U_n^2 + 2U_n + 3)$ ومنه

$$l_1 = 3$$

هذا الحل مقبول لأنّ $l_1 > 0$

$$l_2 = -1$$

هذا الحل مرفوض لأنّ $l_2 < 0$

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 3$

27. بكالوريا 2012 علوم تجريبية

الموضوع الثاني - التمرين الأول

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الاول $u_0 = \frac{13}{4}$

ومن أجل كل عدد طبيعي n

$$u_{n+1} = 3 + \sqrt{u_n - 3}$$

1-برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$3 \langle u_n \langle 4$$

2-بين انه من اجل كل عدد طبيعي n:

$u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 7u_n - 12}{\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3}$.

-استنتج ان (u_n) متزايدة تماما.

3-برّر لماذا (u_n) متقاربة.

4- (v_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$v_n = \ln(u_n - 3)$.

4-أ- برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$، ثم أحسب حدها الأول .

4-ب- اكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n ،ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4-جـ- نضع من أجل كل عدد طبيعي n:

$$p_n = (u_0 - 3)(u_1 - 3)(u_2 - 3) \times \ldots \times (u_n - 3)$$

اكتب P_n بدلالة n ، ثم بيّن أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = \frac{1}{16}$.

الحل

1-البرهان بالتراجع من أجل $n \in N$ أن $3 < U_n < 4$

- نسمي $P(n)$ الخاصية $3 < U_n < 4$
- من أجل $n = 0$ لدينا $U_0 = \frac{13}{4}$ و $3 < \frac{13}{4} < 4$
ومنه $3 < U_0 < 4$ أي $P(O)$ محققة من أجل كل $n = 0$
- نفرض أن $P(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n أي $3 < U_n < 4$ محققة، ونبرهن صحة $P(n+1)$
أي $3 < U_{n+1} < 4$ محققة:
لدينا من الفرضية $3 < U_n < 4$
ننقص 3 ثم نجذر
نجد $\sqrt{3-3} < \sqrt{U_n - 3} < \sqrt{4-3}$
نضيف 3 نجد
$$3 + \sqrt{3-3} < 3 + \sqrt{U_n - 3} < 3 + \sqrt{4-3}$$
$$3 < U_{n+1} < 4$$
ومنه الخاصية $P(n+1)$ محققة
- إذن من أجل كل عدد طبيعي n: $3 < U_n < 4$

2-التبيين أنه من أجل $n \in N$ أن :
$$U_{n+1} - U_n = \frac{-U_n^2 + 7U_n - 12}{\sqrt{U_n - 3} + U_n - 3}$$

$$U_{n+1} - U_n = 3 + \sqrt{U_n - 3} - U_n$$
$$= \sqrt{U_n - 3} - U_n + 3$$
نضرب في المرافق نجد:
$$U_{n+1} - U_n = \frac{\left(\sqrt{U_n - 3} - (U_n - 3)\right)\left(\sqrt{U_n - 3} + (U_n - 3)\right)}{\left(\sqrt{U_n - 3} + (U_n - 3)\right)}$$
نستعمل المتطابقة الشهيرة
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$
$$U_{n+1} - U_n = \frac{U_n - 3 - (U_n - 3)^2}{\left(\sqrt{U_n - 3} + (U_n - 3)\right)}$$
$$= \frac{U_n - 3 - U_n^2 - 9 + 6U_n}{\sqrt{U_n - 3} + U_n - 3}$$
$$U_{n+1} - U_n = \frac{-U_n^2 + 7U_n - 12}{\sqrt{U_n - 3} + U_n - 3}$$

استنتاج أن (U_n) متزايدة تماما:

لكي تكون (U_n) متزايدة تماما يجب أن يكون
$$U_{n+1} - U_n > 0$$
لدينا
$$U_{n+1} - U_n = \frac{-U_n^2 + 7U_n - 12}{\sqrt{U_n - 3} + U_n - 3}$$
ندرس إشارة المقام:
لدينا $3 < U_n < 4$
ننقص 3 ثم نجذر نجد $0 < \sqrt{U_n - 3} < 1$
ومنه $\sqrt{U_n - 3}$ موجب
ولدينا $3 < U_n < 4$
ننقص 3 نجد $0 < U_n - 3 < 1$
ومنه $U_n - 3$ موجب
ومنه المقام موجب فالإشارة من إشارة البسط
ندرس إشارة البسط:
$$-U_n^2 + 7U_n - 12 > 0$$
$$\Delta = 49 - 4(-1)(-12) = 1$$
$$\sqrt{\Delta} = 1$$
$$U_{n_1} = \frac{-7-1}{-2} = 4$$
$$U_{n_2} = \frac{-7+1}{-2} = 3$$
إذن نجد للمعادلة حلان فنقوم بتحليلها بالقاعدة التي تقول:
$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$
إذا نكتب:
$$-U_n^2 + 7U_n - 12 = -(U_n - 4)(U_n - 3)$$
بما أن $U_n < 4$ فإن $(U_n - 4)(-1) > 0(-1)$
ومنه $-(U_n + 1) > 0$ موجبة
و $3 < U_n$ أي $U_n - 3 > 0$ موجبة
ومنه
$$-U_n^2 + 2U_n + 3 = -(U_n - 3)(U_n - 4) > 0$$
ومنه (U_n) متزايدة تماما

3-التبرير أن (U_n) متتالية متقاربة:

بما أن (U_n) متزايدة تماما على ℕ ومحدودة من الأعلى بالعدد 4 فإنها متقاربة نحو نهايتها l

4-أ-البرهان أن (V_n) متتالية هندسية:

تكون (V_n) متتالية هندسية إذا كان
$$V_{n+1} = V_n \times q$$
لدينا
$$V_n = \ln(U_n - 3)$$
$$V_{n+1} = \ln(U_{n+1} - 3)$$
$$V_{n+1} = \ln\left(3 + \sqrt{U_n - 3} - 3\right)$$

$$= \ln(\sqrt{U_n - 3}) = \ln(U_n - 3)^{\frac{1}{2}}$$

من خواص اللوغاريتم أن $ln(a)^b = b\,ln(|a|)$ أي

$$V_{n+1} = \ln(U_n - 3)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln(U_n - 3)$$

$$\boxed{V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n}$$

ومنه (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$

حساب V_0:

$$V_0 = \ln(U_0 - 3) = \ln\left(\frac{13}{4} - 3\right) = \ln\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$V_0 = -\ln(4)$$

4-ب - كتابة V_n و U_n بدلالة n:

كتابة V_n بدلالة n: مع $n \geq p$

لدينا $V_n = V_p \times q^{n-p}$

ومنه $\boxed{V_n = -\ln(4) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}$

كتابة U_n بدلالة n:

لدينا $V_n = \ln(U_n - 3)$

ندخل الدالة الاسية $exp(x)$ على الطرفين نجد

$$e^{V_n} = e^{\ln(U_n - 3)}$$

$$e^{V_n} = U_n - 3$$

$$U_n = e^{V_n} + 3$$

نعلم أن $V_n = -\ln(4) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ نعوضها نجد

$$\boxed{U_n = e^{-\ln(4)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n} + 3}$$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

$$\lim_{n\to+\infty}(U_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(e^{-\ln(4)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n} + 3\right)$$

بما أن $-1 < q < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ و $e^0 = 1$

ومنه $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n) = 4}$

4-جـ - كتابة P_n بدلالة n:

لدينا $V_n = \ln(U_n - 3)$

ندخل الاسية على الطرفين نجد

$$e^{V_n} = e^{\ln(U_n - 3)}$$

$$e^{V_n} = U_n - 3$$

نقوم بتعويض e^{V_n} في مكان $U_n - 3$ في عبارة P_n كالتالي:

$$P_n = (U_0 - 3)(U_1 - 3)(U_2 - 3)\ldots.(U_n - 3)$$

$$P_n = (e^{V_0})(e^{V_1})(e^{V_2})\ldots.(e^{V_n})$$

$$P_n = e^{V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n}$$

لكن $V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n$ هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية:

$$P_n = e^{\left(V_0\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-0+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1}\right)}$$

$$P_n = e^{\left(-\ln(4)\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1}\right)}$$

ومنه $\boxed{P_n = e^{2\ln(4)\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1\right]}}$

البرهان أن $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = \frac{1}{16}$

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = \lim_{n\to+\infty}\left(e^{2\ln(4)\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1\right]}\right)$$

بما أن $-1 < q < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$

يصبح

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = e^{-2\ln(4)} = e^{\ln(4)^{-2}}$$

$$= (4)^{-2} = \frac{1}{4^2}$$

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = \frac{1}{16}$

28. بكالوريا 2011 علوم تجريبية

الموضوع الأول - التمرين الأول

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = -1$ ومن اجل كل عدد طبيعي n:

$$u_{n+1} = 3u_n + 1$$

(v_n) المتتالية العددية المعرفة ومن أجل كل عدد طبيعي n بـ:

$$v_n = u_n + \frac{1}{2}$$

في كل حالة من الحالات التالية اقترحت ثلاثة إجابات، إجابة واحدة فقط منها صحيحة، حددها مع التعليل.

1-المتتالية (v_n):

أ: حسابية. ب: هندسية. جـ: لا حسابية ولا هندسية.

2-نهاية المتتالية (u_n) هي:

أ: $+\infty$ ب: $-\frac{1}{2}$ جـ: $-\infty$

3-نضع من أجل كل عدد طبيعي n،

$$s_n = -\frac{1}{2}[1 + e^{\ln 3} + e^{2\ln 3} + e^{3\ln 3} + \dots + e^{n\ln 3}]$$

أ: $S_n = \frac{3^{n+1}-1}{2}$ ب: $S_n = \frac{1-3^n}{4}$

جـ: $S_n = \frac{1-3^{n+1}}{4}$

الحل

1-الحالة 1

$$V_n = U_n + \frac{1}{2}$$

$$V_{n+1} = U_{n+1} + \frac{1}{2}$$

ولدينا $U_{n+1} = 3U_n + 1$ نعوضها نجد

$$V_{n+1} = 3U_n + 1 + \frac{1}{2}$$

$$V_{n+1} = 3U_n + \frac{3}{2}$$

نخرج 3 كعامل مشترك نجد

$$V_{n+1} = 3\left(U_n + \frac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{V_{n+1} = 3V_n}$$

بما أن (V_n) مكتوبة بالشكل $V_{n+1} = V_n \times q$ فهي متتالية هندسية أساسها $q = 3$ وحدها الأول

$$V_0 = U_0 + \frac{1}{2} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

ومنه

$$\boxed{V_0 = -\frac{1}{2}}$$

الجواب الصحيح: هو الجواب (ب) أي (V_n) متتالية هندسية

2- الحالة 2

$$V_n = U_n + \frac{1}{2}$$

ومنه

$$U_n = V_n - \frac{1}{2}$$

والحد العام للمتتالية الهندسية (V_n):

$V_n = -\frac{1}{2}(3^n)$ بالتعويض نجد:

$$U_n = -\frac{1}{2}(3^n) - \frac{1}{2}$$

ومنه

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}(3^n) - \frac{1}{2}\right) = -\infty$$

إذن

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n = -\infty}$$

الجواب الصحيح: هو الجواب (جـ) أي $(-\infty)$

3-الحالة 3

$$S_n = -\frac{1}{2}[1 + e^{\ln 3} + e^{2\ln 3} + e^{3\ln 3} + \dots + e^{n\ln 3}]$$

نعلم أن $a\ln(b) = \ln(b)^a$ ومنه نجد

$$S_n = -\frac{1}{2}[1 + e^{\ln 3} + e^{\ln 3^2} + e^{\ln 3^3} + \dots + e^{\ln 3^n}]$$

ومن خواص اللوغاريتم أن $e^{\ln(b)^a} = (b)^a$ يصبح

$$S_n = -\frac{1}{2}[1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n]$$

نقوم بالنشر على ما داخل القانمتين نجد

$$S_n = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(3) - \frac{1}{2}(3^2) - \frac{1}{2}(3^3) - \dots - \frac{1}{2}(3^n)$$

نلاحظ أن العبارة $-\frac{1}{2}(3^n) = V_n$ وهكذا، بالتعويض نجد:

$$S_n = V_0 + V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n$$

وهي تمثل مجموع لحدود متتابعة لمتتالية هندسية (V_n) أساسها $q = 3$ وحدها الأول $V_0 = -\frac{1}{2}$ ومنه

لدينا علاقة المجموع هي

$$S_n = V_p\left(\frac{q^{n-p+1}-1}{q-1}\right) \text{ مع } n \geq p$$

$$S_n = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3^{n+1}-1}{3-1}\right) = \frac{-3^{n+1}+1}{4}$$

ومنه

$$\boxed{S_n = \frac{1-3^{n+1}}{4}}$$

الجواب الصحيح: هو الجواب(جـ) أي $S_n = \frac{1-3^{n+1}}{4}$

29. بكالوريا 2011 علوم تجريبية

الموضوع الثاني - التمرين الأول

α عدد حقيقي موجب تماما ويختلف عن 1.
(u_n) متتالية عددية معرفة على N بـ: $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n:
$$u_{n+1} = \alpha u_n + 1$$
(v_n) متتالية عددية معرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n + \frac{1}{\alpha-1}$.

1-أ- برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها α.

1-ب- اكتب بدلالة n و α، عبارة v_n ثم استنتج بدلالة n و α، عبارة u_n.

1-جـ- عين قيم العدد الحقيقي α التي تكون من اجلها المتتالية (u_n) متقاربة.

2- نضع $\alpha = \frac{3}{2}$.

-احسب بدلالة n، المجموعين S_n و T_n حيث:
$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$
$$T_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

الحل

1-أ - البرهان أن (V_n) متتالية هندسية:

تكون (V_n) متتالية هندسية إذا كان $V_{n+1} = V_n \times q$

لدينا $V_n = U_n + \frac{1}{\alpha-1}$

$$V_{n+1} = U_{n+1} + \frac{1}{\alpha-1}$$
$$V_{n+1} = \alpha U_n + 1 + \frac{1}{\alpha-1}$$
$$V_{n+1} = \alpha U_n + \frac{\alpha-1+1}{\alpha-1}$$
$$V_{n+1} = \alpha U_n + \frac{\alpha}{\alpha-1}$$

نقوم بإخراج α كعامل مشترك نجد:
$$V_{n+1} = \alpha\left(U_n + \frac{1}{\alpha-1}\right)$$
$$\boxed{V_{n+1} = V_n \times \alpha}$$

ومنه (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = \alpha$

حساب V_0: $V_0 = U_0 + \frac{1}{\alpha-1}$
$$\boxed{V_0 = 6 + \frac{1}{\alpha-1}}$$

1-ب - كتابة V_n بدلالة n و α:

لدينا: $V_n = V_p \times q^{n-p}$ مع $n \geq p$
$$V_n = V_0 \times q^n$$
$$\boxed{V_n = \left(6 + \frac{1}{\alpha-1}\right) \times (\alpha)^n}$$

استنتاج U_n بدلالة n و α:

لدينا $V_n = U_n + \frac{1}{\alpha-1}$

ومنه $U_n = V_n - \frac{1}{\alpha-1}$
$$\boxed{U_n = \left(6 + \frac{1}{\alpha-1}\right)(\alpha)^n - \frac{1}{\alpha-1}}$$

1-جـ - تعيين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (U_n) متقاربة:

تكون (U_n) متقاربة إذا كان: $\lim_{n\to+\infty} U_n = l$ حيث l عدد حقيقي أي
$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(6 + \frac{1}{\alpha-1}\right)(\alpha)^n - \frac{1}{\alpha-1}\right] = l$$

وحتى تعطينا $\lim_{n\to+\infty} U_n$ عدد حقيقي l يجب أن تكون $\lim_{n\to+\infty} (\alpha)^n = 0$ أي يجب أن يكون $1 > \alpha > 0$ لأن α حقيقي موجب ومنه قيمة العدد α حتى تكون (U_n) متقاربة هي: $\boxed{1 > \alpha > 0}$

2- حساب بدلالة n المجموع S_n و T_n:

حساب بدلالة n المجموع S_n:

لدينا $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$

نقول S_n يمثل مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية ومنه:
$$S_n = V_0\,\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$
$$S_n = \left(6 + \frac{1}{\frac{3}{2}-1}\right)\left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}-1}{\left(\frac{3}{2}\right)-1}\right)$$
$$\boxed{S_n = 16\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - 1\right]}$$

حساب بدلالة n المجموع T_n:

لدينا $T_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$

ولدينا من جواب سابق $U_n = V_n - \frac{1}{\alpha-1}$

و $U_0 = V_0 - \frac{1}{\alpha-1}$ وهكذا، مع $\alpha = \frac{3}{2}$ بالتعويض نجد:
$$T_n = V_0 - \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)-1} + V_1 - \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)-1} + \cdots + V_n - \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)-1}$$
$$T_n = V_0 - 2 + V_1 - 2 + \cdots + V_n - 2$$

نلاحظ أن العدد -2 تكرر $n - 0 + 1 = n + 1$ مرة (عدد حدود المتتالية) ونكتب:
$$T_n = (n+1)(-2) + [V_0 + V_1 + \cdots + V_n]$$

ونلاحظ أن $[V_0+V_1+\cdots+V_n]$ تمثل S_n الذي حسبناه سابقا تصبح

$$T_n=S_n-2(n+1)$$

ومنه

$$\boxed{T_n=16\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}-1\right]-2(n+1)}$$

30. بكالوريا 2010 علوم تجريبية

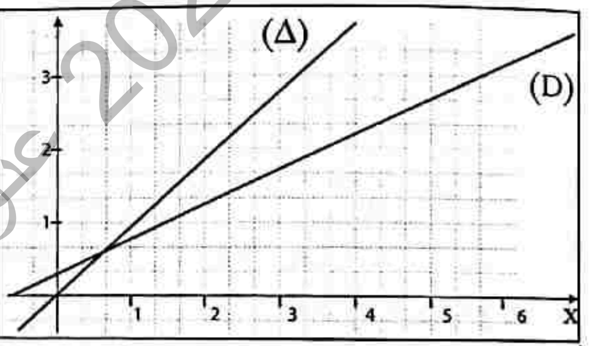
الموضوع الثاني - التمرين الأول

في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس مثّلنا المستقيمين(Δ) و(D) معادلتيهما على الترتيب:

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{3} \quad و \quad y=x$$

1ـ لتكن المتتالية (u_n) المعرّفة على مجموعة الاعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n،

$$u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{3}$$



1-أ- انقل الشكل ثم مثل على محور الفواصل الحدود التالية: u_0، u_1، u_2، u_3 وu_4؛ دون حسابها مبرزا خطوط الرسم.

1-ب- عيّن احداثيتي نقطة تقاطع المستقيمين(Δ) و(D)

1-جـ- أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية(u_n) .

2-أ- باستعمال الاستدلال بالتراجع، اثبت انّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n>\frac{2}{3}$.

2-ب- استنتج اتجاه تغير المتتالية(u_n).

3-نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n=u_n-\frac{2}{3}$.

3-أ- بيّن انّ المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدّها الأول.

3-ب- أكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n، واستنتج عبارة u_n بدلالة n .

3-جـ- أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث:

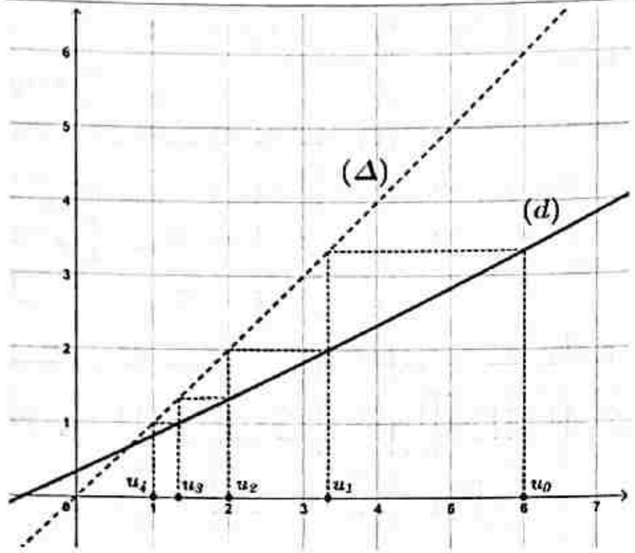
$$S_n=v_0+v_1+\ldots+v_n$$

واستنتج المجموع S'_n حيث:

$$S'_n=u_0+u_1+\ldots+u_n.$$

الحل

1-أ - تمثيل الحدود U_0، U_1، U_2، U_3، U_4 على الشكل:



1-ب – تعيين إحداثيي نقطة تقاطع (d) و(Δ):

نقوم بالمساواة بين معادلتي المستقيمان (d) و(Δ) لإيجاد فاصلة نقطة التقاطع

$$\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}=x$$

$$\frac{1}{2}x-x=-\frac{1}{3}$$

$$\left(\frac{1}{2}-1\right)x=-\frac{1}{3}$$

$$x=\frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{2}}$$

$$x=\frac{2}{3}$$

نعوض $x=\frac{2}{3}$ في معادلة (d) و(Δ) لإيجاد ترتيبه نقطة التقاطع فنجد $y=\frac{2}{3}$

ومنه احداثيات نقطة تقاطع (d) و(Δ) هي

$$\boxed{A\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)}$$

1-جـ - وضع تخمين حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) وتقاربها:

نلاحظ أن $U_0>U_1>U_2>U_3>U_4$

ومنه يبدو أن (U_n) متتالية متناقصة وتتقارب نحو فاصلة نقطة تقاطع (d) و(Δ)

2-أ - البرهان بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n: $U_n > \frac{2}{3}$:

- نسمي $P(n)$ الخاصية: $U_n > \frac{2}{3}$

- من اجل $n = 0$ لدينا $U_0 = 6$ و $6 > \frac{2}{3}$

ومنه $U_0 > \frac{2}{3}$

- أي $P(0)$ محققة من أجل $n = 0$

- نفرض أن $P(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n أي $U_n > \frac{2}{3}$ محققة، ونبرهن صحة $P(n+1)$

أي $U_{n+1} > \frac{2}{3}$ محققة:

لدينا من الفرضية $U_n > \frac{2}{3}$

نضرب الطرفين في $\left(\frac{1}{2}\right)$ ثم نضيف لهما $\left(\frac{1}{3}\right)$ نجد

$$\left(\frac{1}{2}\right)U_n + \left(\frac{1}{3}\right) > \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)$$

$$U_{n+1} > \frac{2}{3}$$

ومنه الخاصية $P(n+1)$ محققة

- إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n > \frac{2}{3}$

2-ب – استنتاج اتجاه تغير المتتالية (U_n):

ندرس إشارة الفرق $U_{n+1} - U_n$

لدينا $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}U_n + \frac{1}{3} - U_n$

$$U_{n+1} - U_n = -\frac{1}{2}U_n + \frac{1}{3}$$

ولدينا من نتائج السؤال (2-أ-)

$$u_n > \frac{2}{3}$$

$$-\frac{1}{2}u_n < -\frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3} < -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$

$$u_{n+1} - u_n < 0$$

ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما

3-أ - البرهان أن (V_n) متتالية هندسية:

تكون (V_n) متتالية هندسية إذا كان $V_{n+1} = V_n \times q$

لدينا

$$V_n = U_n - \frac{2}{3}$$

$$V_{n+1} = U_{n+1} - \frac{2}{3}$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - \frac{1}{3}$$

نقوم بإخراج $\frac{1}{2}$ كعامل مشترك نجد

$$V_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n - \frac{2}{3}\right)$$

$$\boxed{V_{n+1} = V_n \times \frac{1}{2}}$$

ومنه (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$

حساب V_0: (مع $n \geq p$)

$$V_0 = U_0 - \frac{2}{3} = 6 - \frac{2}{3}$$

$$\boxed{V_0 = \frac{16}{3}}$$

3-ب - كتابة V_n بدلالة n :

لدينا: $V_n = V_p \times q^{n-p}$ مع $n \geq p$

$$V_n = V_0 \times q^n$$

ومنه $\boxed{V_n = \left(\frac{16}{3}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}$

استنتاج U_n بدلالة n :

لدينا $V_n = U_n - \frac{2}{3}$

ومنه $U_n = V_n + \frac{2}{3}$

$$\boxed{U_n = \left(\frac{16}{3}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}}$$

3-جـ - حساب بدلالة n المجموع S_n:

لدينا

$$S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$$

S_n يمثل مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية ومنه

$$S_n = V_0 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

$$S_n = \left(\frac{16}{3}\right) \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\left(\frac{1}{2}\right) - 1} = \left(\frac{16}{3}\right) \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{-\frac{1}{2}}$$

ومنه $\boxed{S_n = \left(\frac{-32}{3}\right)\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1\right]}$

استنتاج بدلالة n المجموع S'_n:

لدينا $S'_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$

ولدينا من جواب سابق $U_n = V_n + \frac{2}{3}$ ، بالتعويض

نجد: $S'_n = V_0 + \frac{2}{3} + V_1 + \frac{2}{3} + \cdots + V_n + \frac{2}{3}$

نلاحظ أن العدد $\frac{2}{3}$ تكرر $n - 0 + 1 = n + 1$ مرة (عدد حدود متتالية) ونكتب:

$$S'_n = (n+1)\left(\frac{2}{3}\right) + [V_0 + V_1 + \cdots + V_n]$$

ونلاحظ أن $[V_0 + V_1 + \cdots + V_n]$ تمثل S_n الذي حسبناه سابقا تصبح

$$S'_n = S_n + \frac{2}{3}(n+1)$$

إذن

$$\boxed{S'_n = \left[\left(\frac{-32}{3}\right)\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1\right]\right] + \frac{2}{3}(n+1)}$$

31. بكالوريا 2009 علوم تجريبية

الموضوع الأول - التمرين الأول

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$u_0 = 1$ و $u_1 = 2$ و $u_{n+2} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$

المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$v_n = u_{n+1} - u_n$$

1-احسب v_0 و v_1 .

2-برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.

3-أ- احسب بدلالة n المجموع S_n:

$$S_n = v_0 + v_1 + \ldots\ldots + v_{n-1}$$

3-ب- برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n:

$$u_n = \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) + 1$$

3-جـ- بيّن أنّ (u_n) متقاربة .

الحل

1-حساب V_0 و V_1:

حساب V_0

لدينا $V_n = U_{n+1} - U_n$

$$V_0 = U_{0+1} - U_0 = U_1 - U_0 = 2 - 1$$

ومنه $\boxed{V_0 = 1}$

حساب V_1

$$V_1 = U_{1+1} - U_1 = U_2 - U_1$$

$$V_1 = U_2 - 2$$

حساب U_2

لدينا $U_{0+2} = \frac{4}{3}U_{0+1} - \frac{1}{3}U_0 = \frac{4}{3}U_1 - \frac{1}{3}U_0$

$$U_2 = \frac{4}{3}(2) - \frac{1}{3}(1)$$

ومنه $\boxed{U_2 = \frac{7}{3}}$

نعوض U_2 في V_1 نجد

$$V_1 = \frac{7}{3} - 2$$

$$\boxed{V_1 = \frac{1}{3}}$$

2- البرهان أن (V_n) متتالية هندسية:

تكون (V_n) متتالية هندسية إذا كان $V_{n+1} = V_n \times q$

$$V_n = U_{n+1} - U_n$$

$$V_{n+1} = U_{n+2} - U_{n+1}$$

$$V_{n+1} = \frac{4}{3}U_{n+1} - \frac{1}{3}U_n - U_{n+1}$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{3}U_{n+1} - \frac{1}{3}U_n$$

نستخرج $\frac{1}{3}$ كعامل مشترك نجد

$$V_{n+1} = \frac{1}{3}(U_{n+1} - U_n)$$

ومنه $\boxed{V_{n+1} = \frac{1}{3}V_n}$

ومنه (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$

حساب V_0:

$$V_0 = U_{0+1} - U_0 = 2 - 1$$

$$\boxed{V_0 = 1}$$

التعبير عن V_n بدلالة n :

مع $n \geq p$

لدينا:

$$V_n = V_p \times q^{n-p}$$

$$V_n = V_0 \times q^n$$

ومنه $\boxed{V_n = 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n}$

3- أ - حساب بدلالة n المجموع S_n:

لدينا $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_{n-1}$

نقول S_n يمثل مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية

ومنه: $S_n = V_p \frac{q^{n-p+1} - 1}{q-1}$

$$S_n = V_0 \frac{q^{n-1-0+1} - 1}{q - 1}$$

$$S_n=(1)\,\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n-1}{\left(\frac{1}{3}\right)-1}=(1)\,\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n-1}{\frac{-2}{3}}$$

$$S_n=\left(\frac{-3}{2}\right)\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n-1\right]$$

ومنه

$$\boxed{S_n=\left(\frac{3}{2}\right)\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}$$

3-ب – البرهان أن $U_n=\left(\frac{3}{2}\right)\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]+1$

لدينا

$$V_n=U_{n+1}-U_n$$
$$V_0=U_1-U_0$$
$$V_1=U_2-U_1$$
$$\dots\dots$$
$$\dots\dots$$
$$V_{n-1}=U_n-U_{n-1}$$

نقوم بالجمع طرف لطرف عموديا فنحصل على المجموع S أي:

$$S_n=V_0+V_1+\dots+V_{n-1}$$
$$=U_1-U_0+U_2-U_1+\dots+U_n-U_{n-1}$$

نلاحظ أن الحدود تختزل مع بعضها U_1 مع $-U_1$ و U_2 مع $-U_2$ وهكذا، فيتبقى لنا الحدان الأول و الأخير فقط:

$$S_n=-U_0+U_n$$
$$U_n=S_n+U_0$$

بتعويض S_n و U_0 بقيمتيهما نجد

$$U_n=\left(\frac{3}{2}\right)\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]+1$$

3-جـ – تبيان أن (U_n) متقاربة:

لتبيين أن (U_n) متقاربة يكفي أن نبيّن أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=l$ حيث l عدد حقيقي

$$\lim_{n\to+\infty}U_n=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{3}{2}\right)\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]+1\right]$$

ولكن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$ ومنه

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}U_n=\frac{5}{2}}$$

بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\frac{5}{2}$ فإن (U_n) متقاربة نحو $\frac{5}{2}$

32. بكالوريا 2009 علوم تجريبية

الموضوع الثاني - التمرين الثالث

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الاول u_1 واساسها q حيث:

$$\begin{cases}u_1+2u_2+u_3=32\\u_1\times u_2\times u_3=216\end{cases}$$

1-أ- احسب u_2 والأساس q لهذه المتتالية واستنتج الحد الاول u_1.

1-ب- اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

1-جـ- احسب S_n حيث: $S_n=u_1+u_2+\dots+u_n$ بدلالة n ثم عين العدد الطبيعي n بحيث يكون $S_n=728$

2- (v_n) متتالية عددية معرفة من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كما يلي:

$$v_{n+1}=\frac{3}{2}v_n+u_n \quad \text{و} \quad v_1=2$$

2-أ- احسب v_2 و v_3

2-ب- نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم

$$w_n=\frac{v_n}{u_n}-\frac{2}{3}$$

بيّن أنّ (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

2-جـ- اكتب w_n بدلالة n ثم استنتج v_n بدلالة n.

الحل

1-أ – حساب U_2

لدينا

$$U_1\times U_2\times U_3=216$$

بما أن (U_n) متتالية هندسية فلدينا الوسط الهندسي لثلاثة حدود متتابعة هو:

$$U_1\times U_3={U_2}^2$$

ومنه

$$U_1\times U_3=\frac{216}{U_2}={U_2}^2$$

ومنه

$${U_2}^3=216$$

نضع الجذر الثلاثي للطرفين نجد

$$\sqrt[3]{{U_2}^3}=\sqrt[3]{216}$$

$$\boxed{U_2=6}$$

حساب الأساس q

لدينا

$$U_1+2U_2+U_3=32$$

بما أن الحد المعلوم هو $U_2=6$ فنكتب الحدين U_1 و U_3 بدلالة الحد U_2 وذلك باستخدام عبارة الحد العام

$$U_n=U_p\,q^{n-p}$$

مع $n\geq p$

$$U_2=U_1\,q$$

$$U_1 = \frac{6}{q}$$

$$U_3 = U_1\, q^2 = \frac{6}{q}\, q^2 = 6\, q$$

ومنه $U_1 + 2U_2 + U_3 = 32$

$$\frac{6}{q} + 2(6) + 6\, q = 32$$

$$6q^2 - 20q + 6 = 0$$

$$3q^2 - 10q + 3 = 0$$

$$\Delta = 100 - 4(3)(3) = 64$$

$$\sqrt{\Delta} = 8$$

$$q_1 = \frac{10+8}{6} = 3$$

$$q_2 = \frac{10-8}{6} = \frac{1}{3}$$

الحل q_2 مرفوض لأنه أقل من 1 ونحن نعلم أن المتتالية متزايدة أي يجب ان يكون $q > 1$

ومنه الأساس هو $\boxed{q = 3}$

استنتاج الحد الأول U_1

لدينا $U_1 = \frac{6}{q} = \frac{6}{3}$

$$\boxed{U_1 = 2}$$

1-ب – كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n:

لدينا: $U_n = U_p \times q^{n-p}$ مع $n \geq p$

$$U_n = U_1 \times q^{n-1}$$

ومنه $U_n = 2 \times 3^{n-1}$

$$U_n = 2 \times 3^{-1}(3)^n$$

$$\boxed{U_n = \frac{2}{3} \times (3)^n}$$

1-جـ - حساب بدلالة n المجموع S_n:

لدينا $S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$

S_n يمثل مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية ومنه:

$S_n = U_p\ \frac{q^{n-p+1}-1}{q-1}$ مع $n \geq p$

$$S_n = U_1\ \frac{q^{n-1+1}-1}{q-1}$$

$$S_n = (2)\ \frac{(3)^n - 1}{(3)-1} = (1)\ (3)^n - 1$$

ومنه $\boxed{S_n = (3)^n - 1}$

تعيين العدد الطبيعي حيث يكون $S_n = 728$

ط1:

$$S_n = (3)^n - 1 = 728$$

$$(3)^n = 728 + 1$$

$$(3)^n = 729$$

$$\ln 3^n = \ln 729$$

$$n \ln 3 = \ln 729$$

$$n = \frac{\ln 729}{\ln 3}$$

$$n = \frac{\ln 3^6}{\ln 3}$$

$$n = 6$$

ط2: نقوم بقسمة العدد 729 على 3 كما يلي

729	3
243	3
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

يصبح لدينا $729 = 3^6$ ومنه $(3)^n = 3^6$

بقاعدة تساوي الأسس نجد $\boxed{n = 6}$

2-أ - حساب V_2 و V_3

لدينا $V_{n+1} = \frac{3}{2}V_n + U_n$

حساب V_2

$$V_2 = \frac{3}{2}V_1 + U_1$$

$$V_2 = \frac{3}{2}(2) + 2$$

إذن $\boxed{V_2 = 5}$

حساب V_3

$$V_3 = \frac{3}{2}V_2 + U_2$$

$$V_3 = \frac{3}{2}(5) + 6$$

$$\boxed{V_3 = \frac{27}{2}}$$

2-ب - البرهان أن (W_n) متتالية هندسية:

تكون (W_n) متتالية هندسية إذا كان

$$W_{n+1} = W_n \times q$$

$$W_n = \frac{V_n}{U_n} - \frac{2}{3}$$

$$W_{n+1} = \frac{V_{n+1}}{U_{n+1}} - \frac{2}{3}$$

$$W_{n+1} = \frac{\frac{3}{2}V_n + U_n}{3U_n} - \frac{2}{3} = \frac{\frac{3}{2}V_n}{3U_n} + \frac{U_n}{3U_n} - \frac{2}{3}$$

$$W_{n+1} = \frac{1}{2}\,\frac{V_n}{U_n} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}\,\frac{V_n}{U_n} - \frac{1}{3}$$

نستخرج $\frac{1}{2}$ كعامل مشترك نجد

$$W_{n+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{V_n}{U_n}-\frac{2}{3}\right)$$

$$\boxed{W_{n+1}=\frac{1}{2}W_n}$$

ومنه (W_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$

حساب W_1:

$$W_1=\frac{V_1}{U_1}-\frac{2}{3}=\frac{2}{2}-\frac{2}{3}$$

$$\boxed{W_1=\frac{1}{3}}$$

2-جـ - التعبير عن W_n بدلالة n :

لدينا: $W_n=W_p\times q^{n-p}$

مع $n\geq p$

$$W_n=W_1\times q^{n-1}$$

$$\boxed{W_n=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

استنتاج V_n بدلالة n :

$$W_n=\frac{V_n}{U_n}-\frac{2}{3}$$

$$\frac{V_n}{U_n}=W_n+\frac{2}{3}$$

$$V_n=U_n\left(W_n+\frac{2}{3}\right)$$

ومنه $\boxed{V_n=\left(\frac{2}{3}\times(3)^n\right)\left(\left[\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]+\frac{2}{3}\right)}$

.33 بكالوريا 2008 علوم تجريبية

الموضوع الأول - التمرين الثالث

1- نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I=[1,2]$ بالعبارة: $f(x)=\frac{x+2}{-x+4}$

1-أ- بيّن أنّ الدالة f متزايدة تماما على I.

1-ب- بين أنه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال I، $f(x)$ ينتمي الى I.

2-(u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على N كما يلي:

$$u_{n+1}=f(u_n) \text{ و } u_0=\frac{3}{2}$$

2-أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n u_n ينتمي الى I.

2-ب- ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة.

3-أ- برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n:

$$u_n=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}$$

3-ب- عين النهاية: $\lim_{n\to+\infty}u_n$

الحل

1-أ-البرهان ان الدالة f متزايدة تماما على المجال: $I=[1,2]$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $[1,2]$ ودالتها المشتقة هي

$$f'(x)=\frac{1(-x+4)-(-1)(x+2)}{(-x+4)^2}$$

$$=\frac{-x+4+x+2}{(-x+4)^2}$$

ومنه $\boxed{f'(x)=\frac{6}{(-x+4)^2}}$

بما أن $f'(x)=\frac{6}{(-x+4)^2}>0$ ومنه فالدالة f متزايدة تماما على $[1,2]$

1-ب – البرهان أن $f(x)$ تنتمي إلى I :

لدينا $1\leq x\leq 2$ وبما أن الدالة f متزايدة تماما على I فإن

$$f(1)\leq f(x)\leq f(2)$$

$$1\leq f(x)\leq 2$$

ومنه $f(x)\in[1,2]$

2-أ-البرهان بالتراجع أن $1\leq U_n\leq 2$ أي $U_n\in[1,2]$

- نسمي $P(n)$ الخاصية $1\leq U_n\leq 2$

- من اجل $n=0$ لدينا $U_0=\frac{3}{2}$ و $1\leq\frac{3}{2}\leq 2$

ومنه $1\leq U_0\leq 2$ أي $P(0)$ محققة من أجل $n=0$

- نفرض أن $P(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n أي $1\leq U_n\leq 2$ محققة، ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $1\leq U_{n+1}\leq 2$ محققة:

لدينا من الفرضية $1\leq U_n\leq 2$

لكن الدالة المرفقة f مستمرة ومتزايدة تماما على $[1,2]$ يصبح $1\leq U_n\leq 2$

$$f(1)\leq f(U_n)\leq f(2)$$

$$1\leq U_{n+1}\leq 2$$

ومنه الخاصية $P(n+1)$ محققة

- إذن $1\leq U_n\leq 2$ من اجل كل عدد طبيعي n

2-ب – دراسة اتجاه تغير (U_n):

لدراسة اتجاه تغير (U_n) ندرس إشارة الفرق $U_{n+1}-U_n$ على المجال $[0,1]$

لدينا

$$U_{n+1}-U_n=\frac{U_n+2}{-U_n+4}-U_n=\frac{U_n+2+U_n^{2}-4U_n}{-U_n+4}$$

$$U_{n+1}-U_n=\frac{U_n^{2}-3U_n+2}{-U_n+4}$$

ندرس إشارة الكسر:

نضع $U_n=x$

$$\frac{x^2-3x+2}{-x+4}$$

ندرس إشارة البسط:

$$x^2-3x+2=0$$

$$\Delta=9-4(1)(2)=1$$

ومنه

$$x_1=\frac{3+1}{2}=2$$

$$x_2=\frac{3-1}{2}=1$$

ندرس إشارة المقام: $-x+4\neq 0\rightarrow x\neq 4$

نضع جدول الإشارة:

x	$-\infty$		1		2		4		$+\infty$
x^2-3x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	
$-x+4$		$+$	|	$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{x^2-3x+2}{-x+4}$		$+$	0	$-$	0	$+$	||	$-$	

من الجدول نلاحظ أن $0\leq\frac{x^2-3x+2}{-x+4}$ على $[1,2]$

أي $U_{n+1}-U_n\leq 0$ ومنه (U_n) متناقصة تماما

استنتاج أن (U_n) متقاربة:

بما ان (U_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد 1 فهي متقاربة نحو نهايتها l

3-أ - البرهان بالتراجع أن $U_n=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}$:

نسمي $P(n)$ الخاصية $U_n=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}$

من اجل $n=0$ لدينا $U_0=\frac{3}{2}$ و $\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$

ومنه $U_0=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^0+1}$

أي $P(0)$ محققة من أجل $n=0$

نفرض أن $P(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n

أي $U_n=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}$ محققة،

ونبرهن صحة $P(n+1)$

أي $U_{n+1}=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}+1}$ محققة:

لدينا

$$U_{n+1}=\frac{U_n+2}{-U_n+4}$$

ولدينا من الفرضية $U_n=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}$ نعوضها نجد

$$U_{n+1}=\frac{\left(1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}\right)+2}{-\left(1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}\right)+4}$$

هذا يكافئ

$$U_{n+1}=\frac{3+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}}{3-\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}}$$

$$U_{n+1}=\frac{\frac{3\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n+1\right)+1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}}{\frac{3\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n+1\right)-1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}}$$

$$U_{n+1}=\frac{3\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n+1\right)+1}{3\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n+1\right)-1}$$

ويكافئ

$$U_{n+1}=\frac{3\left(\frac{3}{2}\right)^n+3+1}{3\left(\frac{3}{2}\right)^n+3-1}$$

$$=\frac{3\left(\frac{3}{2}\right)^n+4}{3\left(\frac{3}{2}\right)^n+2}$$

$$=\frac{3\left(\frac{3}{2}\right)^n+2+2}{3\left(\frac{3}{2}\right)^n+2}$$

$$=\frac{3\left(\frac{3}{2}\right)^n+2}{3\left(\frac{3}{2}\right)^n+2}+\frac{2}{3\left(\frac{3}{2}\right)^n+2}$$

ومنه:

$$U_{n+1}=1+\frac{2}{3\left(\frac{3}{2}\right)^n+2}$$

نسحب العدد (2) كعامل مشترك من $\frac{2}{3\left(\frac{3}{2}\right)^n+2}$ نجد

$$U_{n+1}=1+\frac{2}{2}\;\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}$$

$$U_{n+1} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + 1}$$

ومنه الخاصية $P(n+1)$ محققة

إذن: من أجل كل عدد طبيعي n: $U_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$

3- ب - حساب: $\lim_{n\to+\infty} U_n$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}\right)$$

ولكن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$ ومنه

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n = 1}$$

.34 بكالوريا 2008 علوم تجريبية

الموضوع الثاني - التمرين الثاني

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي:

$u_0 = \frac{5}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2$$

1-أ-ارسم في معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ والمنحني (d) الممثل للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \frac{2}{3}x + 2$$

1-ب- باستعمال الرسم السابق، مثل على حامل محور الفواصل وبدون حساب الحدود:

u_0, u_1, u_2, u_3 و u_4

1-جـ- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2-أ- برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n: $u_n \leq 6$

2-ب- تحقق ان (u_n) متزايدة.

2-جـ- هل (u_n) متقاربة؟ برّر اجابتك.

3- نضع من اجل كل عدد طبيعي n: $v_n = u_n - 6$

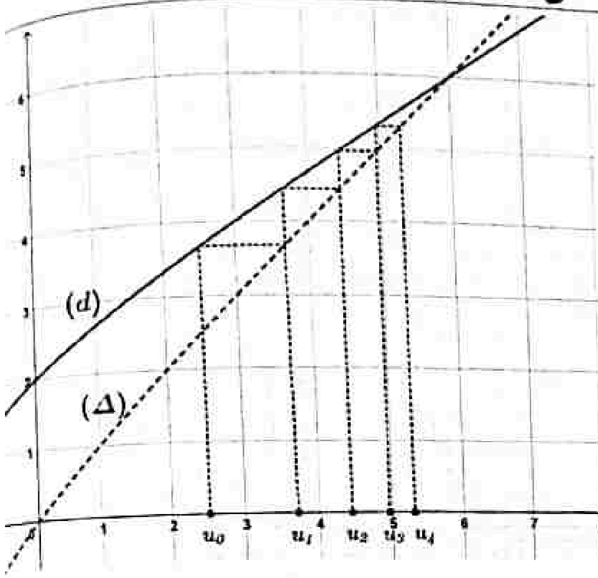
3-أ-اثبت أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

3-ب-اكتب عبارة u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim_{n\to\infty} u_n$.

الحل

1-أ – رسم المستقيم (Δ) و (d) منحنى الدالة f

1-ب- تمثيل الحدود U_0 ، U_1 ، U_2 ، U_3 ، U_4 على الشكل



1-جـ - وضع تخمين حول تغير اتجاه المتتالية (U_n) وتقاربها:

نلاحظ أن $U_0 < U_1 < U_2 < U_3 < U_4$

ومنه تبدو (U_n) متتالية متزايدة وتتقارب نحو فاصلة نقطة تقاطع (Δ) و(d)

2-أ- البرهان بالتراجع من أجل $n \in N$ أن: $U_n \leq 6$

- نسمي $P(n)$ الخاصية $U_n \leq 6$

- من أجل $n = 0$ لدينا $U_0 = \frac{5}{2}$ و $\frac{5}{6} < 6$

ومنه $U_0 \leq 6$ أي $P(O)$ محققة من أجل $n = 0$

- نفرض أن $P(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n أي $U_n \leq 6$ محققة.

ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $U_{n+1} \leq 6$ محققة

لدينا من الفرضية $U_n \leq 6$

نضرب الطرفين في $\frac{2}{3}$ ثم نضيف لهما 2 نجد:

$$\frac{2}{3}U_n + 2 \leq 6\left(\frac{2}{3}\right) + 2$$

$$U_{n+1} \leq 6$$

ومنه الخاصية $P(n+1)$ محققة

- إذن $U_n \leq 6$ من أجل كل عدد طبيعي n

2-ب ـالتحقق أن المتتالية (U_n) متزايدة:

نتحقق أن إشارة الفرق $U_{n+1} - U_n \geq 0$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{2}{3}U_n + 2 - U_n = \frac{-U_n + 6}{3}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{3}(-U_n + 6)$$

لكن لدينا $U_n \leq 6$ أي $U_n - 6 \leq 0$ نضرب الطرفين في (-1) نجد $-U_n + 6 \geq 0$

ومنه $U_{n+1} - U_n \geq 0$

ومنه المتتالية (U_n) متزايدة

2-جـ معرفة إن كانت (U_n) متقاربة:

بما أن (U_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 6 فهي متقاربة نحو نهايتها l

3-أ - البرهان أن (V_n) متتالية هندسية:

تكون (V_n) متتالية هندسية إذا كان $V_{n+1} = V_n \times q$

$$V_n = U_n - 6$$

$$V_{n+1} = U_{n+1} - 6$$

$$V_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + 2 - 6 = \frac{2}{3}U_n - 4$$

نخرج $\frac{2}{3}$ كعامل مشترك $V_{n+1} = \frac{2}{3}(U_n - 6)$

إذن $\boxed{V_{n+1} = \frac{2}{3}V_n}$

ومنه (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$

حساب V_0:

$$V_0 = U_0 - 6 = \frac{5}{2} - 6$$

$$\boxed{V_0 = \frac{-7}{2}}$$

3-ب- استنتاج V_n بدلالة n :

لدينا: $V_n = V_p \times q^{n-p}$ مع $n \geq p$

$$V_n = V_0 \times q^n$$

ومنه $\boxed{V_n = \frac{-7}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n}$

استنتاج: $\lim_{n\to+\infty} U_n$

لدينا $V_n = U_n - 6$ ومنه $U_n = V_n + 6$

$$U_n = \frac{-7}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + 6$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{-7}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + 6\right)$$

لكن $-1 < \frac{2}{3} < 0$ لأنّ $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

ومنه $\boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n = 6}$

مواضيع شعبة تقني رياضي

35. بكالوريا 2021 تقني رياضي

الموضوع الأول-التمرين الأول

المتتالية العددية (u_n) معرفة بحدها الأول u_0 حيث $u_0 = 3$ ومن اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{7}{9}u_n + 1$.

1) أ- برهن بالتراجع من كل عدد طبيعي n أن $u_n < \frac{9}{2}$

ب- بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج انها متقاربة.

2) المتتالية العددية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{1}{3}u_n - \frac{3}{2}$

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{7}{9}$ ثم احسب حدها الأول.

ب- اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n .

ج- استنتج انه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = -\frac{3}{2}\left(\frac{7}{9}\right)^n + \frac{9}{2}$ ثم احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

3) احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث $S_n = \frac{1}{3}u_0 + \frac{1}{3}u_1 + \cdots + \frac{1}{3}u_n$

الحل

1-أ-البرهان بالتراجع أن : $u_n < \frac{9}{2}$

نسمي $P(n)$ هاته الخاصية : $u_n < \frac{9}{2}$

نتأكد من أجل $n = 0$: $u_0 = 3 < \frac{9}{2}$

أي $P(0)$ محققة :

نفرض صحة الخاصية $P(n)$: $u_n < \frac{9}{2}$

ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $u_{n+1} < \frac{9}{2}$

لدينا من الفرضية : $u_n < \frac{9}{2}$

نضرب في $\frac{7}{9}$ نجد : $\frac{7}{9}u_n < \frac{7}{2}$

نضيف 1 فنجد : $\frac{7}{9}u_n + 1 < \frac{9}{2}$

ومنه $u_{n+1} < \frac{9}{2}$

أي $P(n+1)$ محققة من أجل كل $n+1$

اذن من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n < \frac{9}{2}$

1-ب-بيان أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما

حتى تكون المتتالية (u_n) متزايدة تماما يجب : $u_{n+1} - u_n > 0$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{7}{9}u_n + 1 - u_n$$
$$= -\frac{2}{9}u_n + 1$$

نعلم أن $u_n < \frac{9}{2}$ ومنه $-\frac{2}{9}u_n > -1$

أي $-\frac{2}{9}u_n + 1 > 0$

وبالتالي $u_{n+1} - u_n > 0$

ومنه (u_n) متتالية متزايدة تماما

استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة:

بما أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الاعلى بـ $\frac{9}{2}$ $\left(u_n < \frac{9}{2}\right)$ فهي متقاربة نحو نهايتها l حيث $l \leq \frac{9}{2}$

2-أ-البرهان أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{7}{9}$:

لدينا $v_n = \frac{1}{3}u_n - \frac{3}{2}$

حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية يجب أن تحقق : $v_{n+1} = v_n \times q$

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}u_{n+1} - \frac{3}{2}$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{7}{9}u_n + 1\right) - \frac{3}{2}$$
$$= \frac{7}{27}u_n - \frac{7}{6}$$

نعلم أن $v_n = \frac{1}{3}u_n - \frac{3}{2}$ إذن $\frac{1}{3}u_n = v_n + \frac{3}{2}$

ومنه $u_n = 3v_n + \frac{9}{2}$

أي $v_{n+1} = \frac{7}{27}\left(3v_n + \frac{9}{2}\right) - \frac{7}{6}$

ومنه $v_{n+1} = \frac{7}{9}v_n$

اذن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{7}{9}$ وحدها الاول v_0 حيث:

$$v_0 = \frac{1}{3}u_0 - \frac{3}{2} = \frac{1}{3}(3) - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

2-ب-كتابة عبارة الحد العام لـ (v_n) بدلالة n:

$$v_n = v_0 \times q^n = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{7}{9}\right)^n$$
$$v_n = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{7}{9}\right)^n$$

2-جـ-استنتاج أنه من أجل كل n عدد طبيعي

$$u_n = -\frac{3}{2}\left(\frac{7}{9}\right)^n + \frac{9}{2}$$

لدينا $u_n = 3v_n + \frac{9}{2}$

أي $u_n = -\frac{3}{2}\left(\frac{7}{9}\right)^n + \frac{9}{2}$

حساب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} -\frac{3}{2}\left(\frac{7}{9}\right)^n + \frac{9}{2} = \frac{9}{2}$$

لأن $-1 < \frac{7}{9} < 1$ ومنه $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^n = 0$

3-حساب المجموع S_n

لدينا $S_n = \frac{1}{3}u_0 + \frac{1}{3}u_1 + \cdots + \frac{1}{3}u_n$

و $v_n = \frac{1}{3}u_n - \frac{3}{2}$

ومنه $\frac{1}{3}u_n = v_n + \frac{3}{2}$

$$S_n = v_0 + \frac{3}{2} + v_1 + \frac{3}{2} + \cdots + v_n + \frac{3}{2}$$

$$= \left(\underbrace{(v_0 + v_1 + \cdots + v_n)}_{\text{مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية}} + \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \cdots + \frac{3}{2}\right)\right)$$

$$= v_0\frac{q^{n+1}-1}{q-1} + \frac{3}{2}(n+1)$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{7}{9}\right)^{n+1} - 1}{\left(\frac{7}{9}\right) - 1} + \frac{3}{2}n + \frac{3}{2}$$

$$= \frac{9}{4}\left(\left(\frac{7}{9}\right)^{n+1} - 1\right) + \frac{3}{2}n + \frac{3}{2}$$

$$= \frac{9}{4}\left(\frac{7}{9}\right)^{n+1} - \frac{9}{4} + \frac{3}{2}n + \frac{3}{2}$$

$$S_n = \frac{9}{4}\left(\frac{7}{9}\right)^{n+1} + \frac{3}{2}n - \frac{3}{4}$$

36. بكالوريا 2021 تقني رياضي

الموضوع الثاني-التمرين الثالث

المتتالية العددية (u_n) معرفة بـ: $u_0 = 3 + e^{-2}$

ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = u_n^2 - 6u_n + 12$$

1) أ- تحقق أنه من اجل كل عدد طبيعي n :

$u_{n+1} = (u_n - 3)^2 + 3$.

ب- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3 < u_n < 4$.

2) أ- ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

ب- استنتج أنها متقاربة.

3) المتتالية العددية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$$v_n = \ln(u_n - 3)$$

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 يطلب حساب حدها الأول.

ب- اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 3 + e^{-2^{n+1}}$

جـ- احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

4- نضع من أجل كل عدد طبيعي n :

$$p_n = (u_0 - 3)(u_1 - 3) \times \ldots \times (u_n - 3)$$

احسب p_n بدلالة n .

الحل

1-أ-التحقق أن $u_{n+1} = (u_n - 3)^2 + 3$ من أجل كل عد طبيعي n :

لدينا:

$$u_{n+1} = u_n^2 - 6u_n + 12$$

$$u_{n+1} = (u_n - 3)^2 + 3 = u_n^2 + 9 - 6u_n + 3$$

$$= u_n^2 - 6u_n + 12$$

ومنه $u_{n+1} = (u_n - 3)^2 + 3$

1-ب-البرهان بالتراجع أن : $3 < u_n < 4$

نسمي $P(n)$ هاته الخاصية : $3 < u_n < 4$

نتحقق من صحة الخاصية من أجل $n = 0$

$$3 < u_0 < 4$$

$$3 < 3 + e^{-2} < 4$$

ومنه $P(n)$ محققة من أجل $n = 0$

نفرض أن الخاصية $P(n)$ صحيحة حيث $3 < u_n < 4$ ونبرهن $P(n+1)$ أي

$$3 < u_{n+1} < 4$$

لدينا من الفرضية $3 < u_n < 4$

نضيف -3 نجد : $0 < u_n - 3 < 1$

بإدخال التربيع نجد : $0 < (u_n - 3)^2 < 1$
نضيف 3 فنجد : $3 < (u_n - 3)^2 + 3 < 4$
أي $3 < u_{n+1} < 4$ ومنه $P(n+1)$ محققة
اذن من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $3 < u_n < 4$

2-أ-دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n):

$$u_{n+1} - u_n = (u_n - 3)^2 + 3 - u_n$$
$$= (u_n - 3)^2 - (u_n - 3)$$
$$= (u_n - 3)(u_n - 3 - 1)$$
$$= (u_n - 3)(u_n - 4)$$

$3 < u_n$ ومنه $u_n - 3 > 0$ ، $u_n < 4$
ومنه: $u_n - 4 < 0$
وبالتالي $u_{n+1} - u_n < 0$ أي المتتالية (u_n) متناقصة تماما

2-ب-استنتاج أن (u_n) متقاربة :

بما أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الاسفل بـ 3 $(u_n > 3)$ فهي متقاربة نحو نهايتها l حيث $l \geq 3$

3-أ-تبيان أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 :

حتى تكون (v_n) هندسية يجب :
$$v_{n+1} = v_n \times q = v_n \times 2$$
$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 3)$$
$$= \ln((u_n - 3)^2 + 3 - 3)$$
$$= \ln(u_n - 3)^2$$
$$= 2\ln(u_n - 3) = 2v_n$$
لأن $(\ln(a)^b = b\ln(a))$
ومنه $v_{n+1} = 2v_n$
اذن المتتالية (v_n) هندسية اساسها $q = 2$ وحدها الاول v_0 حيث:
$$v_0 = \ln(u_0 - 3) = \ln(3 + e^{-2} - 3)$$
$$= \ln e^{-2} = -2$$

3-ب-كتابة (v_n) بدلالة n واستنتاج أن:
$$u_n = 3 + e^{-2^{n+1}}$$

$$v_n = v_0 \times q^n = -2 \times 2^n = -2^{n+1}$$
$$v_n = -2^{n+1}$$

استنتاج أن : $u_n = 3 + e^{-2^{n+1}}$

لدينا $v_n = \ln(u_n - 3)$
$$u_n - 3 = e^{v_n}$$
$$u_n = e^{v_n} + 3$$
$$u_n = 3 + e^{-2^{n+1}}$$

3-جـ-حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} 3 + e^{-2^{n+1}} = 3$$
لأن : $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-2^{n+1}} = 0$

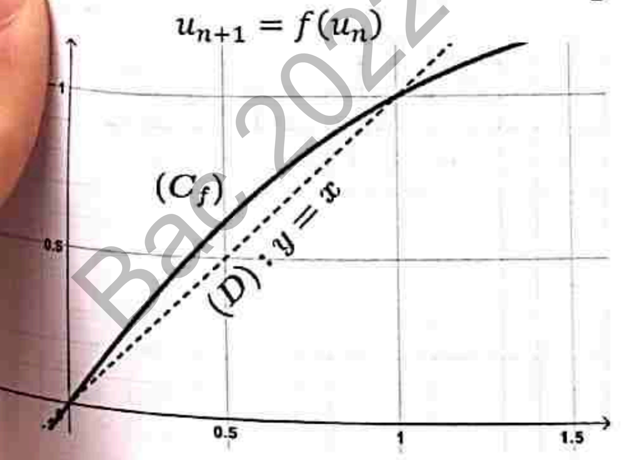
4-حساب P_n بدلالة n :

لدينا
$$P_n = (u_0 - 3)(u_1 - 3) \times \ldots \times (u_n - 3)$$
و $u_n - 3 = e^{v_n}$
ومنه $P_n = e^{v_0} \times e^{v_1} \times \ldots \times e^{v_n}$
$$P_n = e^{\overbrace{v_0 + v_1 + \cdots + v_n}^{}_{\text{مجموع متتالية هندسية}}}$$
$$P_n = e^{v_0 \frac{q^{n+1}-1}{q-1}} = e^{\left(-2\frac{2^{n+1}-1}{2-1}\right)}$$
$$= e^{-2(2^{n+1}-1)}$$
ومنه
$$P_n = e^{-2(2^{n+1}-1)}$$

.37 بكالوريا 2020 تقني رياضي

الموضوع الأول – التمرين الأول

الدالة العددية f معرفة ومتزايدة تماما على $]0;+\infty[$ بـ:
$$f(x) = \frac{3x}{\sqrt{4x^2 + 5}}$$
(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ و (D) المستقيم ذو المعادلة $y = x$
المتتالية العددية (u_n) معرفة بحدها الأول u_0 حيث: $u_0 = \frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n:
$$u_{n+1} = f(u_n)$$



1-أ) أعد رسم الشكل المقابل ثم مثّل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 مبرزا خطوط الإنشاء
ب-ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها

2-أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$\frac{1}{2} \leq u_n < 1$$

ب) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما، ثم استنتج أنها متقاربة

3) المتتالية العددية (v_n) معرّفة على N:

$$v_n = \frac{u_n^2}{1 - u_n^2}$$

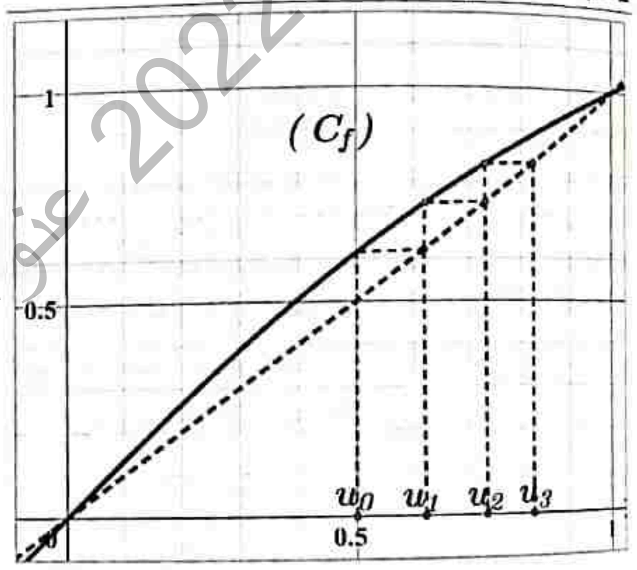
برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{9}{5}$ يُطلب تعيين حدها الأول v_0

4-أ) اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

ب) أحسب نهاية المتتالية (u_n)

الحل

1-أ-إعادة الرسم:



تمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 .

في الرسم السابق

1-ب-التخمين حول اتجاه تغيّر المتتالية

نلاحظ أن $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$

ومنه (u_n) متتالية متزايدة تماما ومتقاربة نحو نقطة التقاطع بين منحنى الدالة f والمستقيم ذو $y = x$ أي متقاربة نحو 1.

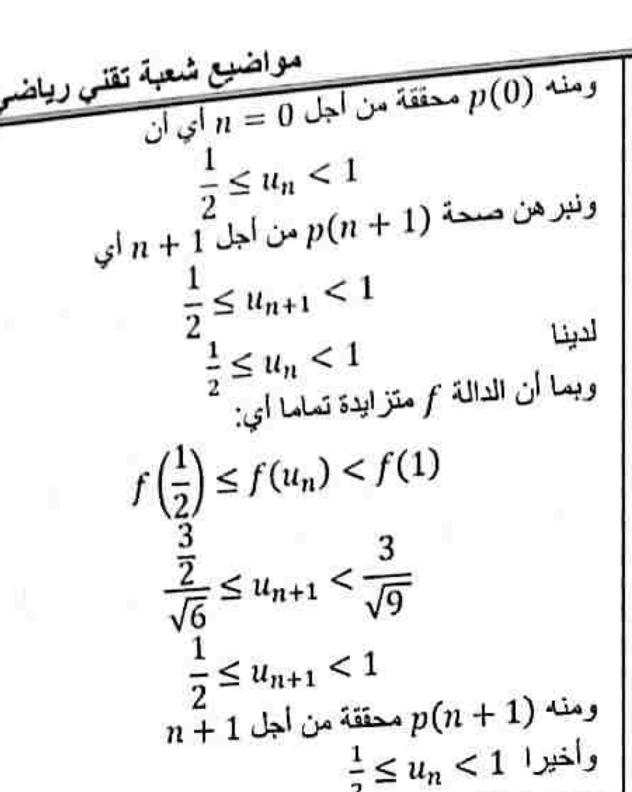
2-أ-البرهان أن $\frac{1}{2} =< u_n < 1$

نضع الخاصية $p(n)$:

$$p(n): \frac{1}{2} \leq u_n < 1$$

-التحقق من صحة $p(n)$ من اجل $n = 0$

$$\frac{1}{2} \leq u_0 = \frac{1}{2} < 1$$



ومنه $p(0)$ محققة من أجل $n = 0$ أي أن

$$\frac{1}{2} \leq u_n < 1$$

ونبرهن صحة $p(n+1)$ من اجل $n+1$ أي

$$\frac{1}{2} \leq u_{n+1} < 1$$

لدينا

$$\frac{1}{2} \leq u_n < 1$$

وبما أن الدالة f متزايدة تماما أي:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(u_n) < f(1)$$

$$\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{6}} \leq u_{n+1} < \frac{3}{\sqrt{9}}$$

$$\frac{1}{2} \leq u_{n+1} < 1$$

ومنه $p(n+1)$ محققة من أجل $n+1$

وأخيرا $\frac{1}{2} \leq u_n < 1$

2-ب-البرهان أن (u_n) متتالية متزايدة تماما

ندرس إشارة الفرق بين $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n}{\sqrt{4u_n^2 + 5}} - u_n$$

$$= \frac{3u_n - u_n\sqrt{4u_n^2 + 5}}{\sqrt{4u_n^2 + 5}}$$

$$= \frac{u_n\left(3 - \sqrt{4u_n^2 + 5}\right)}{\sqrt{4u_n^2 + 5}}$$

$$= \frac{u_n\left(3 - \sqrt{4u_n^2 + 5}\right)}{\sqrt{4u_n^2 + 5}} \times \frac{3 + \sqrt{4u_n^2 + 5}}{3 + \sqrt{4u_n^2 + 5}}$$

$$= \frac{u_n(9 - 4u_n^2 - 5)}{\sqrt{4u_n^2 + 5}\left(3 + \sqrt{4u_n^2 + 5}\right)}$$

$$= \frac{u_n(4 - 4u_n^2)}{\sqrt{4u_n^2 + 5}\left(3 + \sqrt{4u_n^2 + 5}\right)}$$

$$= \frac{4u_n(1 - u_n^2)}{\sqrt{4u_n^2 + 5}\left(3 + \sqrt{4u_n^2 + 5}\right)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n(1 - u_n)(1 + u_n)}{\sqrt{4u_n^2 + 5}\left(3 + \sqrt{4u_n^2 + 5}\right)}$$

ومنه إشارة الفرق من إشارة $(1 - u_n)(1 + u_n)$ لأن $\sqrt{4u_n^2 + 5}\left(3 + \sqrt{4u_n^2 + 5}\right) > 0$ و $u_n > 0$

$u_n + 1 > 0$ و $1 - u_n > 1$ لأن $\frac{1}{2} \leq u_n < 1$

ومنه $u_{n+1} - u_n > 0$

إذن المتتالية (u_n) متزايدة تماما

استنتاج أن (u_n) متتالية متقاربة

بما أن (u_n) متتالية متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 1 فهي متقاربة

3-البرهان أن (v_n) متتالية هندسية

حتى تكون (v_n) متتالية هندسية بحيث:

$$v_{n+1} = v_n \times q$$

$$v_{n+1} = \frac{(u_{n+1})^2}{1-(u_{n+1})^2} = \frac{\left(\frac{3u_n}{\sqrt{4u_n^2+5}}\right)^2}{1-\left(\frac{3u_n}{\sqrt{4u_n^2+5}}\right)^2}$$

$$v_{n+1} = \frac{\frac{9u_n^2}{4u_n^2+5}}{1-\left(\frac{9u_n^2}{4u_n^2+5}\right)}$$

$$v_{n+1} = \frac{9u_n^2}{4u_n^2+5-9u_n^2}$$

$$v_{n+1} = \frac{9u_n^2}{5-5u_n^2} = \frac{9}{5}\left(\frac{u_n^2}{1-u_n^2}\right)$$

$$v_{n+1} = \frac{9}{5}v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{9}{5}$ وحدها الأول v_0

$$v_0 = \frac{u_0^2}{1-u_0^2} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}, \quad v_0 = \frac{1}{3}$$

4-أ-كتابة v_n بدلالة n

(v_n) متتالية هندسية ومنه:

$$v_n = v_0 \times q^n$$

$$v_n = \frac{1}{3}\left(\frac{9}{5}\right)^n$$

-استنتاج عبارة u_n بدلالة n

لدينا: $v_n = \frac{u_n^2}{1-u_n^2}$ ومنه:

$$u_n^2 = v_n - v_n u_n^2$$

$$u_n^2 + v_n u_n^2 = v_n$$

$$u_n^2(1+v_n) = v_n$$

$$u_n^2 = \frac{v_n}{1+v_n}$$

$$u_n = \sqrt{\frac{v_n}{1+v_n}}$$

$$u_n = \sqrt{\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{9}{5}\right)^n}{1+\frac{1}{3}\left(\frac{9}{5}\right)^n}}$$

4-ب-حساب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{9}{5}\right)^n}{1+\frac{1}{3}\left(\frac{9}{5}\right)^n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{9}{5}\right)^n+1}{1+\frac{1}{3}\left(\frac{9}{5}\right)^n} + \frac{-1}{1+\frac{1}{3}\left(\frac{9}{5}\right)^n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{1-\frac{1}{1+\frac{1}{3}\left(\frac{9}{5}\right)^n}} = 1$$

لأن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{9}{5}\right)^n = +\infty$ أي: $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{3}\left(\frac{9}{5}\right)^n} = 0$

.38 بكالوريا 2020 تقني رياضي

الموضوع الثاني - التمرين الثالث

المتتالية العددية (u_n) معرّفة بحدّها الأول u_0 حيث: $u_0 = \frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n فإنّ:

$$u_{n+1} = 3 - \frac{4}{u_n+2}$$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $-1 < u_n < 2$

2) أ-بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} - u_n = \frac{(2-u_n)(1+u_n)}{u_n+2}$

ب) حدّد اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ثمّ استنتج أنها متقاربة

3) المتتالية العددية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{u_n+\alpha}{u_n+1}$، حيث α عدد حقيقي

أ) أوجد α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$، ثمّ احسب حدّها الأول v_0

ب) بين عندئذ أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = \frac{2\times4^n-1}{4^n+1}$ ، ثمّ احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

الحل

1-البرهان بالتراجع أن: $-1 < u_n < 2$

نضع الخاصية $p(n)$: $p(n): -1 < u_n < 2$

التحقق من صحة الخاصية $p(n)$

من اجل $n = 0$

$$-1 < u_0 = \frac{1}{2} < 2$$

ومنه $p(0)$ محققة من اجل $n = 0$

نفرض صحة $p(n)$ من اجل كلّ n أي $-1 < u_n < 2$

ونبرهن صحة $p(n+1)$ من أجل $n+1$

أي أن $-1 < u_{n+1} < 2$

لدينا: $-1 < u_n < 2$

$$-1 + 2 < u_n + 2 < 2 + 2$$

$$1 < u_n + 2 < 4$$

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{u_n+2} < 1$$

$$1(-4) < -\frac{4}{u_n+2} < -4\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$-4 < -\frac{4}{u_n+2} < -1$$

$$-1 < 3 - \frac{4}{u_n+2} < 2$$

ومنه $-1 < u_{n+1} < 2$

ومنه $p(n+1)$ محققة من أجل $n+1$

واخيرا: $-1 < u_n < 2$ من اجل $n \in \mathbb{N}$

2-أ-البرهان أن: $u_{n+1} - u_n = \frac{(2-u_n)(1+u_n)}{u_n+2}$

لدينا $u_{n+1} - u_n = 3 - \frac{4}{u_n+2} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3(u_n+2) - 4 - u_n(u_n+2)}{u_n+2}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 6 - 4 - u_n^2 - 2u_n}{u_n+2}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + u_n + 2}{u_n+2} \text{............ (1)}$$

ومنه جهة أخرى $u_{n+1} - u_n = \frac{(2-u_n)(1+u_n)}{u_n+2}$

$$= \frac{2 + 2u_n - u_n - u_n^2}{u_n+2}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + u_n + 2}{u_n+2} \text{......... (2)}$$

ومنه $u_{n+1} - u_n = \frac{(2-u_n)(1+u_n)}{u_n+2}$

2-ب-تحديد اتجاه تغير المتتالية (u_n)

لدينا $u_{n+1} - u_n = \frac{(2-u_n)(1+u_n)}{u_n+2}$

ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

ومنه إشارة الفرق من إشارة البسط لأنّ: $u_n + 2 > 0$

لدينا: $u_n < 2$

لأن: $u_n > -1$

$$-u_n > -2$$

$$2 - u_n > -2 + 2$$

$$2 - u_n > 0$$

ومن جهة أخرى لدينا: $u_n > -1$ أي $u_n + 1 > 0$

ومنه فإن: $(2 - u_n)(u_n + 1) > 0$

أي أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما

استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة

بما أن (u_n) متتالية متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 2 فهي متقاربة نحو نهاية l

3-أ-إيجاد قيمة α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية

حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يجب تحقق:

$$v_{n+1} = v_n q$$

لدينا $v_{n+1} = \frac{u_n + \alpha}{u_n + 1}$ حيث α عدد حقيقي.

$$v_{n+1} = \frac{3 - \frac{4}{u_n+2} + \alpha}{3 - \frac{4}{u_n+2} + 1}$$

$$v_{n+1} = \frac{3(u_n+2) - 4 + \alpha(u_n+2)}{3(u_n+2) - 4 + (u_n+2)}$$

$$v_{n+1} = \frac{3u_n + 6 - 4 + \alpha u_n + 2\alpha}{3u_n + 6 - 4 + u_n + 2}$$

$$v_{n+1} = \frac{(3+\alpha)u_n + 2 + 2\alpha}{4u_n + 4}$$

$$v_{n+1} = \frac{(3+\alpha)u_n + 2(\alpha+1)}{4(u_n+1)}$$

$$v_{n+1} = \frac{(3+\alpha)}{4} \times \frac{\left(u_n + \frac{2\alpha+2}{3+\alpha}\right)}{u_n+1} \text{..........(*)}$$

ولدينا: $v_{n+1} = \frac{1}{4} v_n$

أي أن: $v_{n+1} = \frac{1}{4}\left(\frac{u_n+\alpha}{u_n+1}\right) \text{.......... (**)}$

بالمطابقة بين (*) و (**) نجد أن

$$\begin{cases} 3 + \alpha = 1 \\ \frac{2\alpha + 2}{3 + \alpha} = \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 + \alpha = 1 \\ 2\alpha + 2 = \alpha \end{cases}$$

$$\alpha = -2$$

-حساب v_0

$$v_0 = \frac{u_0 - 2}{u_0 + 1} = \frac{\frac{1}{2} - 2}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{4}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{2}{2}} = -\frac{3}{3}$$

$$v_0 = -1$$

3-ب-البرهان أن $u_n = \frac{2(4)^n-1}{4^n+1}$

لدينا (v_n) متتالية هندسية أي أن

$$v_n = v_0\, q^n$$

$$v_n = (-1)\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

ولدينا: $v_n = \frac{u_n-2}{u_n+1}$

$$u_n - 2 = u_n \times v_n + v_n$$
$$u_n - u_n \times v_n = v_n + 2$$
$$u_n(1 - v_n) = v_n + 2$$
$$u_n = \frac{v_n + 2}{1 - v_n}$$
$$u_n = \frac{-\left(\frac{1}{4}\right)^n + 2}{1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n} = \frac{2 - \frac{1}{4^n}}{1 + \frac{1}{4^n}}$$
$$u_n = \frac{2 - \frac{1}{4^n}}{1 + \frac{1}{4^n}} = \frac{\frac{2 \times 4^n - 1}{4^n}}{\frac{4^n + 1}{4^n}}$$
$$u_n = \frac{2 \times 4^n - 1}{4^n + 1}$$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

لدينا مما سبق

$$u_n = \frac{-\left(\frac{1}{4}\right)^n + 2}{1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n}$$

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{-\left(\frac{1}{4}\right)^n + 2}{1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n}\right)$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{1} = 2$$

39. بكالوريا 2019 تقني رياضي

الموضوع الأول – التمرين الأول

(u_n) و(v_n) المتتاليتان العدديتان المعرفتان على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 7u_n - 18n + 9 \end{cases} \quad \text{و} \quad v_n = u_n - 3n + 1$$

1-أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

2-اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

3-احسب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

4-أ-ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية لـ 7^n على 9

4-ب- ماهو باقي القسمة الاقليدية على 9 للعدد $1442^{2019} + 1962^{1954} + 1954^{1962}$ ؟

4-جـ- أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$6S_n - 7u_n \equiv 0[9]$$

الحل

1-اثبات أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول:

لدينا: $v_{n+1} = u_{n+1} - 3(n+1) + 1$
$$= 7u_n - 18n + 9 - 3n - 2$$
$$= 7u_n - 21n + 7$$
$$= 7(u_n - 3n + 1)$$
$$= 7v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 7$ وحدها الأول $v_0 = u_0 - 3(0) + 1 = 1$

2-كتابة v_n و u_n بدلالة n:

$$v_n = v_0 q^n = 1(7)^n = 7^n$$

استنتاج u_n بدلالة n:

لدينا: $v_n = u_n - 3n + 1$

ومنه $u_n = v_n + 3n - 1$

$$u_n = 7^n + 3n - 1$$

3-حساب بدلالة n المجموع S_n:

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$
$$= (v_0 + 3(0) - 1) + (v_1 + 3(1) - 1) + (v_n + 3(2) - 1) + \cdots + (v_n + 3(n) - 1)$$
$$= (v_0 + v_1 + v_2 + v_n) + 3(0 + 1 + 2 + \cdots + n) - 1(n+1)$$
$$= \left[v_0\left(\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}\right)\right] + 3\left[\frac{n}{2}(n+1)\right] - (n+1)$$
$$S_n = \left(\frac{7^{n+1} - 1}{6}\right) + \left(\frac{(n+1)(3n-2)}{2}\right)$$

4-أ-دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية لـ 7^n على 9

لدينا: $7^0 \equiv 1[9]$، $7^1 \equiv 7[9]$، $7^2 \equiv 4[9]$ و $7^3 \equiv 1[9]$، ومنه القسمة دورية ودورها 3

ومنه من أجل $n = 3k$ باقي قسمة 7^n على 9 هو 1

ومنه من أجل $n = 3k + 1$ باقي قسمة 7^n على 9 هو 7

ومنه من أجل $n = 3k + 2$ باقي قسمة 7^n على 9 هو 4

4-ب-إيجاد باقي قسمة العدد $1442^{2019}+1962^{1954}+1954^{1962}$ على 9

لدينا: $1442 = 160\times 9+2$

ومنه $1442\equiv 2[9]$

و $1962 = 9\times 218+0$

$2019 = 673\times 3$

أي $1962\equiv 0[9]$

و $1954 = 217\times 9+1$

ومنه $1954\equiv 1[9]$

$1442^{2019}+1962^{1954}+1954^{1962}$
$\equiv (2^{3\times 673}+0+1^{1962})[9]$

ولدينا : $2^3=8$ و $8\equiv -1[9]$

ومنه : $2^3\equiv -1[9]$

ومنه

$1442^{2019}+1962^{1954}+1954^{1962}$
$\equiv ((-1)^{673}+1)[9]$

أي $1442^{2019}+1962^{1954}+1954^{1954}\equiv -1[9]$

ومنه باقي قسمة العدد $1442^{2019}+1962^{1954}+1954^{1954}$ على 9 هو 0

2-جـ-اثبات من أجل كل $n\in\mathbb{N}$:
$6S_n-7u_n\equiv 0[9]$

لدينا:

$$6S_n-7u_n=(7^{n+1}+9n^2+3n-7)-(7^{n+1}+21n-7)$$
$$=9n^2-18n=9(n^2-2n)$$

أي: $6S_n-7u_n=9k$ حيث $k=n^2-2n$

ومنه $6S_n-7u_n\equiv 0[9]$

40. بكالوريا 2018 تقني رياضي

الموضوع الأول – التمرين الأول

f الدالة العددية المعرفة والمتزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{2x}{xe+1}$ (e أساس اللوغاريتم النيبيري) و (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $u_0=\frac{5}{4e}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_{n+1}=f(u_n)$$

1-أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n

$$u_n>\frac{1}{e}$$

1-ب- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_{n+1}-u_n=\frac{eu_n\left(\frac{1}{e}-u_n\right)}{eu_n+1}$$

ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) وبرر أنها متقاربة.

2-لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $v_n=\frac{e.u_n}{e.u_n-1}$

-أثبت أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 2، يطلب تعيين حدها الأول v_0 وعبارة v_n بدلالة n

3- أ- تحقق أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$:
$v_n=1+\frac{1}{e.u_n-1}$ واستنتج عبارة u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

3-ب- احسب بدلالة n المجموع S_n حيث:
$S_n=v_0+v_1+\cdots+v_n$

4-أ-ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7.

4-ب-عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها S_n يقبل القسمة على 7.

الحل

1-أ- البرهان بالتراجع أن $u_n>\frac{1}{e}$

- نسمي $p(n)$ الخاصية $u_n>\frac{1}{e}$
- نتحقق من صحة الخاصية من أجل $n=0$

لدينا $u_0=\frac{5}{4e}>\frac{1}{e}$ محققة

- نفرض أن $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي كيفي n أي $u_n>\frac{1}{e}$

ونبرهن أن $p(n+1)$ صحيحة من أجل $n+1$

أي $u_{n+1}>\frac{1}{e}$

لدينا من الفرضية $u_n>\frac{1}{e}$

ولدينا f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ وعليه $f(u_n)>f\left(\frac{1}{e}\right)$

$f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{2}{e}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{e}$

ومنه $u_{n+1}>\frac{1}{e}$ أي $p(n+1)$ محققة.

- وأخيرا $u_n>\frac{1}{e}$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$

1-ب اثبات أن $u_{n+1}-u_n=\frac{e.u_n\left(\frac{1}{e}-u_n\right)}{e.u_n+1}$

لدينا: $u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n}{e.u_n+1}-u_n$

$$=\frac{2u_n-eu_n^2-u_n}{e.u_n+1}$$

$$= \frac{u_n - eu_n^2}{e.u_n + 1}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{e.u_n\left(\frac{1}{e} - u_n\right)}{e.u_n + 1}$$

- استنتاج اتجاه تغير (u_n)

لدينا: $u_n > \frac{1}{e}$ وعليه $0 > \frac{1}{e} - u_n$

ومنه $e.u_n > 0$ لأنّ $\frac{e.u_n(\frac{1}{e}-u_n)}{e.u_n+1} < 0$

وعليه $u_{n+1} - u_n < 0$

ومنه (u_n) متناقصة تماما

بما أن (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد $\frac{1}{e}$ فهي متقاربة نحو نهايتها l

2-اثبات أن (v_n) هندسية مع تعيين أساسها وحدها الأول

لدينا $v_{n+1} = \frac{e.u_{n+1}}{e.u_{n+1}-1}$

$$= \frac{e\left(\frac{2u_n}{e.u_n+1}\right)}{e\left(\frac{2u_n}{e.u_n+1}\right) - 1}$$

$$= \frac{\frac{2eu_n}{eu_n+1}}{\frac{2.eu_n - eu_n - 1}{eu_n+1}}$$

$$= \frac{2eu_n}{eu_n - 1}$$

$$= 2\left(\frac{eu_n}{e.u_n - 1}\right)$$

ومنه $v_{n+1} = 2v_n$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها 2

وحدها الأول:

$$v_0 = \frac{e.u_0}{eu_0 - 1} = 5$$

ومنه $v_n = 5 \times 2^n$

3-أ- التحقق أن $v_n = 1 + \frac{1}{e.u_n-1}$

لدينا $v_n = \frac{eu_n}{e.u_n-1}$ ومنه

$$v_n = \frac{e.u_n - 1 + 1}{e.u_n - 1} = 1 + \frac{1}{e.u_n - 1}$$

- استنتاج عبارة (u_n)

$$v_n - 1 = \frac{1}{e.u_n - 1}$$

أي $\frac{1}{v_n-1} = e.u_n - 1$

$$\frac{1}{v_n - 1} + 1 = e.u_n$$

$$u_n = \frac{1}{e}\left(\frac{1}{v_n - 1} + 1\right)$$

وبالتالي $u_n = \frac{1}{e}\left(\frac{1}{5\times 2^n - 1} + 1\right)$

حساب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{e}$ لأنّ $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5\times2^n-1}\right) = 0$

3-ب- حساب S_n

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

$$S_n = v_0\left[\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right]$$

وعليه $S_n = 5\left[\frac{1-2^{n+1}}{1-2}\right]$

$$S_n = 5(2^{n+1} - 1)$$

4-أ- دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7

$n = 0:\ 2^0 \equiv 1[7]$

$n = 1:\ 2^1 \equiv 2[7]$

$n = 2:\ 2^2 \equiv 4[7]$

$n = 3:\ 2^3 \equiv 1[7]$

القسمة دورية دورها 3.

$n =$	$3k$	$3k+1$	$3k+2$	
$2^n \equiv$	1	2	4	[7]

بواقي 2^n على 7 من أجل كل عدد طبيعي n هي $r = \{1,2,4\}$

4-ب- تعيين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يقبل S_n القسمة على 7

S_n يقبل القسمة على 7 معناه:

$$S_n \equiv 0[7]$$

$$5(2^{n+1} - 1) \equiv 0[7]$$

$$5 \times 2^{n+1} \equiv 5[7]$$

أي $2^{n+1} \equiv 1[7]$

ومنه $2 \times 2^n \equiv 1[7]$

وعليه $2^n \equiv 4[7]$

من الجدول السابق نجد لما $2^n \equiv 4[7]$

يكون $n = 3k + 2$ مع $k \in \mathbb{N}$

41. بكالوريا 2018 تقني رياضي

الموضوع الثاني – التمرين الأول

لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام كما يلي $u_n = 2(3)^n$ و (v_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $v_0 = 4$ ومن أجل كل n من $\mathbb{N}$:
$v_{n+1} = 5v_n + u_n$

1-نضع من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $w_n = \frac{v_n}{u_n} + \frac{1}{2}$
-اثبت أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{5}{3}$ ، يطلب تعيين حدها الأول

2-اكتب عبارة الحد العام w_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_n = 5^{n+1} - 3^n$

3-ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الاقليدية للعددية 3^n و 5^n على 8

4-عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد v_n على 8

الحل

1-اثبات أن المتتالية (w_n) هندسية:

لدينا (w_n) هندسية أي: $w_{n+1} = w_n . q$

$$w_n = \frac{v_n}{u_n} + \frac{1}{2}$$

ومنه

$$w_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} + \frac{1}{2}$$

أي

$$= \frac{5v_n + u_n}{2(3)^{n+1}} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{5v_n + u_n}{3u_n} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{10v_n + 2u_n + 3u_n}{6u_n}$$

$$= \frac{10v_n + 5u_n}{6u_n}$$

$$= \frac{5}{3}\left(\frac{2v_n + u_n}{2u_n}\right)$$

$$= \frac{5}{3}w_n = \frac{5}{3}\left(\frac{v_n}{u_n} + \frac{1}{2}\right)$$

ومنه (w_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{5}{3}$

حساب w_0

لدينا

$$w_n = \frac{v_n}{u_n} + \frac{1}{2}$$

إذن

$$w_0 = \frac{v_0}{u_0} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{4}{2(3)^0} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{4}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$w_0 = \frac{5}{2}$$

2-كتابة w_n بدلالة n

$$w_n = w_0\, q^n$$

$$w_n = \frac{5}{2}\left(\frac{5}{3}\right)^n$$

-استنتاج أن $v_n = 5^{n+1} - 3^n$

لدينا:

$$w_n = \frac{v_n}{u_n} + \frac{1}{2}$$

$$v_n = \left(w_n - \frac{1}{2}\right)u_n$$

$$= \left(\frac{5}{2}\left(\frac{5}{3}\right)^n - \frac{1}{2}\right)2(3)^n$$

$$= \frac{5}{2} \times \frac{(5)^n}{(3)^n} \times 2(3)^n - \frac{1}{2} \times 2(3)^n$$

ومنه $v_n = (5)^{n+1} - (3)^n$

3-دراسة حسب قيم n بواقي القسمة الاقليدية لـ 3^n على 8

$3^0 \equiv 1[8]$ ، $n = 0$
$3^1 \equiv 3[8]$ ، $n = 1$
$3^2 \equiv 1[8]$ ، $n = 2$

القسمة دورية دورها 2

n	$2k$	$2k+1$	
$3^n \equiv$	1	3	[8]

بواقي 3^n على 8 من أجل كل عدد طبيعي n هي: $r = \{1;3\}$

دراسة بواقي 5^n على 8

$5^0 \equiv 1[8]$ $n = 0$
$5^1 \equiv 5[8]$ $n = 1$
$5^2 \equiv 1[8]$ $n = 2$

القسمة دورية دورها 2

n	$2k$	$2k+1$	
$5^n \equiv$	1	5	[8]

بواقي 5^n على 8 من أجل كل عدد طبيعي n هي $r = \{1;5\}$

4-تعيين بواقي قسمة v_n على 8

$$v_n = 5^{n+1} - 3^n$$

n	$2k$	$2k+1$	
$5^n \equiv$	1	5	[8]
$5^{n+1} \equiv$	5	1	[8]
$3^n \equiv$	1	3	[8]
$v_n = 5^{n+1} - 3^n \equiv$	4	6	[8]

لأن
$-2 \equiv -2 + 8[8]$
$-2 \equiv 6[8]$

ومنه بواقي القسمة الاقليدية لـ v_n على 8 من أجل كل عدد طبيعي n هي: $r = \{4;6\}$

42. بكالوريا 2017 تقني رياضي الدورة الثانية

الموضوع الثاني – التمرين الثاني

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_1 = \frac{1}{a}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $u_{n+1} = \frac{n+1}{an}u_n$

حيث a عدد حقيقي أكبر من أو يساوي 2.

1- أ- بيّن أنّ من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $u_n > 0$

1-ب- بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة

2- نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $v_n = \frac{1}{an}u_n$

2-أ- بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{a}$ وعين حدها الأول v_1 بدلالة a

2-ب-جد بدلالة n و a عبارة الحد العام v_n ثم استنتج عبارة u_n وأحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

3- احسب بدلالة n و a المجموع S_n حيث

$$S_n = u_1 + \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{3}u_3 + \cdots + \frac{1}{n}u_n$$

ثم عين قيمة a حيث $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2016}$

الحل

1-أ- اثبات أن $u_n > 0$

باستعمال البرهان بالتراجع

نسمي $p(n)$ الخاصية "$u_n > 0$"

نتحقق من صحة الخاصية من أجل $n = 1$

$$u_1 = \frac{1}{a}$$

حيث $a \geq 2$ ومنه $\frac{1}{a} \geq 0$ وعليه $u_1 \geq 0$

ومنه $p(1)$ محققة

نفرض صحة الخاصية $p(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، ونبرهن ان $p(n+1)$ صحيحة

لدينا من الفرضية $u_n \geq 0$

ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ و $a > 2$

فإن $\frac{n+1}{an} \geq 0$ وعليه

$$\frac{n+1}{an}.u_n \geq 0$$

ومنه $u_{n+1} \geq 0$ أي $p(n+1)$ محققة

وعليه حسب الاستدلال بالتراجع فإن $u_n \geq 0$ من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$

1-ب- بيان أن (u_n) متناقصة تماما

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{n+1}{a.n}\right)u_n - u_n$$
$$= \frac{n.u_n + u_n - an.u_n}{an}$$
$$= u_n\left(\frac{n+1-an}{an}\right)$$
$$= \left(\frac{n(1-a)+1}{an}\right).u_n$$

لدينا $a \geq 2$ ومنه $-a \leq -2$ أي $1-a \leq -1$

من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ يكون $n(1-a)+1 \leq 0$

وعليه

$$\left(\frac{n(1-a)+1}{an}\right)u_n \leq 0$$

ومنه $u_{n+1} - u_n \leq 0$

وعليه (u_n) متتالية متناقصة

بما أن (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 0 $(u_n > 0)$ فهي متقاربة نحو نهايتها l

2-أ- تبيان أن (v_n) هندسية

$$v_{n+1} = \frac{1}{a(n+1)}u_{n+1}$$
$$= \frac{1}{a(n+1)}\left(\frac{n+1}{an}\right)u_n$$
$$= \frac{1}{a}\left(\frac{u_n}{an}\right)$$
$$= \frac{1}{a}v_n$$

وعليه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{a}$

وحدها الأول $v_1 = \frac{1}{a}u_1 = \frac{1}{a^2}$

2-ب- إيجاد عبارة الحد العام لـ(v_n) بدلالة n و a

$$v_n = \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{a}\right)^{n-1}$$
$$v_n = \frac{1}{a^{n+1}}$$

استنتاج عبارة u_n

لدينا $v_n = \frac{u_n}{an}$

ومنه $u_n = v_n \times an$

أي $u_n = \frac{an}{a^{n+1}}$ وعليه

$$u_n = \frac{n}{a^n}$$

حساب النهاية

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{a^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{e^{\ln a^n}}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{e^{n\ln a}}$$
$$= 0$$

(لأن $\ln a > 0$ و $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{n} = +\infty$)

ومنه $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

3- حساب S_n

لدينا

$$\frac{1}{n} \times u_n = \frac{1}{n} \times \frac{n}{a^n} = \frac{1}{a^n}$$

ومنه

$$S_n = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \cdots + \frac{1}{a^n}$$

مجموع متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{a}$ وحدها الأول $\frac{1}{a}$

ومنه

$$S_n = \frac{1}{a}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{a}\right)^n}{1-\frac{1}{a}}\right)$$

$$S_n = \frac{1-\left(\frac{1}{a}\right)^n}{a-1}$$

تعيين قيمة a حيث

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2016}$$

نعلم أن $-1 < \frac{1}{a} < 1$ ومنه $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^n = 0$

وعليه

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{a-1} = \frac{1}{2016}$$

ومنه

$$a = 2017$$

43. بكالوريا 2017 تقني رياضي

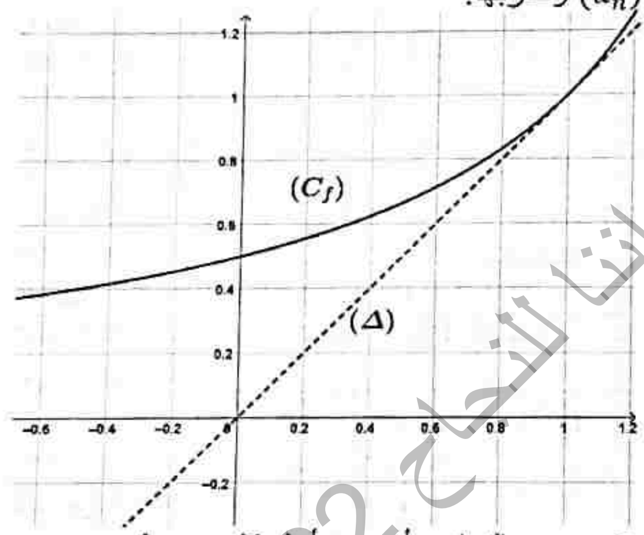
الموضوع الأول-التمرين الثاني-

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]-\infty\,;1[$ بـ: $f(x) = \frac{1}{2-x}$. (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ ، وليكن (Δ) المستقيم ذا المعادلة $y = x$

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول u_0 حيث $u_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

1- أعد رسم الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 مبرزا خطوط التمثيل، ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.



2- برهن بالتراجع أن: من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n < 1$.

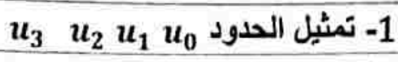
3- ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

4- نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \frac{2}{1-u_n}$

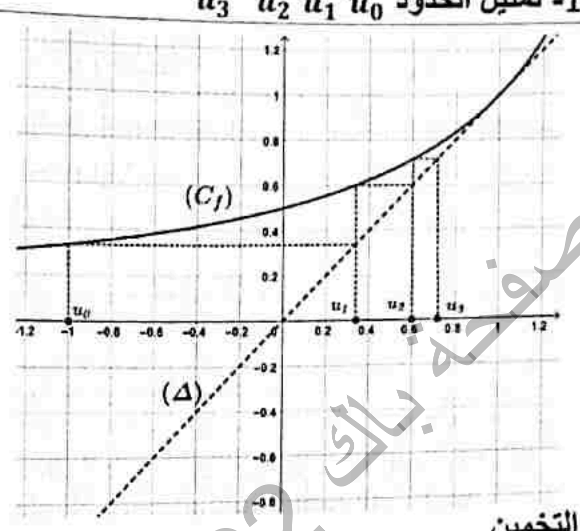
4-أ- برهن أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها 2 ثم عين عبارة حدها العام v_n بدلالة n.

4-ب- استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n واحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

الحل



1- تمثيل الحدود $u_3\ \ u_2\ u_1\ u_0$



التخمين

نلاحظ من الرسم أن $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$ ومنه المتتالية (u_n) تبدو متزايدة على $\mathbb{N}$ وتتقارب نحو فاصلة نقطة تقاطع (C_f) مع (Δ).

2- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n
$u_n < 1$

نسمي $p(n)$ الخاصية "$u_n < 1$"

نتحقق من صحة الخاصية من أجل $n = 0$

لدينا $u_0 = -1$ و $-1 < 1$ ومنه $u_0 < 1$

إذن $p(0)$ محققة.

نفرض أن $p(n)$ صحيحة ونبرهن أن $p(n+1)$ محققة من أجل $n+1$ أي $u_{n+1} < 1$.

لدينا من فرضية التراجع $u_n < 1$

$$-u_n > -1$$
$$2 - u_n > 1$$

ومنه

$$\frac{1}{2-u_n} < 1$$

أي

$$u_{n+1} < 1$$

ومنه $p(n+1)$ محققة

ومنه حسب الاستدلال بالتراجع فإن $u_n < 1$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

3- دراسة اتجاه تغير (u_n)

دراسة الفرق $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2-u_n} - u_n$$
$$= \frac{1 - 2u_n + u_n^2}{2 - u_n}$$
$$= \frac{(u_n - 1)^2}{2 - u_n}$$

لدينا

$$u_n < 1$$

أي

$$2 - u_n > 1$$

ومنه

$$\frac{(u_n-1)^2}{2-u_n} > 0$$

وعليه

$$u_{n+1} - u_n > 0$$

ومنه (u_n) متزايدة تماما

بما أن (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 1 $(u_n < 1)$ فهي متقاربة

4-أ- البرهان على أن (v_n) متتالية حسابية

أي

$$v_{n+1} = v_n + r$$

لدينا

$$v_{n+1} = \frac{2}{1 - u_{n+1}}$$
$$= \frac{2}{1 - \frac{1}{2 - u_n}}$$
$$= \frac{2}{\frac{1 - u_n}{2 - u_n}}$$
$$= \frac{2(2 - u_n)}{1 - u_n}$$
$$= \frac{2 + 2 - 2u_n}{1 - u_n}$$
$$= \frac{2}{1 - u_n} + \frac{2(1 - u_n)}{1 - u_n}$$
$$= \frac{2}{1 - u_n} + 2$$

وعليه

$$v_{n+1} = v_n + 2$$

وبالتالي (v_n) متتالية حسابية أساسها 2

وحدها الأول

$$v_0 = 1$$

عبارة الحد العام

إذن

$$v_n = 2n + 1$$

4-ب- استنتاج عبارة (u_n)

لدينا

$$v_n = \frac{2}{1-u_n}$$

وعليه

$$v_n - v_n u_n = 2$$
$$u_n = \frac{v_n - 2}{v_n}$$
$$u_n = \frac{2n-1}{2n+1}$$

حساب النهاية

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n-1}{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{2n} = 1$$
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$$

44. بكالوريا 2016 تقني رياضي

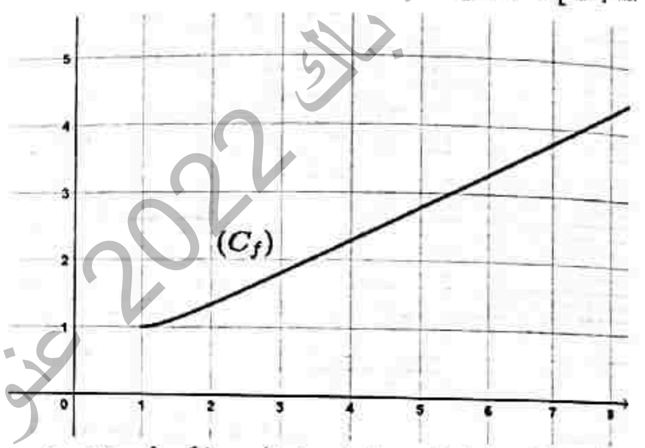
الموضوع الثاني-التمرين الأول-

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\frac{x^2}{2x-1}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ (الشكل المقابل)

1- بيّن أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$



2- لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ:
$u_0=6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1}=f(u_n)$$

2-أ- انقل المنحنى المقابل ثم مثل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) على حامل محور الفواصل (دون حسابها) موضحا خطوط الانشاء

2-ب- اعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها

2-جـ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$1\le u_n\le 6$$

2-د- ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

2-هـ برر تقارب المتتالية (u_n)

3- نعتبر المتتاليتين العدديتين (v_n) و (w_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\frac{u_n-1}{u_n}$ و $w_n=\ln(v_n)$

3-أ- برهن أن (w_n) متتالية هندسية أساسها 2 يطلب تعيين حدها الأول

3-ب- اكتب w_n بدلالة n ثم v_n بدلالة n

3-جـ بين أن: $u_n=\frac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{2^n}}$ ،

ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

4- احسب بدلالة n المجموع التالي:

$$S_n=\frac{1}{w_0}+\frac{1}{w_1}+\dots+\frac{1}{w_n}$$

الحل

1- تبيان أن f متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$

$$f(x)=\frac{x^2}{2x-1}$$

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ ودالتها المشتقة.

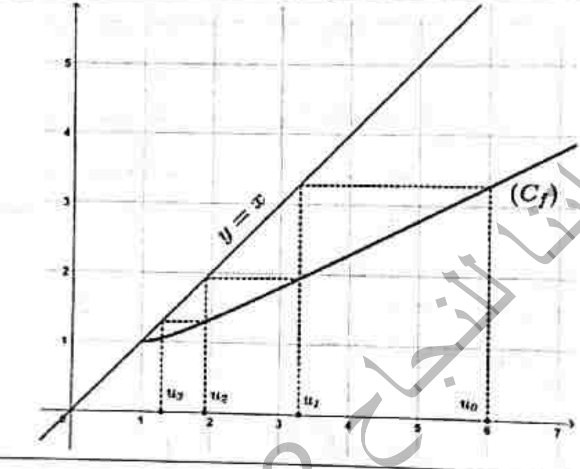
$$f'(x)=\frac{2x^2-2x}{(2x-1)^2}$$

$f'(x)=0$ يكافئ $2x(x-1)=0$

أي $x=0$ أو $x=1$

ومنه $f'(x)>0$ من أجل كل $x\in[1;+\infty[$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$

2-أ-تمثيل u_3, u_2, u_1, u_0



2-ب- التخمين

يبدو أن (u_n) متناقصة ومتقاربة نحو فاصلة نقطة تقاطع (C_f) و $(\Delta): y=x$ أي نحو 1

2-جـ-البرهان أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ فإن $1\le u_n\le 6$

- نسمي الخاصية $p(n)$ "$1\le u_n\le 6$"
- نتحقق من صحة الخاصية $p(0)$ لدينا $u_0=6$ و $1\le 6\le 6$ ومنه $p(0)$ محققة
- نفرض صحة الخاصية $p(n)$ ونبرهن أن $p(n+1)$ محققة

لدينا $1\le u_n\le 6$

وبما أن الدالة f متزايدة فإن

$$f(1)\le f(u_n)\le f(6)$$

$1\le u_{n+1}\le 3.27<6$ محققة.

- وأخيرا $1\le u_n\le 6$ من أجل كل عدد طبيعي n.

2-د- دراسة اتجاه تغير u_n

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2}{2u_n - 1} - u_n$$
$$= \frac{u_n^2 - (2u_n - 1).u_n}{2u_n - 1}$$
$$= \frac{u_n(-u_n + 1).}{2u_n - 1}$$

لدينا مما سبق: $u_n \geq 1$

ومنه $-u_n + 1 \leq 0 ....(1)$

و $2u_n - 1 \geq 1 .....(2)$

من(1) و(2) نجد

$$\frac{u_n(u_n - 1)}{2u_n - 1} \leq 0$$

ومنه $u_{n+1} - u_n \leq 0$

وعليه (u_n) متناقصة تماما على N

2-هـ -تبرير تقارب (u_n):

بما أن (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل $(u_n \geq 1)$ فهي متقاربة.

3- أ-البرهان على أن (w_n) هندسية:

(w_n) هندسية يعني $w_{n+1} = q.w_n$

لدينا:

$$w_{n+1} = ln\,(v_{n+1})$$
$$= \ln(\frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1}})$$
$$= \ln\left(\frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{u_n^2}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{(u_n - 1)^2}{u_n^2}\right)$$
$$= 2\ln\left(\frac{u_n - 1}{u_n}\right)$$
$$= 2\ln(v_n)$$

وعليه $w_{n+1} = 2w_n$

ومنه (w_n) متتالية هندسية أساسها 2 وحدها الأول

$$w_0 = \ln(v_0) = \ln\left(\frac{u_0 - 1}{u_0}\right) = \ln\left(\frac{5}{6}\right)$$

3-ب- كتابة (w_n) بدلالة n

$$w_n = \ln\left(\frac{5}{6}\right).2^n$$

كتابة (v_n) بدلالة n

لدينا: $w_n = \ln(v_n)$

ومنه $v_n = e^{w_n}$

$$= e^{\ln(\frac{5}{6})\times 2^n}$$
$$= e^{\ln(\frac{5}{6})^{2^n}}$$
$$v_n = \left(\frac{5}{6}\right)^{2^n}$$

3-جـ - تبيان أن: $u_n = \frac{1}{1-(\frac{5}{6})^{2^n}}$

لدينا: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$

$$v_n u_n - u_n = -1$$
$$u_n(v_n - 1) = -1$$
$$u_n = -\frac{1}{v_n - 1}$$
$$u_n = \frac{1}{1 - v_n}$$

وعليه $u_n = \frac{1}{1-(\frac{5}{6})^{2^n}}$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

لدينا $\lim\limits_{n\to} \left(\frac{5}{6}\right)^{2^n} = 0$ لأن: $-1 < \frac{5}{6} < 1$

وعليه: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

4) حساب S_n بدلالة n

$$S = \frac{1}{w_0} + \frac{1}{w_1} + \cdots + \frac{1}{w_n}$$

لدينا $\frac{1}{w_n} = \frac{1}{2^n \ln(\frac{5}{6})} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{\ln(\frac{5}{6})}$

وعليه يصبح

$$S_n = \frac{1}{\ln(\frac{5}{6})} + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{\ln(\frac{5}{6})}\right) + \cdots + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{\ln(\frac{5}{6})}\right)$$
$$= \frac{1}{\ln(\frac{5}{6})}\left[1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

منه S_n مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $\frac{1}{\ln(\frac{5}{6})}$

ومنه نجد أن: $S_n = \frac{1}{\ln(\frac{5}{6})}\left[\left(\frac{(\frac{1}{2})^{n+1} - 1}{(\frac{1}{2}) - 1}\right)\right]$

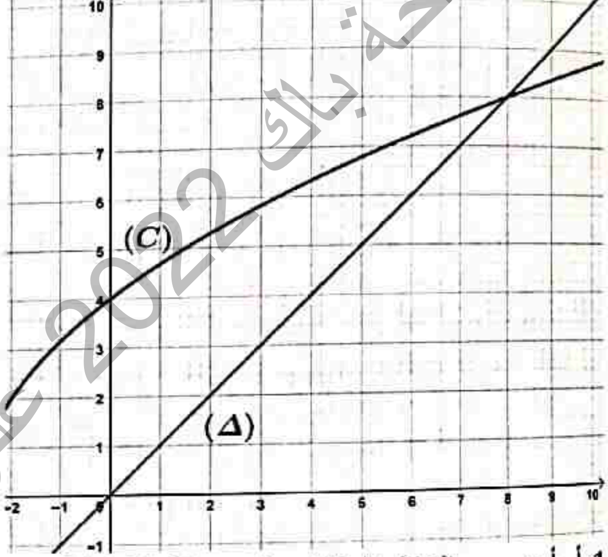
وعليه: $S_n = \frac{-2}{\ln(\frac{5}{6})}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1\right]$

45. بكالوريا 2015 تقني رياضي

الموضوع الثاني – التمرين الثالث

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n $u_{n+1} = \sqrt{6u_n + 16}$

1-h الدالة المعرفة على المجال $]-\frac{8}{3}; +\infty[$ بمايلي $h(x) = \sqrt{6x+16}$ و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$



1-أ- أعد رسم الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_3 و u_2, u_1, u_0 (دون حسابها وموضحا خطوط الإنشاء)

1-ب-ضع تخمينا حول اتجاه تغير (u_n) وتقاربها.

2-أ-برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n

$$0 \le u_n < 8$$

2-ب-بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(8-u_n)(u_n+2)}{\sqrt{6u_n+16}+u_n}$$

2-جـ-استنتج اتجاه تغير (u_n).

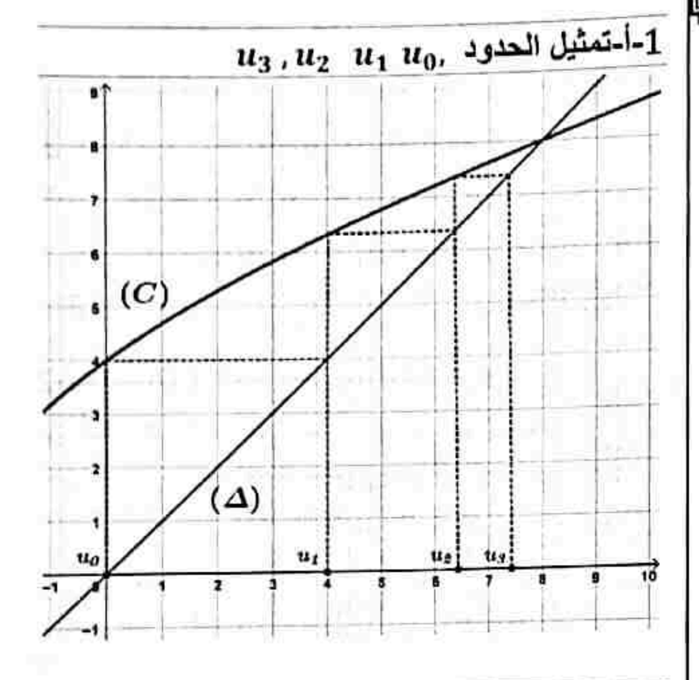
3-أ-بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n

$$0 < 8 - u_{n+1} \le \frac{1}{2}(8-u_n)$$

3-ب- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n $0 < 8 - u_n \le 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ثم استنتج $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

الحل

1-أ-تمثيل الحدود u_0, u_1 u_2 , u_3



1-ب- التخمين:

المتتالية (u_n) تبدو متزايدة ومتقاربة نحو فاصلة نقطة تقاطع المنحنى (C_f)والمنصف الأول $y = x$

2- أ-البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n

- نسمي $P(n)$ الخاصية $0 \le u_n < 8$

- من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = 0$ و $0 \le 0 < 8$ ومنه$p(0)$ إذن $0 \le u_0 < 8$ محققة.

- نفرض صحة $P(n)$ ونبرهن صحة $P(n+1)$ من أجل $n+1$ أي $0 \le u_{n+1} < 8$

لدينا $u_{n+1} = \sqrt{6u_n + 18}$

ومن الفرضية $0 \le u_n < 8$

ومنه $0 \le 6u_n + 18 < 64$

أي $0 \le \sqrt{6u_n + 16} < \sqrt{64}$

$0 \le \sqrt{6u_n + 18} < 8$

وعليه $0 \le u_{n+1} < 8$ ومنه $p(n+1)$ محققة.

- وأخيرا $0 \le u_n < 8$ من أجل كل عدد طبيعي n

2-ب-تبيان أن: $u_{n+1} - u_n = \frac{(8-u_n)(u_n+2)}{\sqrt{6u_n+16+u_n}}$

لدينا: $u_{n+1} - u_n = \sqrt{6u_n + 16} - u_n$

بالضرب في المرافق

$$= \frac{(\sqrt{6u_n+16} - u_n)(\sqrt{6u_n+16} + u_n)}{(\sqrt{6u_n+16} + u_n)}$$

نجد $= \frac{6u_n+16-u_n^2}{(\sqrt{6u_n+16}+u_n)}$

ومنه $= -\frac{(u_n^2-6u_n-16)}{(\sqrt{6u_n+16}+u_n)}$

$$= -\frac{[(u_n-3)^2-9-16]}{(\sqrt{6u_n+16}+u_n)}$$

أي $= -\frac{[(u_n-3)^2-5^2]}{(\sqrt{6u_n+16}+u_n)}$

$$= -\frac{(u_n-3-5)(u_n-3+5)}{\sqrt{6u_n+16}+u_n}$$

وعليه $u_{n+1}-u_n = \frac{(8-u_n)(u_n+2)}{\sqrt{6u_n+16}+u_n}$

2-جـ-إستنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ لدينا $0 \le u_n < 8$

ومنه $0 \ge -u_n > -8$

$8 \ge -u_n + 8 > 0$

و $0 < 2 \le u_n + 2 < 10$

و $\sqrt{6u_n+16}+u_n > 0$

ومنه $\frac{(8-u_n)(u_n+2)}{\sqrt{6u_n+16}+u_n} > 0$

أي $u_{n+1} - u_n > 0$

وبالتالي (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

3- أ-تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n

$$0 < 8 - u_{n+1} \le \frac{1}{2}(8-u_n)$$

لدينا: من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

$u_n < 8$ ومنه $8 - u_n > 0$

ولدينا $8 - u_{n+1} = 8 - \sqrt{6u_n+16}$

$$= \frac{(8-\sqrt{6u_n+16})(8+\sqrt{6u_n+16})}{(8+\sqrt{6u_n+16})}$$

$$= \frac{64-(6u_n+16)}{(8+\sqrt{6u_n+16})}$$

$$= \frac{48-6u_n}{(8+\sqrt{6u_n+16})}$$

$$= \frac{6}{8+\sqrt{6u_n+16}}(8-u_n)$$

لدينا: من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

$u_n \ge 0$ أي $6u_n + 16 \ge 16$

ومنه $8 + \sqrt{6u_n+16} \ge 12$

يكافئ ومنه $0 < \frac{1}{(8+\sqrt{6u_n+16})} \le \frac{1}{12}$

وبما أن $6(8-u_n) > 0$ فإن

$$0 < \frac{6(8-u_n)}{(8+\sqrt{6u_n+16})} \le \frac{6}{12}(8-u_n)$$

أي: $0 < 8 - u_{n+1} \le \frac{1}{2}(8-u_n)$

3-ب-تبيان أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

$$0 < 8 - u_n \le 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

طريقة 1:

البرهان بالتراجع

- نسمي الخاصية $P(n)$: $0 < 8 - u_n \le 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$

- نتحقق من صحة $P(0)$ لدينا: $8 - u_0 = 8$

ومنه $0 < 8 - u_0 \le 8\left(\frac{1}{2}\right)^0$ أي $0 < 8 - u_0 \le 8$

إذن $P(0)$ محققة

- نفرض أن $P(n)$ صحيحة ونبرهن أن $P(n+1)$ محققة من أجل $n+1$

أي $0 < 8 - u_{n+1} \le 8\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

لدينا: من الفرضية $0 < 8 - u_n \le 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$

بالضرب في $\frac{1}{2}$ نجد $0 < \frac{1}{2}(8-u_n) \le 8\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

وبما أن $0 < 8 - u_{n+1} \le \frac{1}{2}(8-u_n)$ من السؤال (2 – أ) فإن $0 < 8 - u_{n+1} \le 8\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

إذن $p(n+1)$ صحيحة

- وأخيرا من أجل كل عدد طبيعي n يكون:

$$0 < 8 - u_n \le 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

طريقة 2:

لدينا: مما سبق:

$$0 < 8 - u_{n+1} \le \frac{1}{2}(8-u_n)$$

$$0 < 8 - u_n \le \frac{1}{2}(8-u_{n-1})$$

.

.

و $0 < 8 - u_2 \le \frac{1}{2}(8-u_1)$

ومنه $0 < 8 - u_1 \le \frac{1}{2}(8-u_0)$

بضرب المتباينات طرفا لطرف نجد:

$$(8-u_1)(8-u_2)\dots(8-u_n) \le \left(\frac{1}{2}\right)^n (8-u_0)\dots(8-u_{n-1})$$

بالاختزال نجد

$$0 < 8 - u_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^n (8-u_0)$$

$8 - u_0 = 8$ ومنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ يكون:

$$0 < 8 - u_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 8$$

استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

لدينا: $0 < \lim\limits_{n\to+\infty} (8 - u_n) \le \lim\limits_{n\to+\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n .8\right]$

بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ لأن $-1 < \frac{1}{2} < 1$

فإن: حسب النهايات بالمقارنة $\lim\limits_{n\to+\infty} (8 - u_n) = 0$

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 8$

46. بكالوريا 2014 تقني رياضي

الموضوع الأول – التمرين الثالث

f هي الدالة المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ:
$$f(x) = x - \ln(x-1)$$

1- حدد حسب قيم x, إشارة $f(x) - x$.

2-أ- عين إتجاه تغير $f(x)$.

2-ب- بين أنه إذا كان $x \in [2;e+1]$ فإن
$$f(x) \in [2;e+1]$$

(u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = e+1$

ومن أجل كل n من $\mathbb{N}$ ،
$$u_{n+1} = u_n - ln(u_n - 1)$$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_n \in [2;e+1]$

2) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

3) برر تقارب المتتالية (u_n) ، ثم أحسب نهايتها .

الحل

1-إشارة $f(x) - x$

لدينا:

$$f(x) - x = x - \ln(x-1) - x = -\ln(x-1)$$
$$-\ln(x-1) = 0$$
$$e^{\ln(x-1)} = e^0$$
$$x - 1 = 1$$
$$x = 2$$

x	1	2	$+\infty$
$f(x)-x$	$+$	0	$-$

من الجدول نجد أن لما

$x \in]1;2]$ يكون $f(x) - x \ge 0$

و $x \in [2;+\infty[$ يكون $f(x) - x \le 0$

2-أ-تعيين اتجاه تغير $f(x)$

الدالة f معرفة وقابلة للإشتقاق على $]1;+\infty[$ ودالتها المشتقة:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x-1}$$
$$f'(x) = \frac{x-2}{(x-1)}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط لأن $x - 1 > 0$ على المجال $]1;+\infty[$

$$x - 2 = 0$$
$$x = 2$$

ومنه

x	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

من الجدول نستنتج أنه لما

$x \in]1;2]$ يكون $f'(x) \le 0$ ومنه f متناقصة

$x \in [2;+\infty[$ يكون $f'(x) \ge 0$ ومنه f متزايدة

2-ب-تبيان أنه إذا كان $x \in [2;e+1]$ فإن $f(x) \in [2;e+1]$

بما أن f مستمرة ومتزايدة على $x \in [2;e+1]$.

ومنه $f(2) \le f(x) \le f(e+1)$

و $f(2) = 2$ و $f(e+1) = e + 1 - \ln e = e$

ومنه $2 \le f(x) \le e$

حيث $e \in [2;e+1]$ و $2 \in [2;e+1]$

ومنه $f(x) \in [2;e+1]$

II-1-البرهان بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن $u_n \in [2;e+1]$.

نسمي الخاصية $P(n)$ والتي تقول أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن $u_n \in [2;e+1]$

نتحقق من صحة الخاصية من أجل $n = 0$

لدينا $u_0 = e+1$ و $e+1 \in [2;e+1]$

ومنه $u_0 \in [2;e+1]$

ومنه $p(0)$ محققة

نفرض ان $P(n)$ صحيحة ونبرهن صحة $P(n+1)$

$$2 \le u_n \le e+1$$

بما أن $u_{n+1} = f(u_n)$

فإنه و حسب السؤال (2-ب) إذا كان $u_n \in [2;e+1]$ فإن $f(u_n) \in [2;e+1]$

ومنه $u_{n+1} \in [2;e+1]$ ومنه $p(n+1)$ محققة

إذن الإستدلال بالتراجع محقق.

ومنه $u_n \in [2;e+1]$ من أجل $n \in \mathbb{N}$

II-2-إتجاه تغير المتتالية (u_n)

$$u_{n+1} - u_n = u_n - \ln(u_n - 1) - u_n$$
$$= -\ln(u_n - 1)$$

وبما أن $u_n \in [2; e+1]$ ومن السؤال 1

فإن $-\ln(u_n - 1) < 0$ اذن $u_{n+1} - u_n < 0$

ومنه (u_n) متناقصة تماما

II-3-تبرير تقارب (u_n)

لدينا: (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد 2

$(u_n \geq 2)$ فهي متقاربة نحو نهايتها l

حساب نهاية (u_n)

بما أن u_n متقاربة فإن: $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$

$$\ell = f(\ell)$$

ومنه حسب السؤال 1 نجد $\ell = 2$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$$

47. بكالوريا 2014 تقني رياضي

الموضوع الثاني- التمرين الثالث

n و p عددان طبيعيان

1-أدرس حسب قيم n، بواقي القسمة الاقليدية للعدد 5^n على 16

2-نضع: $C_n = 16n + 9$ و $D_p = 5^p$

2-أ-بين أنه إذا كان $p = 4k + 2$ حيث k عدد طبيعي، فإنه يوجد عدد طبيعي n يحقق $C_n = D_p$

2-ب-عين n من أجل $p = 6$

3-f هي الدالة المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = 5^{4x+2} - 9$$

ادرس تغيرات الدالة f، ثم استنتج إشارة $f(x)$

4-(u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = 1$ ومن أجل كل n من $\mathbb{N}$ $u_{n+1} = 5^4\left(u_n + \frac{9}{16}\right) - \frac{9}{16}$

4-أ-برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n،

$$u_n = \frac{5^{4n+2} - 9}{16}$$

4-ب-برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، فإن u_n عدد طبيعي

5-استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

الحل

1-دراسة بواقي القسمة الاقليدية على 16 للعدد

$5^0 \equiv 1[16]$ ، $n = 0$

$5^1 \equiv 5[16]$ ، $n = 1$

$5^2 \equiv 9[16]$ ، $n = 2$

$5^3 \equiv 13[16]$ ، $n = 3$

$5^4 \equiv 1[16]$ ، $n = 4$

ومنه دور القسمة هو 4

$n=$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	
$5^n \equiv$	1	5	9	13	[16]

بواقي العدد 5^n على 16 هي : $r = \{1; 5; 9; 13\}$

2-أ-بيان أنه إذا كان $p = 4k + 2$ فإنه يوجد n يحقق $C_n = D_p$

من أجل $p = 4k + 2$

$$5^p \equiv 9[16]$$
$$5^p = 16h + 9$$

ولدينا: $C_n = 16n + 9$

بأخذ $n = h$ نجد $5^p = 16n + 9 = C_n$

2-ب-تعيين n من أجل $p = 6$

لدينا: $D_p = 5^p$

$$D_6 = 15625$$

لكن $C_n = D_p$

$$16n + 9 = 15625$$
$$16n = 15616$$
$$n = \frac{15616}{16}$$
$$n = 976$$

3-دراسة اتجاه تغير الدالة f:

النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (5^{4x+2} - 9) = +\infty$$
$$f(0) = 5^{4(0)+2} - 9 = 16$$

المشتقة:

لدينا : $f(x) = 5^{4x+2} - 9$

$$= e^{\ln 5^{4x+2}} - 9$$

ومنه

$$f'(x) = 4\ln 5\left(e^{(4x+2)\ln 5}\right)$$

ولدينا $4\ln 5 > 0$ و $e^{(4x+2)\ln 5} > 0$

ومنه $f'(x) > 0$ معناه f دالة متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$

جدول التغيرات:

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	16 $\nearrow$ $+\infty$

4-أ-البرهان بالتراجع أن $u_n = \frac{5^{4n+2}-9}{16}$

- نسمي $p(n)$ الخاصية: $u_n = \frac{5^{4n+2}-9}{16}$
- من أجل $n = 0$ لدينا: $u_0 = 1$

و $u_0 = \frac{5^{4(0)+2}-9}{16}$ ومنه $\frac{5^2-9}{16} = \frac{25-9}{16} = 1$

و منه أجل $p(0)$ محققة من أجل $n = 0$

- نفرض $p(n)$ محققة أي $u_n = \frac{5^{4n+2}-9}{16}$

ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي

$$u_{n+1} = \frac{5^{4(n+1)+2}-9}{16}$$

لدينا:: $u_{n+1} = 5^4\left(u_n + \frac{9}{16}\right) - \frac{9}{19} \dots\dots (1)$

ومن الفرض $u_n = \frac{5^{4n+2}-9}{16} \dots\dots (2)$

بتعويض (2) في (1) نجد

$$u_{n+1} = 5^4\left(\frac{5^{4n+2}-9}{16} + \frac{9}{16}\right) - \frac{9}{16}$$
$$= \frac{5^{4(n+1)+2}}{16} - \frac{5^5 \times 9}{16} + \frac{9}{16} \times 5^4 - \frac{9}{16}$$
$$= \frac{5^{4(n+1)+2}}{16} - \frac{9}{16}$$
$$= \frac{5^{4(n+1)+2}-9}{16}$$

ومنه الخاصية $p(n+1)$ محققة

- وأخيرا وحسب البرهان بالتراجع نجد: $u_n = \frac{5^{4n+2}-9}{16}$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

4-ب-البرهان أن u_n عدد طبيعي

من السؤال 1 نجد أن

$$5^{4k+2} \equiv 9[16]$$
$$5^{4n+2} - 9 \equiv 0[16]$$

أي أن $5^{4n+2} - 9$ يقبل القسمة على 16

ومنه $\frac{5^{4n+2}-9}{16}$ هو عدد طبيعي

$$u_n = \frac{5^{4n+2}-9}{16} \in \mathbb{N}$$

ومنه $u_n \in \mathbb{N}$

u_n عدد طبيعي من أجل $n \in \mathbb{N}$

5-استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

لدينا: $f(x) = 5^{4x+2} - 9$

بوضع $x = n$

$$f(n) = 5^{4n+2} - 9 = 16u_n$$

ومنه $u_n = \frac{f(n)}{16}$

لدينا: من جواب السؤال 3 نجد أن $f(x)$ متزايدة تماما معناه $\frac{f(n)}{16}$ متزايدة تماما (لأن $16 > 0$) إذا وفي الأخير نستنتج أن (u_n) متزايدة تماما

48. بكالوريا 2013 تقني رياضي

الموضوع الأول – التمرين الثالث

(u_n) المتتالية العددية المعرفة كمايلي:

$u_0 = e^2$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n

$$u_n = \sqrt{\frac{u_{n-1}}{e}}$$

(v_n)المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$v_n = \frac{1}{2}\ln u_n + \frac{1}{2}$$

1- بيّن أنّ v_n متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، ثم احسب حدها الأول .

2-أكتب (v_n) بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_nبدلالةn

3-احسب بدلالة n المجموع S_n ، حيث:

$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ ، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

4-احسب بدلالة n الجداء p_n ، حيث:

$p_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$ ، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$

الحل

1- اثبات أن (v_n) هندسية مع حساب أساسها وحدها الأول

لدينا:

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}\ln(u_{n+1}) + \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{\frac{u_n}{e}}\right) + \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{u_n}{e}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{4}(\ln u_n - 1) + \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{4}\ln u_n + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln u_n + \frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2} v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

وحدها الأول

$$v_0 = \frac{1}{2}\ln u_0 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

-2 كتابة v_n بدلالة n

$$v_n = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

استنتاج عبارة u_n

لدينا: $v_n = \frac{1}{2}\ln u_n + \frac{1}{2}$

$$2v_n = \ln u_n + 1$$

ومنه $\ln u_n = 2v_n - 1$

$$u_n = e^{2v_n - 1}$$
$$u_n = e^{3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}$$

-3 حساب المجموع S_n

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$
$$= \frac{3}{2}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right]$$
$$= 3\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$

حساب $\lim_{n\to+\infty} S_n$

لدينا: $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ ومنه $\lim_{n\to+\infty} S_n = 3$

-4 حساب الجداء p_n

$$p_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$$
$$= e^{2v_0-1} \times e^{2v_1-1} \times \dots \times e^{2v_n-1}$$
$$= e^{2v_0-1+2v_1-1+\dots+2v_n-1}$$
$$= e^{2(v_0+v_1+\dots+v_n)-1(n+1)}$$
$$= e^{2S_n-(n+1)}$$

ومنه

$$p_n = e^{6\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]-(n+1)}$$

حساب نهاية p_n

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} e^{6\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]-(n+1)} = 0$$

لأ

$$\lim_{n\to+\infty}\left[6\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)-(n+1\right.$$

49. بكالوريا 2012 تقني رياضي

الموضوع الثاني- التمرين الأول

1-حل في مجموعة الأعداد المركبة $(\mathbb{C})$, المعادلة ذات المجهول z

$$(z^2+2z+4)(z^2-2\sqrt{3}z+4) = 0$$

2-المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

A, B, C و D نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب

$z_D = -1+i\sqrt{3}$ و $z_C = -1-i\sqrt{3}$

$z_B = \sqrt{3}-i$, $z_A = \sqrt{3}+i$

أ-اكتب كلا من z_A, z_B, z_C و z_D على الشكل الأسي

ب-تحقق أن $\frac{z_D-z_B}{z_A-z_C} = i$ ثم استنتج أن المستقيمين (AC) و(BD) متعامدان.

3-z_n العدد المركب الذي طويلته $\frac{1}{2^n}$ و $\frac{2\pi}{3}n$ عمدة له حيث n عدد طبيعي.

L_n العدد المركب المعرف بـ $L_n = z_D \times z_n$.

أ-اكتب كلا من L_0, L_1 على الشكل الجبري.

ب-(u_n) هي المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كمايلي $u_n = |L_n|$.

-اثبت أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

-$M_0, M_1, \dots, M_n$ صور الأعداد المركبة $L_0, L_1, \dots, L_n$ على الترتيب.

احسب بدلالة n المجموع S_n حيث

$$S_n = \|\overrightarrow{OM_0}\| + \|\overrightarrow{OM_1}\| + \dots + \|\overrightarrow{OM_n}\|$$

-جد نهاية S_n عندما يؤول n إلى $+\infty$.

الحل

1-حل المعادلة

$$(z^2+2z+4)(z^2-2\sqrt{3}z+4) = 0$$

لدينا: $(z^2+2z+4)(z^2-2\sqrt{3}z+4) = 0$

اما $z^2+2z+4 = 0$

$$\Delta = -12 = 12i^2$$
$$\sqrt{\Delta} = 2i\sqrt{3}$$
$$z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-2i\sqrt{3}}{2} = -1-i\sqrt{3}$$
$$z_2 = \frac{-2+2i\sqrt{3}}{2} = -1+i\sqrt{3}$$

أو $z^2-2\sqrt{3}z+4 = 0$

$$\Delta = -4 = 4i^2$$
$$\sqrt{\Delta} = 2i$$

$$z_3=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2\sqrt{3}-2i}{2}=\sqrt{3}-i$$
$$z_4=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2\sqrt{3}+2i}{2}=\sqrt{3}+i$$

ومنه الحلول هي $S\{z_1,z_2,z_3,z_4\}$.

2-أ-كتابة z_A, z_B, z_C و z_D على الشكل الأسي

أي على الشكل $z=re^{i\theta}$

لدينا $z_A=\sqrt{3}+i$

ومنه $r=|z_A|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(1)^2}=2$

$$\theta_A=\arg(\sqrt{3}+i)\begin{cases}\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{1}{2}\end{cases}$$

ومنه $z_A=2e^{i\frac{\pi}{6}}$

ولدينا $z_B=\sqrt{3}-i=\overline{z_A}$

ومنه $z_B=2e^{-i.\frac{\pi}{6}}$

$z_C=-1-i\sqrt{3}$

$r=|z_C|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2}=2$

$$\theta_C=\arg(z_C)\begin{cases}\cos\theta=-\frac{1}{2}\\ \sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

ومنه $\theta_C=\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}+2k\pi$

$z_C=2e^{i.\frac{4\pi}{3}}$

$z_D=-1+i\sqrt{3}$

طريقة 1

$r=|z_D|=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$

$$\theta_D=\arg(z_D)\begin{cases}\cos\theta=-\frac{1}{2}\\ \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

ومنه $\theta_D=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$

إذن $z_C=2e^{i.\frac{2\pi}{3}}$

طريقة2

لدينا:

$z_D=-1+i\sqrt{3}=\overline{z_C}$

ومنه $z_D=2e^{-i.\frac{4\pi}{3}}=2e^{i\left(\frac{2\pi}{3}-2\pi\right)}$

$z_D=2e^{i.\frac{2\pi}{3}}$

2-ب-التحقق أن $\frac{z_D-z_B}{z_A-z_C}=i$

لدينا

$$\frac{z_D-z_B}{z_A-z_C}=\frac{-1+i\sqrt{3}-\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i+1+i\sqrt{3}}=\frac{(1+\sqrt{3})(-1+i)}{(1+\sqrt{3})(1+i)}=\frac{-1+i}{1+i}$$

ومنه بالضرب في المرافق

$$\frac{z_D-z_B}{z_A-z_C}=\frac{-1+i}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}$$
$$\frac{z_D-z_B}{z_A-z_C}=\frac{2i}{2}=i$$

استنتاج أن المستقيمين (AC) و(BD) متعامدان.

لدينا $\arg\left(\frac{z_D-z_B}{z_A-z_C}\right)=\arg(i)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

ومنه $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BD})=\frac{\pi}{2}$

أي $(CA)\perp(BD)$ ومنه (AC) و (BD) متعامدان

3-أ-كتابة كلا من L_1, L_0 على الشكل الجبري

لدينا $z_n=\frac{1}{2^n}e^{i.\frac{2\pi}{3}n}$

ومنه $L_0=z_D\times z_0$

$$L_0=(-1+i\sqrt{3})\left(\frac{1}{2^0}e^{i.\frac{2\pi}{3}(0)}\right)$$
$$L_0=-1+i\sqrt{3}=z_D$$
$$L_1=z_D\times z_1=(-1+i\sqrt{3})\frac{1}{2}e^{\frac{i2\pi}{3}(1)}$$
$$=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=\frac{(-1+i\sqrt{3})^2}{4}=\frac{-2-2i\sqrt{3}}{4}$$
$$=-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3}$$

3-ب-اثبات أن المتتالية (u_n) هندسية

لدينا $u_n=|L_n|$

ومنه $u_{n+1}=|L_{n+1}|=|z_D\times z_{n+1}|$

أي $u_{n+1}=\left|z_D.\frac{1}{2^{n+1}}e^{i\left(\frac{2\pi}{3}(n+1)\right)}\right|$

$$u_{n+1}=\left|z_D.\frac{1}{2^n}e^{i\left(\frac{2\pi}{3}n\right)}\frac{1}{2}e^{i.\frac{2\pi}{3}}\right|$$
$$u_{n+1}=\left|z_D.\frac{1}{2^n}e^{i\left(\frac{2\pi}{3}n\right)}\right|\left|\frac{1}{2}e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}\right|$$
$$u_{n+1}=u_n\frac{1}{2}$$

ومنه (u_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$

وحدها الأول u_0

$$u_0 = |L_0| = |z_D| = 2$$

حساب S_n

$$S_n = \|\overrightarrow{OM_0}\| + \|\overrightarrow{OM_1}\| + \dots + \|\overrightarrow{OM_n}\|$$

لدينا:

$$\|\overrightarrow{OM_0}\| = \|L_0 - O\| = \|L_0\| = u_0$$
$$\|\overrightarrow{OM_1}\| = \|L_1 - O\| = \|L_1\| = u_1$$

.
.
.

$$\|\overrightarrow{OM_n}\| = \|L_n - O\| = \|L_n\| = u_n$$
$$S_n = |L_0| + |L_1| + \dots + |L_n|$$
$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$
$$S_n = 2.\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1}\right]$$
$$S_n = -4\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1\right]$$

-حساب نهاية S_n

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} (-4[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1] = 4$$

لأن $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} = 0$ ومنه $\lim_{n\to+\infty} S_n = 4$

.50 بكالوريا 2011 تقني رياضي

الموضوع الأول – التمرين الثالث

المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: (u_n)

$$u_n = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$$

1-أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن:

$u_n = 1 + \frac{1}{n(n+2)}$ ثم استنتج أن: $u_n > 1$

2-ادرس اتجاه تغير (u_n) ثم بين أنها متقاربة ، احسب نهاية (u_n).

3- ليكن الجداء p_n المعرف كمايلي:

$$p_n = u_1 \times u_2 \times \dots . \times u_n$$

أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $p_n = \frac{2n+2}{n+2}$.

4-(v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كمايلي: $v_n = \ln u_n$ حيث ln دالة اللوغاريتم النيبيري

عبر بدلالة p_n عن S_n حيث: $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ ثم احسب نهاية S_n لما n ينتهي إلى $+\infty$.

الحل

1- اثبات أن $u_n = 1 + \frac{1}{n(n+2)}$

لدينا:

$$u_n = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{n(n+2)}$$
$$= \frac{n(n+2)+1}{n(n+2)}$$
$$= \frac{n(n+2)}{n(n+2)} + \frac{1}{n(n+2)}$$
$$u_n = 1 + \frac{1}{n(n+2)}$$

- استنتاج أن $u_n > 1$

لدينا: من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ $\frac{1}{n(n+2)} > 0$

ومنه $1 + \frac{1}{n(n+2)} > 1$

أي $u_n > 1$

2- دراسة اتجاه تغير (u_n)

$$u_{n+1} - u_n = \left[1 + \frac{1}{(n+1)(n+3)}\right] - \left[1 + \frac{1}{n(n+2)}\right]$$
$$= \frac{1}{(n+1)(n+3)} - \frac{1}{n(n+2)}$$
$$= \frac{-(2n+3)}{n(n+1)(n+3)(n+2)}$$

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن :

$$-(2n+3) < 0$$
$$n(n+1)(n+3)(n+2) > 0$$

ومنه $u_{n+1} - u_n < 0$ وبالتالي (u_n) متناقصة تماما

تقارب (u_n)

بما أن (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد 1 فهي متقاربة نحو نهايتها l

نهاية (u_n)

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \left[1 + \frac{1}{n(n+2)}\right] = 1$$

3- البرهان بالتراجع

- نسمي الخاصية $p(n)$: " $p_n = \frac{2n+2}{n+2}$ "

لدينا: $p_n = u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$

- نتحقق من صحة الخاصية من اجل $n = 1$

لدينا: $p_1 = u_1 = \frac{4}{3}$

و $\frac{2\times1+2}{1+2} = \frac{4}{3}$

وبالتالي الخاصية صحيحة من أجل $n = 1$

نفرض أن $p(n)$ صحيحة ونبرهن أن $p(n+1)$ محققة أي

$$p_{n+1} = \frac{2n+4}{n+3}$$

لدينا: $p_{n+1} = u_1 \times u_2 \times \dots \times u_{n+1}$

أي $p_{n+1} = p_n \times u_{n+1}$

ومنه

$$p_{n+1} = \frac{2n+2}{n+2} \times \frac{(n+2)^2}{(n+1)(n+3)}$$

$$= \frac{2(n+1)(n+2)}{(n+1)(n+3)}$$

$$p_{n+1} = \frac{2n+4}{n+3}$$

اذا الخاصية $p(n+1)$ محققة

- وأخيرا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن $p_n = \frac{2n+2}{n+2}$

4-التعبير عن S_n بدلالة p_n

لدينا $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$

ومنه $v_n = \ln(u_n)$

$$S_n = \ln(u_1) + \ln(u_2) + \dots + \ln(u_n)$$

$$= \ln(u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n)$$

ومنه $S_n = \ln(p_n)$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{2n+2}{n+2}\right)$$

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \ln 2$

.51 بكالوريا 2011 تقني رياضي

الموضوع الثاني- التمرين الثالث

I-f الدالة العددية المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = 3 - \frac{4}{e^x+1}$

(C_f) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

I-1-ادرس تغيرات الدالة f.

I-2-عين المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f).

I-3-بيّن أنّ للمنحنى (C_f) نقطة انعطاف ω يطلب تعيينها ثم اكتب معادلة المماس عندها (C_f).

I-4-لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي

$$g(x) = f(x) - x$$

I-4-أ- ادرس تغيرات الدالة g.

I-4-ب-بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2.7 < \alpha < 2.8$

I-5-أ-حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$.

I-5-ب-ارسم المماس والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ والمنحنى (C_f).

II-(u_n) المتتالية العددية المعرفة كمايلي $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n $u_{n+1} = f(u_n)$.

II-1-باستخدام (C_f) والمستقيم (Δ) مثل u_0 و u_1 و u_2 على حامل محور الفواصل.

II-2-بين أنه ومن أجل كل عدد طبيعي n فإن $1 \le u_n < \alpha$

II-3-بيّن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

II-4-استنتج أن (u_n) متقاربة وبين أن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$

الحل

I-1-دراسة تغيرات الدالة f

-النهايات

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[3 - \frac{4}{e^x+1}\right] = 3$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[3 - \frac{4}{e^x+1}\right] = -1$$

-حساب المشتقة

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{-(0(e^x+1) + e^x(4))}{(e^x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4e^x}{(e^x+1)^2} > 0$$

ومنه f دالة متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

-جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	-1 ↗	3

I-2-المستقيمات المقاربة

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$$

ومنه: $y = -1$ معادلة مستقيم مقارب أفقي لـ (C_f) بجوار $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$$

ومنه $y = 3$ معادلة مستقيم مقارب أفقي لـ (C_f) بجوار $+\infty$

I-3-البرهان أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف

لدينا $f'(x)=\frac{4e^x}{(e^x+1)^2}$

$$f''(x)=\frac{4e^x(e^x+1)^2-2(e^x)(e^x+1)4e^x}{(e^x+1)^4}$$

$$f''(x)=\frac{4e^x[e^{2x}+2e^x+1]-8e^{2x}(e^x+1)}{(e^x+1)^4}$$

$$f''(x)=\frac{4e^{3x}+8e^{2x}+4e^x-8e^{3x}-8e^{2x}}{(e^x+1)^4}$$

ومنه $f''(x)=\frac{-4e^{3x}+4e^x}{(e^x+1)^4}$

$f''(x)=0$

إذا $\frac{-4e^{3x}+4e^x}{(e^x+1)^4}=0$

$-4e^{3x}+4e^x=0$

$4e^x(-e^{2x}+1)=0$

بما أن $4e^x>0$

فان $-e^{2x}+1=0$

$e^{2x}=1$

$2x=0$

ومنه $f''(x)$ تنعدم عند $x=0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

بما أن $f''(x)$ تنعدم عند 0 وتغير من إشارتها فإن (C_f) يقبل نقطة انعطاف $w(0;f(0))$

$$f(0)=3-\frac{4}{1+1}=3-2=1$$

ومنه نقطة الانعطاف $w(0;1)$.

-كتابة معادلة مماس لـ(C_f) عند نقطة الانعطاف

لدينا: معادلة المماس هي

$$y=f'(0)(x-0)+f(0)$$

$$f'(x)=\frac{4e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$f'(0)=\frac{4e^0}{(e^0+1)^2}=\frac{4}{4}=1$$

ومنه $f'(0)=1$

و $f(0)=1$

معناه $y=1(x-0)+1$

$y=x+1$

I-4-أ-دراسة اتجاه تغيرات الدالة g

-النهايات

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=-\infty$$

-حساب المشتقة :

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة:

$$g'(x)=f'(x)-x'$$

$$=\frac{4e^x}{(e^x+1)^2}-1=\frac{4e^x-(e^x+1)^2}{(e^x+1)^2}$$

$$g'(x)=\frac{4e^x-e^{2x}-2e^x-1}{(e^x+1)^2}$$

$$g'(x)=\frac{-e^{2x}+2e^x-1}{(e^x+1)^2}$$

لدينا: إشارة $g'(x)$ من إشارة $-e^{2x}+2e^x-1$

لأن $(e^x+1)^2>0$

ومنه بوضع $t=e^x$ نجد

$$-t^2+2t-1$$

$$\Delta=4-4(-1)(-1)=0$$

$$t_1=\frac{-2}{-2}=1$$

ومنه $e^x=1$

$x=\ln 1=0$

معناه $g'(x)=-\frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}\leq 0$

ومنه الدالة $g(x)$ متناقصة على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

I-4-ب- بيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2.7<\alpha<2.8$

-الدالة g متناقصة تماما ومستمرة على $]2.7;2.8[$

و $g(2.7)>0$

و $g(2.8)<0$

إذن $g(2.7)\times g(2.8)<0$ ومنه

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2.7<\alpha<2.8$

I-5-أ-حل المعادلة $f(x)=0$ في $\mathbb{R}$.

$$f(x)=0$$

$$3-\frac{4}{e^x+1}=0$$

$$3=\frac{4}{e^x+1}$$

$$3e^x+3=4$$

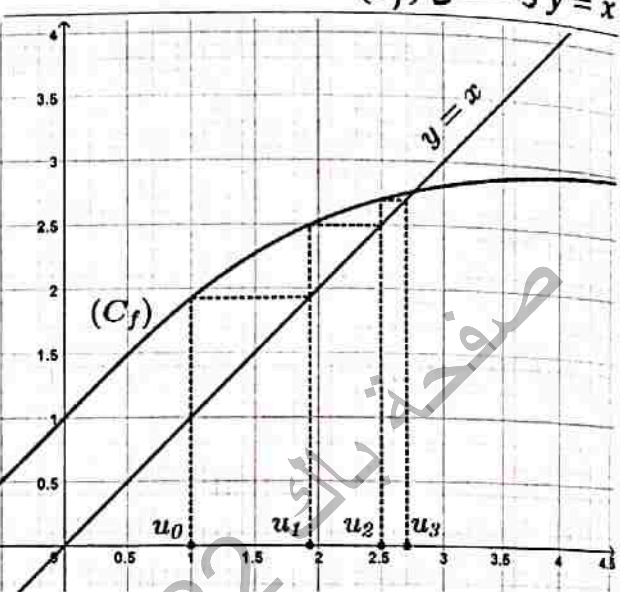
$$3e^x=1$$

$$e^x=\frac{1}{3}$$

$$x=-\ln(3)$$

ومنه مجموعة الحلول هي $S=\{-\ln(3)\}$

I-5-ب-رسم المماس و المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ والمنحنى (C_f)



II-1-تمثيل u_0 و u_1 و u_2 على حامل محور الفواصل.

باستخدام (C_f) والمستقيم (Δ)

تخمين: المتتالية (u_n) تبدو متزايدة ومتقاربة نحو فاصلة نقطة تقاطع (C_f) و (Δ).

II-2-البرهان بالتراجع أن $1 \le u_n < \alpha$

نسمي الخاصية : $p(n) = 1 \le u_n < \alpha$

نتحقق من أجل $n = 0$ لدينا: $u_0 = 1$

و $1 \le 1 < \alpha$ ومنه $P(0)$ محققة

نفرض أن $P(n)$ محققة أي $1 \le u_n < \alpha$

ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي

$1 \le u_{n+1} < \alpha$

لدينا من فرضية التراجع $1 \le u_n < \alpha$

والدالة f متزايدة تماما على $[1;\alpha[$ فإن

$f(1) \le f(u_n) < f(\alpha)$

و $f(1) = 3 - \frac{4}{e^1+1}$

$\simeq 1.92$

و $g(\alpha) = f(\alpha) - \alpha = 0$

ومنه $f(\alpha) = \alpha$

ومنه $1 \le 1.92 \le u_{n+1} < \alpha$

إذن $1 \le u_{n+1} < \alpha$

$P(n+1)$ محققة من أجل $n+1$

وأخيرا من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $1 \le u_n < \alpha$

II-3-البرهان أن (u_n) متزايدة تماما

ندرس إشارة الفرق بين $u_{n+1} - u_n$

$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$

$= g(u_n)$

من جدول تغيرات الدالة $g(x)$ نجد أن $g(x) \ge 0$ في المجال $[1;\alpha[$

ومنه $g(u_n) > 0$ لأنّ $1 \le u_n < \alpha$

معناه $f(u_n) - u_n > 0$

$u_{n+1} - u_n > 0$

ومنه (u_n) متزايدة تماما

II-4-استنتاج أن (u_n) متقاربة

بما أن (u_n) متتالية متزايدة تماما $[1;\alpha[$ ومحدودة من الأعلى بالعدد α فهي متقاربة نحو نهايتها ℓ.

-بيان أن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$

بما أن المتتالية (u_n) متقاربة فإن

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

$f(\ell) = \ell$

$3 - \frac{4}{e^{\ell}+1} = \ell$

لدينا $f(\ell) = \ell$

$g(\ell) = f(\ell) - \ell = 0$

لكن لدينا $g(\alpha) = 0$

أي أن $g(\ell) = g(\alpha)$

وبما أن g دالة رتيبة فإن $\ell = \alpha$

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$

.52 بكالوريا 2009 تقني رياضي

الموضوع الأول- التمرين الثاني

1-أ-عين الأعداد الطبيعية التي مربع كل منها يقسم 2009

u_0 و α عددان طبيعيان غير معدومين

(u_n) متتالية هندسية أساسها α وحدها الأول u_0 بحيث

$u_1^2 + u_2 + 35\,\alpha^2 = 2009$

1-ب-احسب α و u_0

نضع $\alpha = 7$ و $u_0 = 2$ ، احسب u_n بدلالة n

2-نضع $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

2-أ-عبر عن S_n بدلالة n

2-ب-عين العدد الطبيعي n حتى يكون $S_n = 800$

الحل

1-أ-تعيين الأعداد الطبيعية التي مربع كل منها يقسم 2009

2009	7
287	7
41	41
1	

$2009 = 7^2 \times 41$

ومنه الأعداد الطبيعية التي مربع كل منها يقسم 2009 هي 7 ، 1

1-ب-حساب a و u_0

لدينا $u_1^2 + u_2 + 35\,a^2 = 2009$ و $u_0 > 0$ و $a > 0$

بما أن (u_n) متتالية هندسية فإن:

$u_1 = u_0\, a$

$u_2 = u_0\, a^2$

ومنه $(u_0\, a)^2 + u_0 a^2 + 35a^2 = 2009$

$a^2[u_0^2 + u_0 + 35] = 2009$

$a^2[u_0^2 + u_0 + 35] = 7^2 \times 41 \times 1^2$

ومنه $a^2 = 1$ أو $a^2 = 7^2$

اذا كان $a^2 = 1$

فإن $a = 1$ لأن $a > 0$

ومنه $u_0^2 + u_0 + 35 = 2009$

$u_0^2 + u_0 - 1974 = 0$

$\Delta = 7897$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{7897}$

$u_{0_1} = \dfrac{1-\sqrt{7897}}{2} \notin \mathbb{N}$ مرفوض

$u_{0_2} = \dfrac{1+\sqrt{7897}}{2} \notin \mathbb{N}$ مرفوض

ومنه $a = 1$ مرفوض

ومنه $a^2 = 7^2 \Rightarrow a = 7$ (لأن $a > 0$)

$u_0^2 + u_0 + 35 = 41$

$u_0^2 + u_0 - 6 = 0$

$\Delta = 1 - 4(1)(-6) = 25$

$\sqrt{\Delta} = 5$

$u_{0_1} = \frac{-1-5}{2} = -3$ مرفوض

لأن $u_0 > 0$

$u_{0_2} = \dfrac{-1+5}{2} = 2$

ومنه $u_0 = 2$

-حساب u_n بدلالة n

(u_n) متتالية هندسية ومنه $u_n = u_0 q^n$

$u_n = 2 \times 7^n$

2-أ-التعبير عن S_n بدلالة n:

S_n هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية ومنه:

$$S_n = 2\,\frac{7^{n+1}-1}{7-1}$$

$$= 2\,\frac{7^{n+1}-1}{6}$$

$$S_n = \frac{7^{n+1}-1}{3}$$

2-ب-تعيين العدد الطبيعي n حتى تكون $S_n = 800$

$S_n = 800$

$\dfrac{7^{n+1}-1}{3} = 800$

$7^{n+1} - 1 = 2400$

$7^{n+1} = 2401$

باستعمال طريقة التحليل نجد

2401	7
343	7
49	7
7	7
1	

ومنه $2401 = 7^4$

معناه $7^{n+1} = 7^4$

ومنه $n + 1 = 4$

$n = 3$

ومنه قيمة n هي 3

53. بكالوريا 2009 تقني رياضي

الموضوع الثاني – التمرين الرابع

1- حل المعادلة التفاضلية: $y' = (\ln 2)y$

2- نسمي f الحل الخاص لهذه المعادلة الذي يحقق $f(0) = 1$ ، عين عبارة $f(x)$

3- n عدد طبيعي

3-أ- ادرس بواقي القسمة الاقليدية على 7 للعدد 2^n

3-ب- استنتج باقي القسمة الاقليدية على 7 للعدد $f(2009) - 4$

4-أ- احسب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n = f(0) + f(1) + \cdots + f(n)$

4-ب- عين قيم العدد الطبيعي n التي يقبل من أجلها S_n القسمة على 7

الحل

1-حل المعادلة التفاضلية: $y' = (\ln 2)y$

لدينا المعادلة التفاضلية من الشكل $y' = ay$

ومنه الحلول هي الدوال من الشكل $y = ce^{xa}$

إذن $y = ce^{x\ln 2}$

2-تعيين عبارة $f(x)$

لدينا: $f(0) = 1$

و $f(x) = ce^{x\ln 2}$

$f(0) = ce^{0\ln 2} = ce^0$

$f(0) = c$

بالمطابقة نجد $c = 1$ ومنه $f(x) = e^{x\ln 2}$

3-أ-دراسة بواقي قسمة الإقليدية على 7 للعدد 2^n

$n = 0$ $\quad 2^0 \equiv 1[7]$

$n = 1$ $\quad 2^1 \equiv 2[7]$

$n = 2$ $\quad 2^2 \equiv 4[7]$

$n = 3$ $\quad 2^3 \equiv 1[7]$

دور القسمة هو من الشكل $3k$

$n \equiv$	$3k$	$3k+1$	$3k+2$	$[3]$
$2^n \equiv$	1	2	4	$[7]$

البواقي لـ 2^n على 7 هي: $r = \{1; 2; 4\}$

3-ب-استنتاج باقي القسمة الاقليدية على 7 للعدد $f(2009) - 4$

لدينا: $f(x) = e^{x\ln 2}$

$f(2009) = e^{2009\ln 2}$

$f(2009) = e^{\ln 2^{2009}}$

أي $f(2009) = 2^{2009}$

لدينا: $2009 = 3(669) + 2$

هي من الشكل $3k + 2$

ومنه $2^{2009} = 2^{3k+2} \equiv 4[7]$

ومنه $2^{2009} \equiv 4[7]$

$2^{2009} - 4 \equiv 0[7]$

ومنه الباقي هو 0

4-أ-حساب بدلالة n المجموع S_n حيث:

لدينا: $S_n = f(0) + f(1) + \dots + f(n)$

$f(n) = e^{n\ln 2}$

$= e^{\ln 2^n}$

ومنه $= 2^n$

معناه $f(n) = 2^n$

$f(0) = 1$

$f(1) = 2$

$f(2) = 2^2$

.

$f(n) = 2^n$

معناه $S_n = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n$

ومنه S_n هي مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها $q = 2$ وحدها الأول: $v_0 = 1$

ومنه $S_n = 1\frac{2^{n-0+1}-1}{2-1}$

$S_n = \frac{2^{n+1}-1}{1} = 2^{n+1} - 1$

4-ب-تعيين قيم العدد الطبيعي n التي يقبل من أجلها S_n القسمة على 7

$S_n = 2^{n+1} - 1$

S_n يقبل القسمة على 7 إذا كان $S_n \equiv 0[7]$

$2^{n+1} - 1 \equiv 0[7]$

$2^{n+1} \equiv 1[7]$

لدينا: مما سبق $2^{3k} \equiv 1[7]$

بالمطابقة نجد $2^{3k} = 2^{n+1}$

$n + 1 = 3k$

$n = 3k - 1$

$n = 3k + 2$

ومنه قيم n هي $n = 3k + 2$ مع $k \in \mathbb{N}$

54. بكالوريا 2008 تقني رياضي

الموضوع الأول – التمرين الثالث

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0; 2]$ بالعبارة

$$f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$$

1-أ- ادرس تغيرات الدالة f على المجال $[0; 2]$

ب- أنشئ (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (الوحدة على المحورين $4cm$).

جـ- برهن أنه إذا كان $x \in [0; 2]$ فإن: $f(x) \in [0; 2]$.

2- نعرف المتتالية العددية (u_n) على $\mathbb{N}$ كالآتي

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

2-أ- برر وجود المتتالية (u_n) احسب الحدين u_1 و u_2.

2-ب- مثل الحدود u_0, u_1 و u_2 على محور الفواصل و ذلك بالاستعانة بالمنحنى (C) و المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x$.

2-جـ- ضع تخمينا حول اتجاه تغير (u_n) وتقاربها إنطلاقا من التمثيل السابق.

3-أ- برهن بالتراجع أن $0 \le u_n \le \sqrt{3}$ من أجل كل عدد طبيعي n

3-ب- برهن أنه مهما يكن العدد الطبيعي n فإن $u_{n+1} > u_n$.

ماذا تستنتج بالنسبة إلى تقارب (u_n)؟

3-جـ- تحقق أن $u_{n+1} - \sqrt{3} \le \frac{2-\sqrt{3}}{u_n+2}(u_n - \sqrt{3})$ من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم.

3-د- عين عددا حقيقيا k من $]0;1[$ بحيث $|u_{n+1} - \sqrt{3}| \le k|u_n - \sqrt{3}|$

بين أنه من أجل $n \in \mathbb{N}^*$ $|u_n - \sqrt{3}| \le k^n|u_0 - \sqrt{3}|$. استنتج $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

الحل

1-أ- دراسة تغيرات الدالة f

f معرفة على المجال $[0;2]$ بالعبارة $f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$

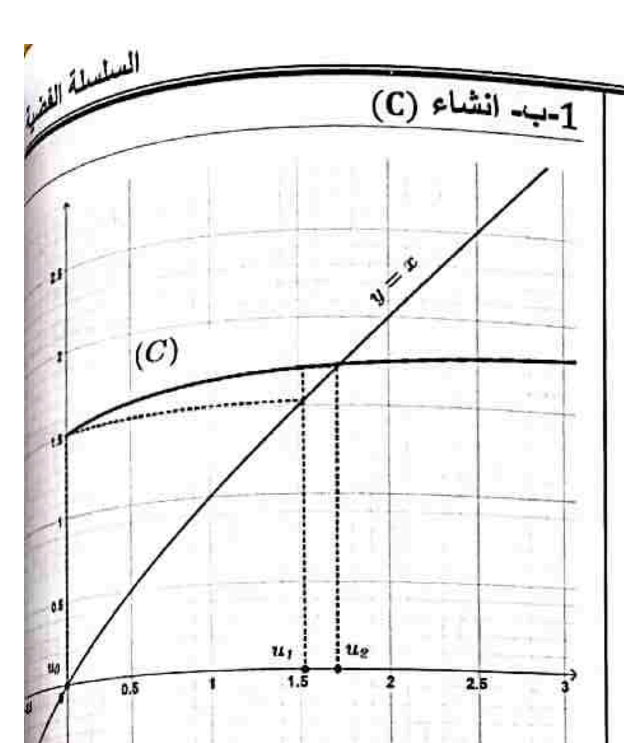
f قابلة للاشتقاق على المجال $[0;2]$ ودالتها المشتقة

$$f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$$

نلاحظ أن $f'(x) > 0$ من أجل كل $x \in [0;2]$ ومنه f متزايدة تماما على $[0;2]$

x	0	2
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$\frac{3}{2}$ ↗	$\frac{7}{4}$

1-ب- انشاء (C)



1-جـ- البرهان أن $f(x) \in [0;2]$ لما $x \in [0;2]$

لدينا $0 \le x \le 2$

بما أن f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $x \in [0;2]$ فإن

$$f(0) \le f(x) \le f(2)$$

أي $\frac{3}{2} \le f(x) \le \frac{7}{4}$

وبما أن $\left[\frac{3}{2};\frac{7}{4}\right] \subset [0;2]$ فإن: $0 \le f(x) \le 2$

ومنه من أجل كل $x \in [0;2]$ فإن $f(x) \in [0;2]$

2-أ- تبرير وجود متتالية (u_n)

بما أن الدالة f معرفة من أجل كل x من I و $f(x) \in I$ و $u_0 \in I$ فإننا نستطيع تعريف متتالية (u_n) بـ: $u_{n+1} = f(u_n) = \frac{2u_n+3}{u_n+2}$

حساب الحدين u_1 و u_2

لدينا: $u_1 = \frac{2u_0+3}{u_0+2}$

إذن $u_1 = \frac{3}{2}$

و $u_2 = \frac{12}{7}$

2-ب-التمثيل على المحور السابق الحدود u_0، u_1 و u_2

2-جـ- التخمين حول اتجاه تغير (u_n)

(u_n) تبدو متزايدة تماما ومتقاربة نحو فاصلة نقطة تقاطع (C) و (Δ)

3-أ- البرهان بالتراجع أن $0 \le u_n \le \sqrt{3}$

نسمي $p(n)$ الخاصية $0 \le u_n \le \sqrt{3}$

نتحقق من صحة الخاصية من أجل $n = 0$

لدينا: $u_0 = \frac{3}{2}$ و $0 \le \frac{3}{2} \le \sqrt{3}$

ومنه $0 \le u_0 \le \sqrt{3}$ إذن $p(0)$ محققة

نفرض أن $p(n)$ محققة ونبرهن أن $p(n+1)$

أي $0 \le u_{n+1} \le \sqrt{3}$

لدينا من الفرضية $0 \le u_n \le \sqrt{3}$

وبما أن f مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{N}$ فإن

$$f(0) \le f(u_n) \le f(\sqrt{3})$$

ومنه $0 \le u_{n+1} \le \sqrt{3}$ أي $p(n+1)$ محققة .

وأخيرا $0 < u_n < \sqrt{3}$ من أجل كل عدد طبيعي n

3-ب-البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_{n+1} > u_n$

لدينا:
$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n+3}{u_n+2} - u_n$$
$$= \frac{2u_n+3-u_n^2-2u_n}{u_n+2}$$
$$= \frac{3-u_n^2}{u_n+2}$$
$$= \frac{(u_n+\sqrt{3})(\sqrt{3}-u_n)}{u_n+2}$$

لدينا من السؤال(3-أ-) $0 \le u_n \le \sqrt{3}$

ومنه $0 \le u_n + \sqrt{3}$ و $0 \le u_n + 2$

و $\sqrt{3} - u_n \ge 0$

إذن $u_{n+1} - u_n > 0$ ومنه $u_{n+1} > u_n$

-تقارب u_n: من نتائج السؤال 3-ب-

نجد أن $u_{n+1} > u_n$ ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد $\sqrt{3}$ فإن (u_n) متقاربة

3-جـ- التحقق أن

$$u_{n+1} - \sqrt{3} \le \frac{2-\sqrt{3}}{u_n+2}(u_n - \sqrt{3})$$

معناه نبين أن:

$$u_{n+1} - \sqrt{3} - \frac{2-\sqrt{3}}{u_n+2}(u_n - \sqrt{3}) \le 0$$

لدينا: $u_{n+1} - \sqrt{3} - \frac{2-\sqrt{3}}{u_n+2}(u_n - \sqrt{3})$

ومنه:

$$= \frac{2u_n+3}{u_n+2} - \sqrt{3} - \left(\frac{2-\sqrt{3}}{u_n+2}(u_n - \sqrt{3})\right)$$
$$= \frac{2u_n+3}{u_n+2} - \sqrt{3} - \frac{2u_n - 2\sqrt{3} - \sqrt{3}\,u_n + 3}{u_n+2}$$
$$= \frac{2u_n+3}{u_n+2} - \sqrt{3} - \left[\frac{2u_n+3}{u_n+2} - \sqrt{3}\left(\frac{u_n+2}{u_n+2}\right)\right]$$
$$= 0 \le 0$$

3-د- تعيين عدد حقيقي k من المجال $]0;1[$ حيث $|u_{n+1} - \sqrt{3}| \le k|u_n - \sqrt{3}|$

لدينا: $u_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{2-\sqrt{3}}{u_n+2}(u_n - \sqrt{3})$

بإدخال القيمة المطلقة نجد

$$|u_{n+1} - \sqrt{3}| = \left|\frac{2-\sqrt{3}}{u_n+2}\right| |u_n - \sqrt{3}|$$

ولدينا: $0 \le u_n \le \sqrt{3}$

$$2 \le u_n + 2 \le \sqrt{3} + 2$$
$$2 \le |u_n + 2| \le |\sqrt{3} + 2|$$

باستعمال المقلوب نجد:

$$\frac{1}{\sqrt{3}+2} \le \left|\frac{1}{u_n+2}\right| \le \frac{1}{2}$$

ولدينا: $\left|\frac{1}{u_n+2}\right| = \frac{|u_{n+1}-\sqrt{3}|}{|2-\sqrt{3}| \times |u_n - \sqrt{3}|}$

$$\frac{|u_{n+1}-\sqrt{3}|}{|2-\sqrt{3}| \times |u_n - \sqrt{3}|} \le \frac{1}{2}$$

ومنه $|u_{n+1} - \sqrt{3}| \le \frac{|2-\sqrt{3}|}{2} \times |u_n - \sqrt{3}|$

ومنه بالمطابقة نجد

$$k = \frac{2-\sqrt{3}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$k \in]0;1[$$

-تبيان أن $|u_n - \sqrt{3}| \le k^n |u_0 - \sqrt{3}|$

__ط1:__ لدينا $|u_{n+1} - \sqrt{3}| \le k|u_n - \sqrt{3}|$

ومنه $|u_n - \sqrt{3}| \le k|u_{n-1} - \sqrt{3}|$

$$|u_{n-1} - \sqrt{3}| \le k|u_{n-2} - \sqrt{3}|$$
$$|u_1 - \sqrt{3}| \le k|u_0 - \sqrt{3}|.$$

بالضرب طرفا لطرف نجد وبما أن جميع الحدود موجبة

$$|u_n - \sqrt{3}| \times |u_{n-1} - \sqrt{3}| \times \dots \times |u_1 - \sqrt{3}| \le k \times k \times \dots \times |u_{n-1} - \sqrt{3}| \times |u_{n-2} - \sqrt{3}| \times \dots \times |u_0 - \sqrt{3}|$$

بالاختزال نجد $|u_n - \sqrt{3}| \le k^n |u_0 - \sqrt{3}|$

__ط2:__ -نسمي $p(n)$ الخاصية

$$|u_n - \sqrt{3}| \le k^n |u_0 - \sqrt{3}|$$

- نتحقق من الخاصية من أجل $n = 0$

لدينا: $|u_0 - \sqrt{3}| \le |u_0 - \sqrt{3}|$ (لأن $k^0 = 1$) محققة

-نفرض أن $p(n)$ صحيحة

أي $|u_n - \sqrt{3}| \leq k^n|u_0 - \sqrt{3}|$

ونتحقق من صحة $p(n+1)$

أي $|u_{n+1} - \sqrt{3}| \leq k^{n+1}|u_0 - \sqrt{3}|$

لدينا: $|u_n - \sqrt{3}| \leq k^n|u_0 - \sqrt{3}|$

بالضرب في k نجد

$k|u_n - \sqrt{3}| \leq k^{n+1}|u_0 - \sqrt{3}|$

لدينا مما سبق $|u_{n+1} - \sqrt{3}| \leq k|u_n - \sqrt{3}|$

ومنه $|u_{n+1} - \sqrt{3}| \leq k^{n+1}|u_0 - \sqrt{3}|$

- وأخيرا $|u_n - \sqrt{3}| \leq k^n|u_0 - \sqrt{3}|$ من أجل كل عدد طبيعي $n \in \mathbb{N}^*$

- استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

لدينا: $|u_n - \sqrt{3}| \leq k^n|u_0 - \sqrt{3}|$

$0 \leq |u_n - \sqrt{3}| \leq \lim\limits_{n\to+\infty} k^n|u_0 - \sqrt{3}|$

$\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n ...$

وبما أن $0 < k < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} k^n = 0$

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} k^n|u_0 - \sqrt{3}| = 0$

ومنه حسب النهاية بالحصر

نجد $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n - \sqrt{3}| = 0$

إذن $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{3}}$

مواضيع شعبة الرياضيات



55. بكالوريا 2021 الرياضيات

الموضوع الأول-التمرين الأول

المتتالية العددية (u_n) معرفة بـ : $u_0=-\frac{3}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{11u_n+4}{-4u_n+1}$

1)أ- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1}=-\frac{11}{4}+\frac{27}{4(-4u_n+1)}$$

ب- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-2<u_n<-1$

جـ بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

2) المتتالية العددية (v_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=\frac{2u_n+1}{u_n+2}$

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 ثم احسب حدها الأول.

ب- اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\frac{3}{2+4\times3^n}-2$

جـ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

3)أ- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{3}{u_n+2}-2=-v_n$

ب- نضع من أجل كل عدد طبيعي n :

$$S_n=\ln\left(\frac{3}{u_0+2}-2\right)+\ln\left(\frac{3}{u_1+2}-2\right)+\dots+\ln\left(\frac{3}{u_n+2}-2\right)$$

احسب S_n بدلالة n.

الحل

1-أ-التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1}=-\frac{11}{4}+\frac{27}{4(-4u_n+1)}$$

لدينا :

$$-\frac{11}{4}+\frac{27}{4(-4u_n+1)}=\frac{44u_n-11+27}{4(-4u_n+1)}=\frac{44u_n+16}{4(-4u_n+1)}$$

أي

$$=\frac{4(11u_n+4)}{4(-4u_n+1)}=\frac{11u_n+4}{-4u_n+1}$$

ومنه

$$u_{n+1}=-\frac{11}{4}+\frac{27}{4(-4u_n+1)}$$

1-ب-البرهان بالتراجع أن : $-2<u_n<-1$

نسمي $P(n)$ هاته الخاصية : $-2<u_n<-1$

نتأكد من أجل $n=0$: $-2<u_0=-\frac{3}{2}<-1$

أي $P(0)$ محققة

نفرض صحة $P(n)$ حيث $-2<u_n<-1$

ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي

$$-2<u_{n+1}<-1$$

لدينا من الفرض $-2<u_n<-1$

بضرب في -4 واضافة 1 نجد:

$$5<-4u_n+1<9$$

بإستعمال المقلوب نجد : $\frac{1}{9}<\frac{1}{-4u_n+1}<\frac{1}{5}$

بالضرب في $\frac{27}{4}$ نجد :

$$\frac{27}{36}<\frac{27}{4(-4u_n+1)}<\frac{27}{20}$$

باضافة $-\frac{11}{4}$ نجد :

$$-2<-\frac{11}{4}+\frac{27}{4(-4u_n+1)}<-\frac{7}{5}$$

و $-\frac{7}{5}<-1$ اذن $-2<u_{n+1}<-1$

أي $P(n+1)$ محققة

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$-2<u_n<-1$$

1-جـ-اثبات أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما :

حتى تكون متناقصة تماما يجب :

$$u_{n+1}-u_n<0$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{11u_n+4}{-4u_n+1}-u_n$$

$$=\frac{4u_n^2+10u_n+4}{-4u_n+1}$$

اشارة الفرق من اشارة البسط :

نحسب Δ : $\Delta=36>0$

$u_{n_1}=-\frac{1}{2}$ ، $u_{n_2}=-2$

بما أن $-2<u_n<-1$ فإن $u_{n+1}-u_n<0$

ومنه فالمتتالية (u_n) متناقصة تماما

2-أ-إثبات أن (v_n) متتالية هندسية :

حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يجب:

$$v_{n+1}=v_n\times q$$

$$v_{n+1}=\frac{2u_{n+1}+1}{u_{n+1}+2}$$

$$= \frac{2\left(\frac{11u_n+4}{-4u_n+1}\right)+1}{\frac{11u_n+4}{-4u_n+1}+2}$$
$$= \frac{22u_n+8-4u_n+1}{11u_n+4-8u_n+2}$$
$$= \frac{18u_n+9}{3u_n+6}$$

ومنه $v_{n+1} = \frac{9}{3}\left(\frac{2u_n+1}{u_n+2}\right)$

اذن $v_{n+1} = 3v_n$

ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = 3$ وحدها الاول v_0 حيث $v_0 = \frac{2u_0+1}{u_0+2} = -4$

2-ب-كتابة عبارة الحد العام لـ (v_n) واستنتاج أن:

$$u_n = \frac{3}{2+4\times 3^n} - 2$$

كتابة عبارة الحد العام : $v_n = v_0 q^n$

اي أن $v_n = -4\times 3^n$

استنتاج أن $u_n = \frac{3}{2+4\times 3^n} - 2$

لدينا $v_n = \frac{2u_n+1}{u_n+2}$

$v_n u_n + 2v_n = 2u_n + 1$

ومنه $u_n(v_n - 2) = -2v_n + 1$

اذن $u_n = \frac{-2v_n+1}{v_n-2}$

أي $u_n = \frac{-2(-4\times 3^n)+1}{-4\times 3^n - 2}$

اذن $u_n = \frac{-8\times 3^n - 1}{2+4\times 3^n}$

ولدينا $\frac{3}{2+4\times 3^n} - 2 = \frac{3-4-8\times 3^n}{2+4\times 3^n}$
$= \frac{-8\times 3^n - 1}{2+4\times 3^n}$

ومنه $u_n = \frac{3}{2+4\times 3^n} - 2$

2-جـ-حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{3}{2+4\times 3^n} - 2\right] = -2$$

لأن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{3}{2+4\times 3^n}\right] = 0$

3-أ-التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$\frac{3}{u_n+2} - 2 = -v_n$$
$$\frac{3}{u_n+2} - 2 = \frac{3-2u_n-4}{u_n+2}$$

أي : $\frac{3}{u_n+2} - 2 = \frac{-2u_n-1}{u_n+2}$

ومنه: $\frac{3}{u_n+2} - 2 = -v_n$

3-ب-حساب S_n بدلالة n :

لدينا :

$$S_n = \ln\left(\frac{3}{u_0+2} - 2\right) + \ln\left(\frac{3}{u_1+2} - 2\right) + \cdots + \ln\left(\frac{3}{u_n+2} - 2\right)$$

ونعلم أن $-v_n = \frac{3}{u_n+2} - 2$

بالتعويض نجد :

$S_n = \ln(-v_0) + \ln(-v_1) + \cdots + \ln(-v_n)$

لدينا $-v_n = 4\times 3^n$

ومنه $\ln(-v_n) = \ln 4 + n\ln 3$

ومنه $(\ln(-v_n))$ متتالية حسابية أساسها $\ln 3$ وحدها الأول $\ln 4$

ومنه : $S_n = \frac{(n+1)}{2}(\ln 4 + \ln 4 + n\ln 3)$

$$S_n = \frac{n+1}{2}(2\ln 4 + n\ln 3)$$

56. بكالوريا 2021 الرياضيات

الموضوع الثاني-التمرين الأول

المتتالية العددية (u_n) معرفة بـ : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{2 + \frac{1}{2}u_n^2}$

1) أ-برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 2$

ب- بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

2) المتتالية العددية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n^2 - 4$

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب حساب حدها الأول.

ب- اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \sqrt{4 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

جـ- احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n :

$S_n = u_0^2 + u_1^2 + \cdots + u_n^2$

أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$S_n = \frac{n\times 2^{n+2} + 3}{2^n} - 2$$

ب- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n :
$$PGCD(2^n;3+n\times 2^{n+2})=PGCD(2^n;3)$$
جـ- استنتج أن: $PGCD(2^n;3+n\times 2^{n+2})=1$
د- جد قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون:
$$S_n=\frac{83}{8}$$

الحل

1-أ-البرهان بالتراجع أن : $0<u_n<2$

نسمي $P(n)$ هاته الخاصية : $0<u_n<2$
نتأكد من أجل $n=0$
$$0<u_0=1<2$$
ومنه $p(0)$ محققة
نفرض صحة الخاصية $P(n)$: $0<u_n<2$
نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $0<u_{n+1}<2$
لدينا $0<u_n<2$
بالتربيع نجد $0<u_n^2<4$
بالضرب في $\frac{1}{2}$ نجد $0<\frac{1}{2}u_n^2<2$ بإضافة 2 نجد:
$$2<2+\frac{1}{2}u_n^2<4$$
بالجذر التربيعي نجد
$$0<\sqrt{2} \text{ و } \sqrt{2}<\sqrt{2+\frac{1}{2}u_n^2}<2$$
ومنه $0<\sqrt{2+\frac{1}{2}u_n^2}<2$
اذن : $0<u_{n+1}<2$ أي $p(n+1)$ محققة
ومنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<2$

1-ب-بيان أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتاج أنها متقاربة :

حتى تكون (u_n) متتالية متزايدة تماما يجب أن تحقق:
$$u_{n+1}-u_n>0$$
حيث :
$$u_{n+1}-u_n=\sqrt{2+\frac{1}{2}u_n^2}-u_n$$
$$=\frac{2+\frac{1}{2}u_n^2-u_n^2}{\sqrt{2+\frac{1}{2}u_n^2}+u_n}$$
$$=\frac{2-\frac{1}{2}u_n^2}{\sqrt{2+\frac{1}{2}u_n^2}+u_n}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}(4-u_n^2)}{\sqrt{2+\frac{1}{2}u_n^2}+u_n}$$

بما أن $0<u_n<2$ فإن $u_{n+1}-u_n>0$
ومنه (u_n) متتالية متزايدة تماما

استنتاج أنها متقاربة :

بما أن (u_n) متتالية متزايدة تماما ومحدودة من الاعلى بالعدد 2 $(u_n<2)$ فهي متقاربة نحو نهايتها l حيث $l\le 2$

2-أ-اثبات أن (v_n) متتالية هندسية :

يجب أن تحقق : $v_{n+1}=v_n\times q$
لدينا : $v_n=u_n^2-4$
ومنه :
$$v_{n+1}=(u_{n+1})^2-4=2+\frac{1}{2}u_n^2-4$$
$$=\frac{1}{2}(u_n^2-4)$$
$$v_{n+1}=v_n\times\frac{1}{2}$$
ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الاول v_0 حيث $v_0=u_0^2-4=-3$

2-ب-كتابة عبارة الحد العام لـ (v_n) بدلالة n ثم استنتاج أن: $u_n=\sqrt{2-3\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

$$v_n=v_0\times q^n$$
أي
$$v_n=-3\left(\frac{1}{2}\right)^n$$
الاستنتاج:
لدينا $v_n=u_n^2-4$
ومنه $u_n=\sqrt{v_n+4}$
إذن $u_n=\sqrt{-3\left(\frac{1}{2}\right)^n+4}$

2-جـ-حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$:

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\sqrt{-3\left(\frac{1}{2}\right)^n+4}=2$$
لأن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=0$

3-أ-بيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n :
$$S_n=\frac{n\times 2^{n+2}+3}{2^n}-2$$

لدينا : $S_n=u_0^2+u_1^2+\cdots+u_n^2$
و $v_n=u_n^2-4$ ومنه $u_n^2=v_n+4$
يعني أن
$$S_n=(v_0+4)+(v_1+4)+\cdots+(v_n+4)$$
$$S_n=4(n+1)+v_0+v_1+\cdots+v_n$$

أي $S_n = 4(n+1) + v_0\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$

اذن $S_n = 4(n+1) - 3\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{2}-1}$

ومنه $S_n = 4(n+1) + 6\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1\right)$

$S_n = 4(n+1) + 6\left(\frac{1}{2^{n+1}} - 1\right)$

$S_n = 4(n+1) + \left[\frac{3}{2^n} - 6\right]$

$S_n = 4n + \frac{3}{2^n} - 2$

أي أن $S_n = \frac{n\times 2^{n+2}+3}{2^n} - 2$

3-ب-تبيان أنه من أجل كل عد طبيعي n :

$PGCD(2^n; 3+n\times 2^{n+2}) = PGCD(2^n; 3)$

نضع : $d = PGCD(2^n; 3+n\times 2^{n+2})$

و $d' = PGCD(2^n; 3)$

حيث $d = PGCD(2^n; 3+n\times 2^{n+2})$

يعني أن d قاسم للعددين 2^n و $3+n\times 2^{n+2}$

← ومنه فإن d قاسم لعددين $3+n\times 2^{n+2}$ و $n\times 2^{n+2}$

← إذن d قاسم للعدد 3

$(3+n\times 2^{n+2} - n\times 2^{n+2} = 3)$

أي أن d قاسم للعددين 3 و 2^n

اذن d قاسم لـ d' .... (1)

$d' = PGCD(2^n; 3)$ معناه أن d' قاسم للعددين 2^n و 3 ومنه فإن d' قاسم للعدد $3+n\times 2^{n+2}$

اذن d' قاسم للعددين $3+n\times 2^{n+2}$ و 3 و 2^n

إذن d' قاسم لـ d ...... (2)

من (1) و (2) نستنتج أن :

$PGCD(2^n; 3+n\times 2^{n+2}) = PGCD(2^n; 3)$

3-جـ-استنتاج :

$\boldsymbol{PGCD(2^n; 3+n\times 2^{n+2}) = 1}$

بما أن $PGCD(2; 3) = 1$

فإن $PGCD(2^n; 3) = 1$

ولدينا

$PGCD(2^n; 3+n\times 2^{n+2}) = PGCD(2^n; 3)$

اذن : $PGCD(2^n; 3+n\times 2^{n+2}) = 1$

3-د-ايجاد قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $S_n = \frac{83}{8}$

لدينا $S_n = \frac{n\times 2^{n+2}+3}{2^n} - 2$

حتى يكون $S_n = \frac{83}{8}$

يجب أن يكون : $\frac{n\times 2^{n+2}+3}{2^n} - 2 = \frac{83}{8}$

أي $\frac{n\times 2^{n+2}+3}{2^n} = \frac{99}{8}$

بما أن $PGCD(2^n; 3+n\times 2^{n+2}) = 1$

بالمطابقة نجد

$$\begin{cases} 3+n\times 2^{n+2} = 99 \\ \text{و} \\ 2^n = 8 \end{cases}$$

$2^n = 8$

بالتعويض في $3+n\times 2^{n+2} = 99$ نجد:

$3+n\times 2^{3+2} = 99$

$32n = 96$

$n = 3$

ومنه قيمة n التي من أجلها $S_n = \frac{83}{8}$ هي $n=3$

57. بكالوريا 2020 رياضيات

الموضوع الأول – التمرين الأول

الدالة العددية f معرفة على المجال $[1,4]$ بـ:

$$f(x) = \frac{4x+4}{9-x}$$

1-أ- أدرس اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $[1,4]$.

1-ب- أثبت انه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1,4]$ فإن: $f(x)\epsilon[1,4]$

2- المتتالية العددية (u_n) معرفة بحدها الأول u_0 حيث: $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

2-أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$1 < u_n < 4$$

2-ب-أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقارية

3- المتتالية العددية (v_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي:

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n - 4}$$

3-أ- برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0

3-ب- عبّر عن الحد العام v_n بدلالة n، ثم استنتج الحد العام u_n بدلالة n واحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

4- المجموع S_n معرّف بـ:

$S_n = v_0 + 8v_1 + 8^2v_2 + \cdots + 8^n v_n$

أ-أحسب S_n بدلالة n

الحل

1-أ. دراسة اتجاه تغير الدالة f على المجال $[1,4]$

الدالة f مستمرة وقابلة للاشتقاق على المجال $[1,4]$ ودالتها المشتقة

$$f'(x)=\left(\frac{4(9-x)+(4x+4)}{(9-x)^2}\right)$$

$$f'(x)=\frac{36-4x+4x+4}{(9-x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{40}{(9-x)^2}$$

إشارة المشتقة $f'(x)$

نعلم أن $(9-x)^2>0$ و $40>0$

ومنه $f'(x)>0$

أي أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[1,4]$

1-ب. البرهان أن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1;4]$ فإن $f(x)\in[1;4]$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1;4]$

$x\epsilon[1;4]$ إذن: $1\leq x\leq 4$

وبما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[1;4]$ فإنّ:

$$f(1)\leq f(x)\leq f(4)$$

$$\frac{4(1)+4}{9-1}\leq f(x)\leq\frac{4(4)+4}{9-4}$$

$$\frac{8}{8}\leq f(x)\leq\frac{20}{5}$$

$$1\leq f(x)\leq 4$$

ومنه من أجل $x\epsilon[1;4]$ فإنّ: $f(x)\epsilon[1;4]$

2-أ. البرهان بالتراجع أن:

$$1<u_n<4$$

نسمي الخاصية $p(n)$ حيث:

$$p(n):\quad 1<u_n<4$$

من أجل $n=0$ لدينا:

$$1<2<4$$

أي:

$$1<u_0<4$$

ومنه $p(0)$ محققة من أجل $n=0$

نفرض صحة $p(n)$ من أجل n

أي أن $p(n):\ 1<u_n<4$ محققة

ونبرهن صحة $p(n+1)$ من اجل $n+1$

أي أن $1<u_{n+1}<4$

لدينا من فرضية التراجع

$$1<u_n<4$$

من السؤال (1-ب) أن:

لما $x\epsilon[1;4]$ فإن: $f(x)\epsilon[1,4]$

إذن

$$f(u_n)\epsilon[1;4]$$

$$1<f(u_n)<4$$

$$1<u_{n+1}<4$$

ومنه $p(n+1)$ محققة من أجل $n+1$

إذن من أجل كل $n\epsilon\mathbb{N}$ فإن:

$$1<u_n<4$$

ومنه $p(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n

2-ب- دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n)

ندرس إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{4u_n+4}{9-u_n}-u_n$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{4u_n+4-9u_n+u_n{}^2}{9-u_n}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n^2-5u_n+4}{9-u_n}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{(u_n-1)(u_n-4)}{9-u_n}$$

لدينا

$$1<u_n<4$$

ومنه

$$9-u_n>0$$

ومنه إشارة الفرق من إشارة الجداء

$$(u_n-1)(u_n-4)$$

لدينا مما سبق:

$$u_n<4$$

$$u_n-4<0$$

و $u_n>1$ أي $u_n-1>0$

$$(u_n-1)(u_n-4)<0$$

ومنه المتتالية u_n متناقصة تماما على المجال $[1;4]$

-استنتاج أن u_n متتالية متقاربة

بما أن u_n متتالية متناقصة تماما على المجال $[1;4]$ ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة نحو نهاية l

3-أ البرهان أن (v_n) متتالية هندسية

حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يجب تحقّق:

$$v_{n+1}=v_n\times q$$

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}-4}$$

$$v_{n+1}=\frac{\frac{4u_n+4}{9-u_n}-1}{\frac{4u_n+4}{9-u_n}-4}$$

$$v_{n+1}=\frac{4u_n+4-9+u_n}{4u_n+4-36+4u_n}$$

$$v_{n+1}=\frac{5u_n-5}{8u_n-32}$$

$$v_{n+1}=\frac{5}{8}\times\frac{u_n-1}{u_n-4}$$

$$v_{n+1}=\frac{5}{8}.v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{5}{8}$

وحدها الأول v_0 حيث:

$$v_0=\frac{u_0-1}{u_0-4}=\frac{2-1}{2-4}, \quad v_0=-\frac{1}{2}$$

3-ب-عبارة الحد العام v_n بدلالة n

v_n متتالية هندسية معناه:

$$v_n=v_0\times q^n$$

$$v_n=-\frac{1}{2}\left(\frac{5}{8}\right)^n$$

استنتاج عبارة u_n:

لدينا: $v_n=\frac{u_n-1}{u_n-4}$ ومنه

$$v_nu_n-4v_n=u_n-1$$

$$v_nu_n-u_n=4v_n-1$$

$$u_n(v_n-1)=4v_n-1$$

$$u_n=\frac{4v_n-1}{v_n-1}$$

ومنه

$$u_n=\frac{4\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{5}{8}\right)^n\right]-1}{-\frac{1}{2}\left(\frac{5}{8}\right)^n-1}$$

$$u_n=\frac{-2\left(\frac{5}{8}\right)^n-1}{-\frac{1}{2}\left(\frac{5}{8}\right)^n-1}$$

$$u_n=\frac{2\left(\frac{5}{8}\right)^n+1}{\frac{1}{2}\left(\frac{5}{8}\right)^n+1}$$

$$u_n=\frac{4\left(\frac{5}{8}\right)^n+2}{\left(\frac{5}{8}\right)^n+2}$$

حساب نهاية u_n

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{4\left(\frac{5}{8}\right)^n+2}{\left(\frac{5}{8}\right)^n+2}$$

ومنه:

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=1$$

لأن:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{8}\right)^n=0$$

4- حساب المجموع S_n

$$S_n=v_0+8v_1+\cdots+8^nv_n$$

$$v_0=-\frac{1}{2}$$

$$8v_1=8\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{8}\right)^1=-\frac{5}{2}$$

$$8^2v_2=8^2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{8}\right)^2=-\frac{1}{2}(5)^2$$

$\vdots$

$$8^n.v_n=8^n\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{8}\right)^n=-\frac{1}{2}(5)^n$$

$$S_n=\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)(5)+\left(-\frac{1}{2}\right)(5)^2+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)(5)^n$$

S_n هو مجموع متتالية هندسية أساسها $q=5$ وحدها الأول v_0 ومنه:

$$S_n=v_0.\frac{1-q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}$$

$$S_n=\left(-\frac{1}{2}\right).\frac{1-(5)^{n+1}}{1-5}$$

$$S_n=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{-4}(1-5^{n+1})$$

$$S_n=\frac{1}{8}[1-(5)^{n+1}]$$

58. بكالوريا 2020 الرياضيات

الموضوع الثاني – التمرين الثالث

المتتاليتان العدديتان (u_n) و (v_n) معرفتان على $\mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 3\alpha u_n + (1 - 3\alpha)v_n \end{cases}$$

و

$$\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = 3\alpha v_n + (1 - 3\alpha)u_n \end{cases}$$ α عدد حقيقي

المتتالية العددية (w_n) معرفة على N:

$$w_n = v_n - u_n$$

1-أ) أحسب w_0 ثم أحسب w_1 بدلالة α

ب) بيّن أنّ (w_n) متتالية هندسية أساسها $(6\alpha - 1)$

ج) أكتب عبارة w_n بدلالة n و α، ثم عيّن قيم α حتى تكون: $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$

نفرض في كل ما يلي: $\frac{1}{6} < \alpha < \frac{1}{3}$

2-أ) أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما وأن (v_n) متناقصة تماما

ب) استنتج أن (u_n) و (v_n) متقاربتان نحو نفس النهاية l.

3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n + v_n = 2$ ، واستنتج قيمة l

4) أحسب بدلالة α المجموع S حيث:

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{2020}$$

الحل

1-حساب w_0 و w_1 بدلالة α

لدينا: $w_n = v_n - u_n$ ومنه:

$$w_0 = v_0 - u_0 = 3 - (-1) = 4$$
$$w_1 = v_1 - u_1$$
$$v_1 = 3\alpha v_0 + (1 - 3\alpha)u_0$$
$$v_1 = 3\alpha(3) + (1 - 3\alpha)(-1)$$
$$v_1 = 9\alpha - 1 + 3\alpha = 12\alpha - 1$$
$$u_1 = 3\alpha u_0 + (1 - 3\alpha)v_0$$
$$u_1 = 3\alpha(-1) + (1 - 3\alpha)(3)$$
$$u_1 = -3\alpha + 3 - 9\alpha = -12\alpha + 3$$

ومنه

$$w_1 = (12\alpha - 1) - (-12\alpha + 3)$$
$$w_1 = 12\alpha - 1 + 12\alpha - 3 = 4(6\alpha - 1)$$

1-ب-البرهان أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $q = 6\alpha - 1$

-حتى تكون (w_n) متتالية هندسية يجب تحقّق:

$$w_{n+1} = w_n \times q$$

$$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1}$$
$$= (3\alpha v_n + (1 - 3\alpha)u_n) - (3\alpha u_n + (1 - 3\alpha)v_n)$$
$$= 3\alpha v_n + u_n - 3\alpha u_n - 3\alpha u_n - v_n + 3\alpha v_n$$
$$= 6\alpha v_n - 6\alpha u_n + u_n - v_n$$
$$w_{n+1} = 6\alpha(v_n - u_n) + (u_n - v_n)$$
$$w_{n+1} = 6\alpha(v_n - u_n) - 1(v_n - u_n)$$
$$w_{n+1} = (6\alpha - 1)(v_n - u_n)$$
$$w_{n+1} = (6\alpha - 1)w_n$$

ومنه (w_n) متتالية هندسية أساسها $q = 6\alpha - 1$

1-جـ-عبارة w_n بدلالة n و α

(w_n) متتالية هندسية:

$$w_n = w_0 \times q^n$$
$$w_n = 4(6\alpha - 1)^n$$

تعيين قيم α حتى تكون

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$$

يكون $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$

معناه أن $-1 < q < 1$

وبالتالي $-1 < 6\alpha - 1 < 1$

$$0 < 6\alpha < 2$$
$$0 < \alpha < \frac{2}{6}$$
$$0 < \alpha < \frac{1}{3}$$

ومنه $\alpha \in]0, \frac{1}{3}[$

2-أ-البرهان أن (u_n) متتالية متزايدة تماما

ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$ حيث $\alpha \in]\frac{1}{6}, \frac{1}{3}[$

لدينا

$$u_{n+1} - u_n = 3\alpha u_n + (1 - 3\alpha)v_n - u_n$$
$$= (3\alpha - 1)(u_n) + (1 - 3\alpha)v_n$$
$$= (1 - 3\alpha)v_n - (1 - 3\alpha)u_n$$
$$= (1 - 3\alpha)(v_n - u_n)$$
$$= (1 - 3\alpha)w_n$$
$$u_{n+1} - u_n = (1 - 3\alpha)(4)(6\alpha - 1)^n$$

ومنه إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$ من إشارة $1 - 3\alpha$

لأن $4(6\alpha - 1)^n > 0$ ومنه: $\frac{1}{6} < \alpha < \frac{1}{3}$

وبالتالي: $-\frac{3}{3} < -3\alpha < -\frac{3}{6}$

$$-1 + 1 < -3\alpha + 1 < -\frac{1}{2} + 1$$

$$0 < -3\alpha + 1 < \frac{1}{2}$$

ومنه $1 - 3\alpha > 0$

أي أن $u_{n+1} - u_n > 0$

ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما

-البرهان أن (v_n) متتالية متناقصة تماما

ندرس إشارة الفرق

$$v_{n+1} - v_n = 3\alpha v_n + (1 - 3\alpha)u_n - v_n$$
$$= 3\alpha v_n + u_n - 3\alpha u_n - v_n$$
$$= (3\alpha - 1)v_n - (3\alpha - 1)u_n$$
$$v_{n+1} - v_n = (3\alpha - 1)(v_n - u_n)$$
$$= (3\alpha - 1)w_n$$

ومنه إشارة الفرق من إشارة $3\alpha - 1$

$$\frac{1}{6} < \alpha < \frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{2} < 3\alpha < 1$$
$$-\frac{1}{2} < 3\alpha - 1 < 0$$

ومنه $3\alpha - 1 < 0$

أي أن: $v_{n+1} - v_n < 0$

ومنه المتتالية (v_n) متناقصة تماما

2-ب- استنتاج أن (u_n) و (v_n) متقاربتان نحو نفس النهاية

بما أن (u_n) متتالية متزايدة تماما و (v_n) متناقصة تماما

و: $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = \lim_{n\to+\infty} w_n = 0$

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} u_n$$

فإن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متقاربتان عند نفس النهاية l

3-البرهان أن $u_n + v_n = 2$

نستعمل البرهان بالتراجع

نضع الخاصية $p(n)$:

$$p(n): u_n + v_n = 2$$

التحقق من صحة الخاصية $p(n)$ من أجل

$u_0 + v_0 = -1 + 3 = 2 \quad n = 0$

ومنه $p(0)$ محققة من أجل $n = 0$

نفرض صحة الخاصية $p(n)$ من اجل n أي أن

$$u_n + v_n = 2$$

ونبرهن صحة الخاصية $p(n+1)$ من أجل $n+1$

أي أن $u_{n+1} + v_{n+1} = 2$

لدينا

$$u_{n+1} + v_{n+1} = (3\alpha u_n + (1 - 3\alpha)v_n) + (3\alpha v_n + (1 - 3\alpha)u_n)$$
$$= 3\alpha u_n + v_n - 3\alpha v_n + 3\alpha v_n + u_n - 3\alpha u_n$$
$$u_{n+1} + v_{n+1} = u_n + v_n = 2$$

ومنه $u_{n+1} + v_{n+1} = 2$

أي $p(n+1)$ محققة من أجل $(n+1)$

وأخيرا $u_n + v_n = 2$ صحيحة من اجل $n \in \mathbb{N}$

-استنتاج قيمة l

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} u_n = l$$
$$u_n + v_n = 2$$
$$\lim_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = 2$$
$$l + l = 2$$
$$2l = 2$$
$$l = 1$$

4-حساب المجموع $S_n = u_0 + u_1 + .. + u_{2020}$

لدينا مما سبق

$$w_n = v_n - u_n$$

وبالتالي:

$$u_n - v_n = -w_n \dots (1)$$
$$u_n + v_n = 2 \dots\dots (2)$$

بجمع (1) و (2) نجد:

$$2u_n = 2 - w_n$$
$$u_n = \frac{(2 - w_n)}{2} = 1 - \frac{1}{2}w_n$$

ومنه

$$S_0 = \left(1 - \frac{1}{2}w_0\right) + \left(1 - \frac{1}{2}w_1\right) + \dots + \left(1 - \frac{1}{2}w_{2020}\right)$$
$$S = \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{(2021)} - \frac{1}{2}(w_0 + w_1 + \dots + w_{2020})$$
$$S = 1(2021) - \frac{1}{2}w_0 \times \frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}$$
$$S = 2021 - \frac{1}{2}\left[4\frac{1 - (6\alpha - 1)^{2021}}{1 - (6\alpha - 1)}\right]$$
$$S = 2021 - 2\left[\frac{1 - (6\alpha - 1)^{2021}}{1 - 6\alpha + 1}\right]$$
$$S = 2021 - \frac{2}{6\alpha}\left[1 - (6\alpha - 1)^{2021}\right]$$
$$S = 2021 + \frac{1}{3\alpha}\left[(6\alpha - 1)^{2021} - 1\right]$$

59. بكالوريا 2019 الرياضيات

الموضوع الأول – التمرين الأول

1- حل المعادلة $505x - 673y = 1 \dots\dots (E)$ ذات المجهول $(x;y)$ حيث x و y عددان صحيحان (لاحظ أن: $2019 = 3\times 673$ و $2020 = 4\times 505$)

2- بين أنه من أجل كل ثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) فإن: x و y من نفس الإشارة

3- نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 505 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = v_n + 673 \end{cases}$$

اكتب u_α بدلالة α ثم اكتب v_β بدلالة β حيث α و β عددان طبيعيان

4-أ- عين الحدود المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n) ثم بيّن أنّ هذه الحدود المشتركة تشكل متتالية حسابية (w_n) يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

4-ب- نضع من أجل كل عدد طبيعي n:

$$X_n = \frac{1}{505}(w_n - 2023)$$

احسب بدلالة n الجداء $p = X_1.X_2 \dots\dots X_n$

الحل

1- حل المعادلة (E)

$$505x - 673y = 1$$

لدينا

$$2019 = 3\times 673$$
$$2020 = 4\times 505$$
$$4\times 505 - 3\times 673 = 2020 - 2019 = 1$$

إذن الثنائية $(4;3)$ حل للمعادلة (E) وهو حل خاص للمعادلة (E)

$$\begin{cases} 505x - 673y = 1 \dots\dots\dots (1) \\ 4\times 505 - 3\times 673 = 1 \dots\dots (2) \end{cases}$$

نطرح المعادلة (1) مع المعادلة (2) طرفا لطرف نجد

$$505x - 673y - 4\times 505 + 3\times 673$$
$$= 1 - 1$$
$$= 0$$

ومنه

$$505(x-4) - 673(y-3) = 0$$
$$505(x-4) = 673(y-3)$$

لدينا: $PGCD(673,505) = 1$

ومنه $(x-4)$ مضاعف لـ 673 اذا

$x = 673k + 4$

و $(y-3)$ مضاعف لـ 505

إذن: $y = 505k + 3$

إذن مجموع الحلول هي الثنائية $(x;y)$ بحيث:

$x = 673k + 4 \;;\; y = 505k + 3 \quad k \in \mathbb{Z}$

2- البرهان أنه من أجل كل $(x;y)$ حل للمعادلة (E) فإن x, y من نفس الإشارة

لدينا من أجل x, y من نفس الإشارة أي موجبين معا أو سالبين معا يكون $x\times y > 0$ ومنه

$$x\times y = (673k+4)(505k+3)$$
$$= 339865k^2 + 4039k + 12$$

حساب Δ:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 > 0$$

ومنه

$$k_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \simeq 0{,}0118$$
$$k_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \simeq 0{,}018$$

إشارة $x\times y$ حسب تغيرات k

k	$-\infty$		k_1		k_2		$+\infty$
$x\times y$		$+$	0	$-$	0	$+$	

بما أن $k \in \mathbb{Z}$ ولا يوجد عدد صحيح بين k_1 و k_2 فإن $x\times y > 0$ مهما يكن $K \in \mathbb{Z}$

3- كتابة u_a بدلالة α و v_β بدلالة β

لدينا

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 505 \end{cases}$$

ومنه (u_n) متتالية حسابية أساسها 505 وحدها الأول $u_0 = 3$

ومنه حدها العام

$$u_n = u_0 + n\times 505$$
$$u_a = u_0 + a\times 505$$
$$u_a = 3 + 505a$$

ولدينا $v_{n+1} - v_n = 673$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها 673 وحدها الأول $v_0 = 4$

ومنه حدها العام

$$v_n = v_0 + n\times 673$$
$$v_\beta = v_0 + \beta\times 673$$
$$v_B = 4 + 673\beta$$

4-أ- تعيين الحدود المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n)

يعني:

$$u_a = v_\beta$$
$$3 + 505a = 4 + 673\beta$$
$$505a - 673\beta = 1$$

حلولها هي حلول المعادلة (E)

$a = 673k + 4 \quad . \beta = 505k + 3 \quad k \in \mathbb{Z}$

بيان أن الحدود المشتركة تشكل متتالية حسابية(w_n)

$u_\alpha = v_\beta \Leftrightarrow u_\alpha = 3 + 505\,\alpha = 4 + 673\,\beta$

ومنه وحسب النتائج السابقة: $\alpha = 673k + 4$

و $\beta = 505k + 3$

حساب الحدود المشتركة:

v_{505k+3} مع u_{673k+4} $k \in \mathbb{Z}$

$u_{673k+4} = 3 + 505(673k + 4)$

$= 3 + 505 \times 673k + 505 \times 4$

$= 673 \times 505k + 2023$ $\quad k \in \mathbb{N}$

ومنه الحدود المشتركة هي

$w_n = 673\ \times 505n + 2023$

وهي متتالية حسابية أساسها $r = 673 \times 505$

وحدها الأول $w_0 = 2023$

4-ب- حساب الجداء $P = X_1.X_2 \ldots\ldots X_n$

$$X_n = \frac{1}{505}(w_n - 2023\ )$$

نعوض w_n

$$X_n = \frac{1}{505}(505 \times 673n + 2023 - 2023)$$

$$X_n = 673n$$

حساب p بدلالة n

$p = X_1X_2 \times \ldots \times X_n$

$p = (673 \times 1) \times (673 \times 2) \times \ldots \times (673 \times n)$

$= (673 \times \ldots\ldots \times 673) \times (1 \times 2 \times \ldots\ldots \times n)$

$= (673)^n(n!)$

.60 بكالوريا 2019 الرياضيات

الموضوع الثاني – التمرين الثاني

(u_n) متتالية عددية حدودها موجبة معرفة بحدها الأول u_1 حيث $u_1 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم $u_{n+1} = u_n + 2\sqrt{u_n} + 1$

1-أ-تحقق أنه: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n
$\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n} = 1$

1-ب- استنتج كتابة الحد العام u_n بدلالة n

2-تحقق أنه: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n
$u_n = n(n-2) + 1$

3-عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها: $n-2$ يقسم $n-5$

4-أ-من أجل كل عدد طبيعيn حيث $n \geq 2$، بيّن أنّ
$PGCD(n-2; u_n) = 1$

4-ب-عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها $(n-2)(n^2+1)$ يقسم $(n-5)u_n$

الحل

1- التحقق أنه $\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n} = 1$

لدينا $u_{n+1} = u_n + 2\sqrt{u_n} + 1$

$u_{n+1} = \left(\sqrt{u_n} + 1\right)^2 \Rightarrow \sqrt{u_{n+1}} = \sqrt{u_n} + 1$

ومنه $\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n} = 1$

1-ب- استنتاج كتابة الحد العام u_n بدلالة n

لدينا: $\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n} = 1$ ومنه المتتالية $\sqrt{u_n}$ هي متتالية حسابية أساسها $r = 1$

وحدها الأول $\sqrt{u_1} = 0$

ومنه $\sqrt{u_n} = (n-1)1$

ومنه نستنتج أن $u_n = (n-1)^2$

2- التحقق أنه $u_n = n(n-2) + 1$

لدينا $u_n = (n-1)^2$

$= n^2 - 2n + 1$

ولدينا $n(n-2) + 1 = n^2 - 2n + 1 = u_n$

ومنه: $u_n = n(n-2) + 1$

3- تعيين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها $n-2$ يقسمها $n-5$

لدينا: $n-2$ يقسم $n-2$ و $n-2$ يقسم $n-5$

ومنه يقسم $(n-2)-(n-5)$ ومنه $n-2$ يقسم 3

أي $n-2 = 3 \quad \Leftarrow \quad n = 5$ مقبول

$n-2 = -3 \quad \Leftarrow \quad n = -1$ مرفوض

لأنّ $n > 0$

$n-2 = 1 \quad \Leftarrow \quad n = 3$ مقبول

$n-2 = -1 \quad \Leftarrow \quad n = 1$ مقبول

ومنه مجموع قيم n المطلوبة هي $n \in \{5,3,1\}$

4-أ- تبيان أن $PGCD(n-2, u_n) = 1$

لدينا $u_n = n(n-2) + 1$ ومنه

$PGCD(u_n, n-2) = PGCD(n-2, 1)$

حيث 1 هو باقي القسمة الاقليدية لـ u_n على $n-2$

ومنه $PGCD\left(u_n, (n-2)\right) = 1$

4-ب- تعيين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها $(n-2)(n^2+1)$ يقسم $(n-5)u_n$

$u_n = n^2 - 2n + 1$

$PGCD(u_n, n^2 + 1) = PGCD(n^2 + 1; 2n)$

$u_n = (n^2 + 1) - 2n$

لا يمكن كتابة القسمة الاقليدية لـ $n^2 + 1$ على $2n$

ومنه $PGCD(u_n; n^2 + 1) = 1$

(u_n) أولي مع $(n-2)$ و (u_n) أولي مع

(n^2+1) فإن (u_n) أولي مع $(n-2)(n^2+1)$

لدينا $(n-2)(n^2+1)$ يقسم $(n-5)u_n$ و (u_n)

أولي مع $(n-2)(n^2+1)$ ومنه حسب غوص

$(n-2)(n^2+1)$ يقسم $n-5$

أي n^2+1 يقسم $n-5$ مستحيل $(n \geq 2)$

أو $n-2$ يقسم $n-5$ مما سبق

$n-2$ يقسم $n-5 \iff n=3$ أو $n=5$

أو $n=1$

ومنه نستنتج: قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها $(n-2)(n^2+1)$ يقسم $(n-5)u_n$ هي:

$n=3$ أو $n=5$ أو $n=1$

61. بكالوريا 2018 الرياضيات

الموضوع الأول – التمرين الأول

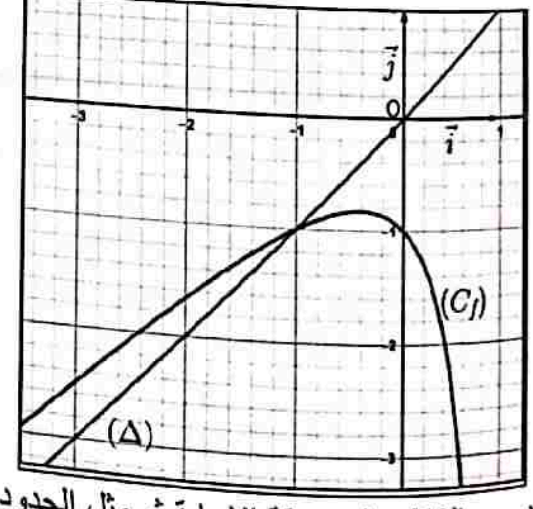
f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty;1[$ بـ:

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$$

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=-3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n،

$$u_{n+1}=f(u_n)$$

وليكن (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ و(Δ) هو المستقيم ذو المعادلة $y=x$ (أنظر الشكل المقابل)



1- أعد رسم الشكل على ورقة الإجابة ثم مثل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 على محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل، أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها

2- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$-3 \leq u_n < -1$

3-أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_{n+1}+1 \geq \frac{3}{4}(u_n+1)$$

3-ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$u_n+1 \geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ثم $\lim_{n\to+\infty} u_n$

4- نضع $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$

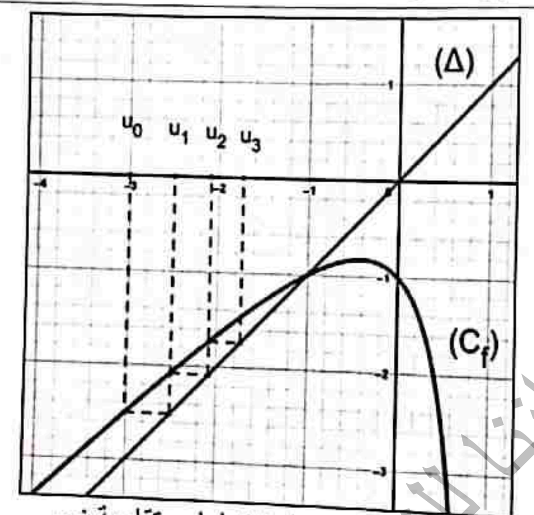
-بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right] \leq (u_0+1)+(u_1+1)+\cdots+(u_n+1)<0$$

واستنتج $\lim_{n\to+\infty} S_n$

الحل

1-تمثيل الحدود



التخمين: (u_n) تبدو متزايدة تماما ومتقاربة نحو فاصلة نقطة تقاطع (C_f) و(Δ)

2-البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $-3 \leq u_n < -1$

- نسمي الخاصية: $p(n): -3 \leq u_n < -1$
- نتحقق من صحة الخاصية من أجل $n=0$

لدينا $u_0=-3$ و $-3 \leq -3 < -1$

ومنه $-3 \leq u_0 < -1$

ومنه الخاصية $p(n)$ محققة من أجل قيمة ابتدائية $n=0$

- نفرض أن $p(n)$ صحيحة ونبرهن أن $p(n+1)$ محققة

لدينا من الفرض $-3 \leq u_n < -1$

لدينا f دالة مستمرة و متزايدة تماما على $]-\infty;-1[$

وعليه $f(-3) \leq f(u_n) < f(-1)$

وعليه $-3 \leq -2{,}5 \leq u_{n+1} < -1$

$-3 \leq u_{n+1} < -1$

- ومنه $-3 \leq u_n < -1$ من أجل كل عدد طبيعي n

3-أ-تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن:

$$u_{n+1}+1 \geq \frac{3}{4}(u_n+1)$$

لدينا

$$u_{n+1}+1=\frac{u_n^2+1}{u_n-1}+1=\frac{u_n}{u_n-1}(u_n+1)$$

وعليه:

$$u_{n+1}+1-\frac{3}{4}(u_n+1)=\frac{u_n}{u_n-1}(u_n+1)-\left(\frac{3(u_n+1)}{4}\right)$$

$$=(u_n+1)\left(\frac{u_n}{u_n-1}-\frac{3}{4}\right)$$

$$=(u_n+1)\left(\frac{4u_n-3u_n+3}{4(u_n-1)}\right)$$

$$=\frac{u_n+1}{u_n-1}\left(\frac{u_n+3}{4}\right)$$

لدينا $u_n \geq -3$

$u_n+3 \geq 0$ ....(1)

و $u_n<-1$

$u_n+1<0$ .... (2)

$u_n-1<-2<0$ ....(3)و

من (1) و(2) و (3) نجد:

$$\left(\frac{u_n+1}{u_n-1}\right)\left(\frac{u_n+3}{4}\right) \geq 0$$

وعليه $u_{n+1}+1-\frac{3}{4}(u_n+1) \geq 0$

إذن $u_{n+1}+1 \geq \frac{3}{4}(u_n+1)$

3-ب-استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن:

$$u_n+1 \geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

نسمي الخاصية $p(n): u_n+1 \geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^n$

نتحقق من صحة الخاصية من أجل $n=0$

لدينا $u_0+1 \geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^0$

و $-2 \geq -2$ ومنه $p(0)$ محققة

نفرض أن $p(n)$ صحيحة ونبرهن أن $p(n+1)$ محققة

لدينا من الفرض $u_n+1 \geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^n$

بالضرب في $\frac{3}{4}$ نجد: $\frac{3}{4}(u_n+1) \geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$

ولدينا مما سبق: $u_{n+1}+1 \geq \frac{3}{4}(u_n+1)$

وعليه $u_{n+1}+1 \geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$

وأخيرا $u_n+1 \geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ من أجل كل عدد طبيعي n

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

لدينا مما سبق $u_n+1 \geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^n$

ومنه

$$-2\left(\frac{3}{4}\right)^n-1 \leq u_n \text{ .... } (1)$$

ومن جهة أخرى نجد أن:

$$-3 \leq u_n < -1 \text{ .... } (2)$$

من (1) و (2) نجد أن $-2\left(\frac{3}{4}\right)^n-1 \leq u_n < -1$

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[-2\left(\frac{3}{4}\right)^n-1\right] \leq \lim\limits_{n\to+\infty} u_n < -1$

ولدينا

$$\lim_{n\to+\infty}\left[-2\left(\frac{3}{4}\right)^n-1\right]=-1$$

لأن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=0$

لأن $-1<\frac{3}{4}<1$

ومنه حسب النهايات بالحصر نجد أن

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=-1$$

4- تبيان أن:

$$8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right] \leq (u_0+1)+(u_1+1)+\cdots+(u_n+1)<0$$

لدينا $u_n<-1$

أي $u_n+1<0$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

ومجموعة أعداد سالبة هو عدد سالب

وعليه

$$(u_0+1)+(u_1+1)+\cdots+(u_n+1)<0 \text{...} (1)$$

وجدنا سابقا: $u_n+1 \geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^n$

أي $u_0+1 \geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^0$

$$u_1+1 \geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^1$$

.

.

$$u_n+1 \geq -2\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

بالجمع طرفا لطرف نجد:

$$(u_0+1)+(u_1+1)+\cdots+(u_n+1) \geq -2\left[\left(\frac{3}{4}\right)^0+\left(\frac{3}{4}\right)^1+\cdots+\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]$$

لدينا $-2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{4}$ وحدها الأول -2

وعليه:

$$(u_0+1)+\cdots+(u_n+1)\ge -2\left[\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{4}}\right]$$

$$(u_0+1)+\cdots+(u_n+1)\ge -8\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right]$$

$$(u_0+1)+\cdots+(u_n+1)\ge 8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right]\cdots(2)$$

من (1) و (2) نجد:

$$8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right]\le (u_0+1)+\cdots+(u_n+1)<0$$

استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

من نتائج سؤال السابق نجد:

$$8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right]\le (u_0+1)+(u_1+1)+\cdots+(u_n+1)<0$$

$$8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right]\le (u_0+u_1+\cdots+u_n)+\underbrace{(1+1+\cdots+1)}_{n+1\text{ مرة}}<0$$

$$8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right]\le S_n+(n+1)<0$$

$$8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right]-(n+1)\le S_n<-(n+1)$$

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n<\lim\limits_{n\to+\infty}-(n+1)$

ولدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}-(n+1)=-\infty$

ومنه وحسب النهاية بالحصر نجد أن:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n=-\infty$$

62. بكالوريا 2018 الرياضيات

الموضوع الثاني- التمرين الرابع

I- g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ:

$$g(x)=(1+x+x^2)e^{-\frac{1}{x}}-1$$

1- بين أنه من اجل كل x من المجال $]0;+\infty[$:

$$g'(x)=\frac{(x+1)(2x^2+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$$

واستنتج اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$

2- بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0{,}9<\alpha<1$ واستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

II- f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}$$

و (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1-أ- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f(x)$

1-ب- بين أنه من اجل كل x من المجال $]0;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$$

واستنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

2- بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xe^{-\frac{1}{x}}-x\right)=-1$

(يمكن وضع $t=-\frac{1}{x}$) ثم استنتج أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

II-3- h الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ:

$$h(x)=\frac{1}{x}-1+e^{-\frac{1}{x}}$$

3-أ- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ وادرس اتجاه تغير الدالة h واستنتج إشارة $h(x)$ على $]0;+\infty[$

3-ب- تحقق أن: $f(x)-x=(1+x)h(x)$ ثم استنتج الوضعية النسبية لـ (C_f) بالنسبة الى المستقيم (Δ)

4-ارسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f)

(ناخذ $f(\alpha)\simeq 1{,}73$)

5-(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها العام u_n حيث: $u_n=\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{n^2}{n+1}$

5-أ- اكتب u_n بدلالة n ثم بيّن أنّ المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول u_1

5-ب- احسب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n=\left(\frac{1}{2}f(1)-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{3}f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{3}{4}f\left(\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}\right)$$

الحل

I-1- البرهان أنه من أجل $x\in]0;+\infty[$

$$g'(x)=\frac{(x+1)(2x^2+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$$

$$g'(x)=(1+2x)e^{-\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}(1+x+x^2)$$

$$g'(x)=\left(\frac{x^2+2x^3+1+x+x^2}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}}$$

$$g'(x)=\left(\frac{2x^3+2x^2+x+1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}}$$

$$g'(x)=\left(\frac{2x^2(x+1)+x+1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}}$$

$$g'(x) = \frac{(x+1)(2x^2+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$$

-استنتاج تغيرات الدالة g

ندرس إشارة $g'(x)$

$e^{-\frac{1}{x}} > 0$ على $]0;+\infty[$ و $2x^2+1>0$ محققة دائما

إذن إشارة $g'(x)$ من إشارة $x+1$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$x+1$	$-$	0 $+$	0	$+$
$g'(x)$	[redacted]			$+$

ومنه g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

-2 اثبات أن $g(x)$ تقبل حلا وحيدا α

بما أن الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0.9;1[$

ولدينا

$f(1)\simeq 0.1>0$ و $g(0.9)\simeq -0.1<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة:

$g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.9<\alpha<1$

-استنتاج إشارة $g(x)$

من جدول تغيرات $g(x)$ ومما سبق نستنتج

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

1-أ- حساب نهايات الدالة f

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}\right) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}\right) = +\infty + 1\times e^{-\infty} = +\infty$$

1-ب- بيان أن $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}+e^{-\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}(x+1)$$
$$= \frac{-1+x^2e^{-\frac{1}{x}}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$$
$$= \frac{-1+(x^2+x+1)e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

استنتاج اتجاه تغير الدالة f

لدينا إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ لأن $x^2>0$

ولدينا من نتائج السؤال 2 نجد:

اذا كان:

$x\in]0;\alpha]$ يكون $g(x)\le 0$ ومنه $f'(x)\le 0$

ومنه $f(x)$ متناقصة

$x\in[\alpha;+\infty[$ يكون $g(x)\ge 0$ ومنه $f'(x)\ge 0$

ومنه $f(x)$ متزايدة

-جدول تغيرات $f(x)$

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

-2 بيان أن $\lim_{x\to+\infty}\left(xe^{-\frac{1}{x}}-x\right)=-1$

نضع $x=-\frac{1}{t} \Leftrightarrow t=-\frac{1}{x}$

ومنه $x\to+\infty \Leftrightarrow t\underset{<}{\to}0$

أي $\lim_{x\to+\infty}\left(xe^{-\frac{1}{x}}-x\right) = \lim_{\substack{t\to 0\\ <}}\left(-\frac{1}{t}e^t+\frac{1}{t}\right)$

$$= \lim_{\substack{t\to 0\\ <}}\left(-\frac{e^t-1}{t}\right) \quad ....(1)$$

تذكير

كما نعلم أن الدالة $g(t)=e^t$ هي دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ومنه وباستعمال العدد المشتق نجد أن:

$$\lim_{\substack{t\to t_0\\ <}}\frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0} = g'(t_0)$$

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ <}}\frac{g(t)-g(0)}{t-0} = g'(0)$$

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ <}}\frac{e^t-1}{t} = e^0 = 1$$

معناه $\lim_{\substack{t\to 0\\ <}} -\frac{e^t-1}{t} = -1 \quad ......(2)$

وفي الأخير من (1) و (2) نجد أن

$$\lim_{x\to+\infty}\left(xe^{-\frac{1}{x}}-x\right) = -1$$

استنتاج الوضعية:

$y=x$ مقارب لـ(C_f) بجوار $+\infty$ معناه

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}-x\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+e^{-\frac{1}{x}}+\left(xe^{-\frac{1}{x}}-x\right)\right)$$
$$= 0+1-1=0$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

3-أ. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x} - 1 + e^{-\frac{1}{x}}\right) = 0$$

دراسة اتجاه تغير الدالة h

h قابلة للاشتقاق على $D_h =]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة:

$$h'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^2}\left(e^{-\frac{1}{x}} - 1\right)$$

إذن إشارة $h'(x)$ من إشارة $\left(e^{-\frac{1}{x}} - 1\right)$

ندرس إشارة $e^{-\frac{1}{x}} - 1$

إذا كان $e^{-\frac{1}{x}} - 1 > 0$ فإن $e^{-\frac{1}{x}} > 1$

ومنه $e^{-\frac{1}{x}} > e^0$

$-\frac{1}{x} > 0$

ومنه $x < 0$

ومنه $h'(x) > 0$ إذا كان $x < 0$

و $h'(x) < 0$ إذا كان $x > 0$

ومنه $h(x)$ متناقصة تماما على D_h

-استنتاج إشارة

لدينا مما سبق الدالة h متناقصة تماما و $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$

ومنه نستنتج أن المنحني الممثل لها يقع فوق محور الفواصل ومنه فإن $h(x) > 0$ على المجال $]0;+\infty[$

3-ب- التحقق أن $f(x) - x = (x+1)h(x)$

$$f(x) - x = \frac{1}{x} + (1+x)e^{-\frac{1}{x}} - x$$
$$= \frac{\left(1 - x^2 + (1+x)xe^{\frac{-1}{x}}\right)}{x}$$
$$= \frac{(1+x)(1-x) + (1+x)xe^{-\frac{1}{x}}}{x}$$
$$= (1+x)\left(\frac{1-x}{x} + e^{-\frac{1}{x}}\right)$$
$$= (1+x)\left(\frac{1}{x} - 1 + e^{-\frac{1}{x}}\right)$$
$$= (1+x)h(x)$$

-استنتاج وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ)

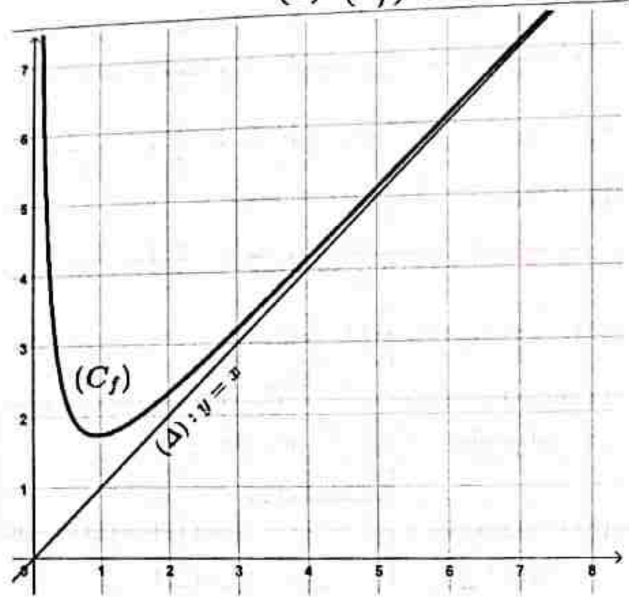
ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$ حيث

لدينا $f(x) - x = (x+1)h(x)$

ومنه $(x+1) > 0$ و $h(x) > 0$ لما $x > 0$

إذن $f(x) - x > 0$ ومنه (C_f) يقع فوق (Δ)

4- رسم المنحنى (C_f) (Δ)



5-أ- كتابة u_n بدلالة n

$$u_n = \frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{n^2}{n+1}$$
$$u_n = \frac{n}{n+1}\left(n + \frac{n+1}{n}e^{-n}\right) - \frac{n^2}{n+1}$$
$$u_n = \frac{n^2}{n+1} + \frac{n}{n+1}\times\frac{n+1}{n}e^{-n} - \frac{n^2}{n+1}$$
$$u_n = e^{-n}$$

-اثبات أن (u_n) متتالية هندسية وتعيين أساسها q و u_1

$$u_{n+1} = e^{-(n+1)} = e^{-n}e^{-1} = u_n e^{-1}$$

ومنه (u_n) هندسية أساسها $q = e^{-1}$

وحدها الأول $u_1 = e^{-1}$

5-ب- حساب المجموع S_n بدلالة n

$$S_n = \left(\frac{1}{2}f(1) - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{3}f\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}\right)$$

ملاحظة:

في المجاميع من هذا الشكل نقوم بالتعامل مع الحد الأخير ونحاول تبسيطه للوصول إلى الشكل المبسط

$$\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}\left(n + \frac{n+1}{n}e^{-n}\right) - \frac{1}{n+1}$$
$$= \frac{n^2}{n+1} + e^{-n} - \frac{1}{n+1}$$
$$= u_n + (n-1)$$

نضع $w_n = n - 1$

حيث w_n متتالية حسابية أساسها $r = 1$

وحدها الأول $w_1 = 0$ ومنه

$$S_n = (u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) + \cdots + (u_n + w_n)$$

ومنه يصبح المجموع S_n مجموع متتاليتين حسابية وهندسية

$$S_n = (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) + (w_1 + w_2 + \cdots + w_n)$$

$$S_n = u_1 \frac{1-q^n}{1-q} + \frac{n}{2}(w_1 + w_n)$$

$$S_n = e^{-1} \frac{1-e^{-n}}{1-e^{-1}} + \frac{n}{2}(0 + n - 1)$$

$$S_n = \frac{1 - e^{-n}}{e - 1} + \frac{n}{2}(n - 1)$$

.63. بكالوريا 2017 رياضيات الاستثنائية

الموضوع الثاني – التمرين الثالث

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول u_0 حيث $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1} = 4u_n + 1$$

1-أ-بين أن: من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$$

1-ب-تحقق أن: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، العددان الطبيعيان u_n و u_{n+1} أوليين فيما بينهما

2-لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n + \frac{1}{3}$

2-أ-أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0

2-ب-عبر بدلالة n عن المجموع S_n حيث

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{3n}$$

3-عين من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين $4^n - 1$ و $4^{n+1} - 1$

4-أ-ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الاقليدية للعدد 4^n على 7

4-ب-عين قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل العدد A_n المعرف بـ: $A_n = 9S_n - 6n - 3^{6n+4}$ ، القسمة على 7

✍ الحل

1-أ-بين من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$

نسمي الفرضية $p(n): u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$

- التحقق من صحة $p(0)$:

$$u_0 = \frac{1}{3}(4^0 - 1) = 0 = 0$$

ومنه $p(n)$ محققة: من أجل $n = 0$

نفرض صحة $p(n)$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$$

ونبرهن صحة $p(n+1)$ من أجل $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}(4^{n+1} - 1)$$

لدينا

$$u_{n+1} = 4u_n + 1 = \frac{4}{3}(4^n - 1) + 1 = \frac{4^{n+1} - 4 + 3}{3} = \frac{1}{3}(4^{n+1} - 1)$$

ومنه $p(n+1)$ محققة

-أخيرا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \frac{1}{3}[4^n - 1]$

1-ب-التحقق أن: u_n و u_{n+1} أوليان فيما بينهما

لدينا: من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - 4u_n = 1$

حسب مبرهنة بيزو العددان u_{n+1} ، u_n أوليان فيما بينهما

2-أ-أثبات أن (v_n) هندسية يطلب أساسها وحدها الأول

لدينا:

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{3} = 4u_n + 1 + \frac{1}{3} = 4u_n + \frac{4}{3} = 4\left(u_n + \frac{1}{3}\right) = 4v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 4$ ،

وحدها الأول: $v_0 = u_0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

2-ب-التعبيربدلالة n عن المجموع S_n:

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{3n} = v_0\left(\frac{q^{3n+1} - 1}{q - 1}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{4^{3n+1} - 1}{4 - 1}\right) = \frac{1}{9}(4^{3n+1} - 1)$$

3-تعيين من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$:
$PGCD(4^{n+1}-1; 4^n-1)$

$PGCD(4^{n+1}-1; 4^n-1) = PGCD(3u_{n+1}; 3u_n)$
$= 3PGCD(u_{n+1}; u_n) = 3 \times 1 = 3$
لأن $PGCD(u_{n+1}; u_n) = 1$
$v_n = \frac{1}{3}4^n$
و $u_n = v_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}4^n - \frac{1}{3}$
و $3u_n = 4^n - 1$
ومنه $3u_{n+1} = 4^{n+1} - 1$
و

4-أ-دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 7

$4^0 \equiv 1[7]$ و $4^1 \equiv 4[7]$ و $4^2 \equiv 2[7]$ و $4^3 \equiv 1[7]$
القسمة دورية ودورها 3
ومنه من أجل $n = 3k$ باقي قسمة 4^n على 7 هو 1
ومنه من أجل $n = 3k+1$ باقي قسمة 4^n على 7 هو 4
ومنه من أجل $n = 3k+2$ باقي قسمة 4^n على 7 هو 2

4-ب-تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل العدد A_n المعرف بـ: $A_n = 9S_n - 6n - 3^{6n+4}$ القسمة على 7

لدينا: $A_n = 4^{3n+1} - 1 - 6n - 3^{6n+4}$
و $3 \equiv -4[7]$ ومنه $3^{6n+4} \equiv (4^{3n+2})^2[7]$
لأن $6n+4 = 2(3n+2)$
ومنه: $A_m \equiv 4^{3n+1} - 1 - 6n - (4^{3n+2})^2[7]$
$A_n \equiv 4 - 1 - 6n - 2^2[7]$
$A_n \equiv -1 - 6n[7]$
(A_n يقبل القسمة على 7) معناه $-1 - 6n \equiv 0[7]$
و $-6n \equiv 1[7]$ أي $n \equiv 1[7]$ ، $(-6 \equiv 1[7])$
ومنه $n = 7k + 1$ و $k \in \mathbb{N}$

64. بكالوريا 2017 الرياضيات

الموضوع الثاني – التمرين الأول

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 1$
ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 7u_n + 8$
1-برهن بالتراجع أن من أجل عدد طبيعي n:
$3u_n = 7^{n+1} - 4$
2-نضع من أجل كل عدد طبيعي n:
$S_n = 1 + 7 + 7^2 + \cdots + 7^n$
و $S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

2-أ-احسب بدلالة n المجموع S_n ثم جد علاقة بين S_n و S'_n
2-ب-استنتج أن من أجل عدد طبيعي n:
$18 \times S'_n = 7^{n+2} - 24n - 31$
3-أ-ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 7^n على 5
3-ب-عين قيم n الطبيعية حتى يكون S'_n قابلا للقسمة على 5

الحل

1-البرهان بالتراجع أن $3u_n = 7^{n+1} - 4$

نسمي $P(n)$ الخاصية $3u_n = 7^{n+1} - 4$
التحقق من أجل $n = 0$ لدينا $7^{0+1} - 4 = 3$
$3u_0 = 3$
ومنه $P(0)$ محققة
نفرض صحة $P(n)$ من أجل كل n طبيعي
أي $3u_n = 7^{n+1} - 4$
ونبرهن صحة $P(n+1)$ من أجل كل $n+1$ أي
$3u_{n+1} = 7^{n+2} - 4$
لدينا من الفرضية $u_n = \frac{7^{n+1}-4}{3}$
و $u_{n+1} = 7u_n + 8 = 7.\frac{7^{n+1}-4}{3} + 8$
ومنه $u_{n+1} = \frac{7^{n+2}-28+24}{3}$
أي $3u_{n+1} = 7^{n+2} - 4$

ومنه $P(n+1)$ محققة ومنه نستنتج أن $3u_n = 7^{n+1} - 4$ من أجل كل n ينتمي الى $\mathbb{N}$

2-حساب S_n

$S_n = 1 + 7 + 7^2 + \cdots + 7^n$
S_n هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها $q = 7$ وحدها الأول 1
$$S_n = \frac{7^{n+1}-1}{7-1} = \frac{7^{n+1}-1}{6}$$

- العلاقة بين S_n و S'_n

$S'_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$
لدينا $3u_n = 7^{n+1} - 4$

ومنه:
$$\begin{cases} 3u_0 = 7^1 - 4 \\ 3u_1 = 7^2 - 4 \\ 3u_2 = 7^3 - 4 \\ \vdots \\ 3u_n = 7^{n+1} - 4 \end{cases}$$

ومنه بالجمع نجد

$3u_0 + 3u_1 + 3u_2 + \cdots + 3u_n = 7 - 4 + 7^2 - 4 + 7^3 - 4 + 7^{n+1} - 4$

ومنه

$3S'_n = 7^1 + 7^2 + 7^3 + \ldots + 7^{n+1} - 4 - 4 - \ldots - 4$

ومنه:

$3S'_n = 7[1 + 7 + 7^2 + \ldots + 7^n] - 4(n+1)$

ومنه $S'_n = \frac{7S_n - 4(n+1)}{3}$

2-ب- استنتاج أن $18S'_n = 7^{n+2} - 24n - 31$

لدينا $3S'_n = 7S_n - 4(n+1)$

ومنه $6(3)S'_n = 6(7S_n - 4(n+1))$

$18S'_n = 6\left(7.\frac{(7^{n+1} - 1)}{6}\right) - 24n - 24$

$18S'_n = 7^{n+2} - 24n - 7 - 24$

$18S'_n = 7^{n+2} - 24n - 31$

3-أ- دراسة بواقي 7^n على 5

$n = 0: 7^0 \equiv 1[5]$

$n = 1: 7^1 \equiv 2[5]$

$n = 2: 7^2 \equiv 4[5]$

$n = 3: 7^3 \equiv 3[5]$

$n = 4: 7^4 \equiv 1[5]$

القسمة دورية دورها $p = 4$

$n =$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	
$7^n \equiv$	1	2	4	3	$[5]$

ومنه بواقي القسمة على 5 هي $r \in \{1,2,4,3\}$

3-ب-تعيين n الطبيعية حتى يكون $S'_n \equiv 0[5]$

نأخذ S'_n يقبل القسمة على 5 أي $S'_n \equiv 0[5]$ ونعين قيم n

لدينا 18 أولي مع 5 ومنه $18S'_n \equiv 0[5]$

أي $7^{n+2} - 24n - 31 \equiv 0[5]$

لدينا $-25n \equiv 0[5]$

$-24n - n \equiv 0[5]$

$-24n \equiv n[5]$

و $-30 \equiv 0[5]$

$-31 \equiv -1[5]$

ومنه

$7^{n+2} - 24n - 31 \equiv 7^2 \times 7^n + n - 1[5]$

المناقشة

1-لما $n = 4k$ نجد

$7^{n+2} - 24n - 31 \equiv 7^2.7^{4k} + 4k - 1[5]$

$7^{n+2} - 24n - 31 \equiv 7^2.(1) + 4k - 1[5]$

$7^{n+2} - 24n - 31 \equiv 4 + 4k - 1[5]$

ومنه $7^{n+2} - 24n - 31 \equiv 4k + 3[5]$

أي أنه يكون $S'_n \equiv 0[5]$ إذا كان $4k + 3 \equiv 0[5]$

و $4k \equiv -3[5]$

ومنه $4k \equiv 2[5]$

ولدينا $5k \equiv 0[5]$

إذن $k \equiv -2[5]$

$k \equiv 3[5]$

ومنه $k = 5k' + 3,\ k' \in \mathbb{N}$

أي $n = 4(5k' + 3)$

$n = 20k' + 12 : k' \in \mathbb{N}$

2-لما $n = 4k + 1$

$7^{n+2} - 24n - 31 \equiv 7^2.7^{4k+1} + 4k + 1 - 1[5]$

$\equiv 7^2(2) + 4k[5]$

$\equiv 3 + 4k[5]$

$\equiv 4k + 3[5]$

أي أنه يكون $S'_n \equiv 0[5]$ إذا كان $4k + 3 \equiv 0[5]$

$4k \equiv 2[5]$: $4k \equiv -3[5]$

لدينا $5k \equiv 0[5]$

أي $4k + k \equiv 0[5]$

$2 + k \equiv 0[5]$

$k \equiv 3[5]$

$k = 5k' + 3,\ k' \in \mathbb{N}$

ومنه قيم n ؛ $n = 4k + 1 = 4(5k' + 3) + 1$

$n = 20k' + 13\ ,\ k' \in \mathbb{N}$

3-لما $n = 4k + 2$

$7^{n+2} - 24n - 31 \equiv 7^2.7^{4k+2} + 4k + 2 - 1[5]$

$\equiv 7^2.(4) + 4k + 1[5]$

$\equiv 4k + 2[5]$

ومنه يكون $S'_n \equiv 0[5]$

اذا كان $4k \equiv -2[5]$ ومنه $4k \equiv 3[5]$

أي $k \equiv -3[5]$

$k \equiv 2[5]$

ومنه $k' \in \mathbb{N}\ ,\ k = 5k' + 2$

$n = 4k + 2 = 4(5k' + 2) + 2$

ومنه قيم n هي :

$n = 20k' + 10,\ k \in \mathbb{N}$

4-في حالة $n = 4k + 3$

لدينا

$7^{n+2} - 24n - 31 \equiv 7^2.7^{4k+3} + 4k + 3 - 1[5]$

$7^{n+2}-24n-31\equiv 2+4k+2[5]$

$7^{n+2}-24n-31\equiv 4k+4[5]$

ومنه $S'_n\equiv 0[5]$ أي $4k+4\equiv 0[5]$

أي $4k\equiv -4[5]$

ومنه $4k\equiv 1[5]$

ومنه $5k=4k+k\equiv 0[5]$

$1+k\equiv 0[5]$

ومنه $k\equiv -1[5]$ ومنه $k\equiv 4[5]$

أي $k'\in\mathbb{N},\ k=5k'+4$

ومنه قيم n:

$n=4(5k'+4)+3$

$n=20k'+19\ k'\in\mathbb{N}$

ومنه قيم n الطبيعية حتى يقبل S'_n القسمة على 5

وهي $n\in\{20k'+12, 20k'+13, 20k'+10, 20k'+19\}$

$k'\in\mathbb{N}$

65. بكالوريا 2016 الرياضيات

الموضوع الاول – التمرين الرابع

I- g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ:

$$g(x)=1+x^2+2\ln x$$

1- ادرس اتجاه تغير الدالة g

2- بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المجال $]0{,}52;0{,}53[$ حلا وحيدا α

3- استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

II- f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=-x+\frac{3+2\ln x}{x}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- احسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

2-أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$

$$f'(x)=-\frac{g(x)}{x^2}$$

2-ب- شكل جدول تغيرات الدالة f

2-جـ- تحقق أن: $f(\alpha)=2\left(\frac{1}{\alpha}-\alpha\right)$ ثم عين حصرا له

3-أ- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا

3-ب- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة على مستقيمه المقارب المائل (Δ)

3-جـ- بين أنّ (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) يطلب كتابة معادلة ديكارتية له

4- نقبل أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما x_0 و x_1 حيث:

$0{,}22<x_0<0{,}23$ و $2{,}11<x_1<2{,}13$

أنشئ (T)، (Δ) و (C_f).

5- m وسيط حقيقي، ناقش بيانيا وحسب قيم m، عدد حلول المعادلة:

$$3+2\ln x-mx=0$$

III- من أجل كل عدد طبيعي n نضع:

$$u_n=\int_{e^n}^{e^{n+1}}[f(x)+x]dx$$

1- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n>0$

2- أعط تفسيرا هندسيا للعدد u_0

3- احسب u_n بدلالة n

4- نضع: $S_n=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n$.

احسب S_n بدلالة n

الحل

1- دراسة اتجاه تغير $g(x)$

$D_g+]0;+\infty[$ $\qquad g(x)=1+x^2+2\ln x$

$$g'(x)=2x+\frac{2}{x}$$

$g'(x)$ موجبة تماما على المجال $]0;+\infty[$

ومنه الدالة g متزايدة تماما

2- بيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α

الدالة g متزايدة تماما ومستمرة على $]0{,}53;0{,}52[$

ولدينا $g(0{,}52)=-0.037$

$g(0.53)=0.011$

و $g(0.53)\times g(0.52)<0$

ومنه حسب (مبرهنة القيم المتوسطة) المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث:

$0{,}53>\alpha>0{,}52$

3- استنتاج إشارة $g(x)$:

من نتائج السؤال السابق نجد أن الدالة g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ وتنعدم عند α ومنه

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

1- حساب النهايات

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0}f(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\left(-x+\frac{3+2\ln x}{x}\right)$$

باستعمال تغير المتغير

نضع $t=\frac{1}{x}$ ومنه $x\overset{>}{\to}0\Leftrightarrow t\to+\infty$

$$\lim_{\substack{x \to 0\\ >}} f(x) = \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{t}+\frac{3+2\ln\left(\frac{1}{t}\right)}{\frac{1}{t}}\right)$$
$$= \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{t}+t(3-2\ln t)\right)$$
$$= -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -x+\frac{3+2\ln x}{x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(-x+\frac{3}{x}+\frac{2\ln x}{x}\right)$$

بالتزايد المقارن $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0$

ومنه $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

2-أ-بيان أن $x\in]0;+\infty[$ فإن $f'(x)=-\frac{g(x)}{x^2}$

f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة

$$f'(x) = -1+\frac{2-3-2\ln x}{x^2}$$
$$= \frac{-x^2-2\ln x-1}{x^2}$$
$$= -\frac{g(x)}{x^2}$$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$

2-ب- جدول تغيرات الدالة f

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$

2-جـ- التحقق من أن: $f(\alpha)=2\left(\frac{1}{\alpha}-\alpha\right)$

$$f(\alpha) = -\alpha+\frac{2\ln\alpha+3}{\alpha}$$

للوصول إلى العبارة المطلوبة نحاول التخلص من $\ln\alpha$

لدينا مما سبق:

أي $g(\alpha)=0$ $\quad 1+\alpha^2+2\ln\alpha=0$

ومنه: $\quad 2\ln\alpha=-\alpha^2-1$

بتعويض عبارة $2\ln\alpha$ في عبارة $f(\alpha)$ نجد

$$f(\alpha) = -\alpha+\frac{3-1-\alpha^2}{\alpha}$$
$$= -\alpha+\frac{2}{\alpha}-\alpha$$
$$f(\alpha) = 2\left(\frac{1}{\alpha}-\alpha\right)$$

تعيين حصر لـــه $0.52<\alpha<0,53$

$-1,06<-2\alpha<-1,.04$ ......(1)

$3.77<\frac{2}{\alpha}<3,84$ .....(2)

بجمع (1) و(2) طرفا لطرف نجد:

$2,71<f(\alpha)<2.81$

3-أ- حساب $\lim_{x\to+\infty}[f(x)+x]$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)+x] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3+2\ln x}{x}\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3}{x}+\frac{2\ln x}{x}\right]=0$$

لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

التفسير البياني: المستقيم ذو المعادلة $y=-x$ مقارب مائل بجوار $+\infty$ لـ(C_f)

3-ب- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ)

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$

$f(x)-y=\frac{3+2\ln x}{x}$

$x>0$ في المجال $]0;+\infty[$

ومنه ندرس إشارة $3+2\ln x$

$3+2\ln x>0$

$\ln x>-\frac{3}{2}$

$x>e^{-\frac{3}{2}}$

x	$-\infty$		$e^{-\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$f(x)-y$		$-$	0	$+$	

الوضعية: (C_f) تحت (Δ) على المجال $]-\infty,e^{-\frac{3}{2}}[$

(C_f) فوق (Δ) على المجال $]e^{-\frac{3}{2}};+\infty[$

(C_f) يقطع (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة $x=e^{-\frac{3}{2}}$

3-جـ- البرهان أن (C_f) يقبل مماس (T) يوازي (Δ)

أي أن معامل توجيه (T) يساوي معامل توجيه (Δ)

ومنه المعادلة $f'(x)=-1$ تقبل حلا ومنه

$-\frac{g(x)}{x^2}=-1$

$-1-x^2-2\ln x=-x^2$

$1+2\ln x=0$

$\ln x=-\frac{1}{2}$

$x=e^{-\frac{1}{2}}$

ومنه (C_f) يقبل مماسا يوازي (Δ) عند الفاصلة

$x_0=e^{-\frac{1}{2}}$

$$f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = -e^{-\frac{1}{2}} + 2e^{\frac{1}{2}}$$

ولدينا

$$y = -1\left(x - e^{-\frac{1}{2}}\right) - e^{-\frac{1}{2}} + 2e^{\frac{1}{2}}$$

$$(T):\ y = -x + 2e^{\frac{1}{2}}$$

4-رسم (T) و (Δ) و (C_f)

5-المناقشة البيانية للمعادلة

$$3 + 2\ln x - mx = 0$$
$$3 + 2\ln(x) = mx$$
$$-x + \frac{3 + 2\ln x}{x} = m - x$$
$$f(x) = -x + m$$

حلول المعادلة $f(x) = -x + m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) والمستقيم ذو المعادلة $y = -x + m$

-المناقشة:

لما $m \in]-\infty;0]$ فإن لـ (C_f) و Δ_m يتقاطعان في نقطة واحدة ومنه للمعادلة حلا وحيدا

لما $m \in]0; 2e^{\frac{1}{2}}[$ فإن لـ (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطتين ومنه للمعادلة حلين

لما $m = 2e^{\frac{1}{2}}$ فإن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطة واحدة ومنه للمعادلة حلا مضاعف

لما $m \in]2e^{\frac{1}{2}}; +\infty[$ فإن لـ (C_f) و Δ_m لا يتقاطعان ومنه المعادلة لا تقبل حلولا

1- بيان أن $U_n > 0$

لدينا:

$$u_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} [f(x) + x]dx$$

ولدينا: $f(x) + x = \frac{3+2\ln x}{x}$ وهو عدد موجب على المجال $]1; +\infty[$ ومنه فإن $f(x) + x$ موجبة على المجال $[e^n; e^{n+1}]$ أي: $U_n > 0$

2- التفسير الهندسي لـ U_0

$$U_0 = \int_1^{e^1} [f(x) + x]dx$$

ومنه التفسير الهندسي لـ U_0: هو مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) و (Δ) والمستقيمان ذا المعادلتين $x = 1$ و $x = e$

3-حساب U_n بدلالة n

$$U_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \left[\frac{3 + 2\ln x}{x}\right] dx$$

$$U_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \left[\frac{3}{x} + \frac{2\ln x}{x}\right] dx$$

$$= [3\ln x + (\ln x)^2]_{e^n}^{e^{n+1}}$$

لأن $\frac{3}{x}$ دالتها الأصلية $3\ln x$ و $\frac{\ln x}{x}$ دالتها الأصلية $(\ln x)^2$

$$U_n = 3(n+1) + (n+1)^2 - 3n - n^2$$
$$U_n = 2n + 4$$

4-حساب S_n

S_n مجموع متتالية حسابية أساسها $r = 2$ و $U_0 = 4$

$$S_n = \frac{(n+1)}{2}(U_0 + U_n) = \frac{n+1}{2}(2n+8)$$
$$= (n+1)(n+4)$$

66. بكالوريا 2016 الرياضيات

الموضوع الأول – التمرين الثاني

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما، حدودها موجبة تماما ، حدها الأول u_0 وأساسها q حيث:

$$\begin{cases} \ln(u_1) + \ln(u_2) = 11 \\ u_1 + u_2 = e^4(1 + e^3) \end{cases}$$

1-احسب u_1 و u_2 ثم استنتج قيمة الأساس q

2-نضع: $u_1 = e^4$ و $q = e^3$

2-أ-عبر عن u_n بدلالة n

2-ب-نضع:

$$S_n = \ln(u_0) + \ln(u_1) + \ln(u_2) + \dots + \ln(u_n)$$

احسب S_n بدلالة n

3-من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $a_n = n + 3$

3-أ-بين أن:

$$PGCD(2S_n, a_n) = PGCD(a_n, 14)$$

3-ب-عين القيمة الممكنة لـ: $PGCD(2S_n, a_n)$

3-جـ-عين قيمة الأعداد الطبيعية n التي من أجلها:

$$PGCD(2S_n, a_n) = 7$$

4-ادرس تبع لقيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7

5-نضع: $b_n = 3na_n - 2S_n + 1437^{2016} + 1$

عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون:

$$\begin{cases} b_n \equiv 0[7] \\ n \equiv 0[5] \end{cases}$$

6-بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، العدد $(1437^{9n+1} - 3 \times 4^{12n+1} + 52)$ يقبل القسمة على 7

الحل

1--حساب u_2, u_1

لدينا $\ln u_1 + \ln u_2 = 11$

ومنه $\ln(u_1 u_2) = 11$

أي $e^{\ln(u_1 u_2)} = e^{11}$

ومنه $u_1 u_2 = e^{11}$

أي $u_2 = \frac{e^{11}}{u_1}$

ولدينا $u_1 + u_2 = e^4(1+e^3)$

ومنه $u_1 + \frac{e^{11}}{u_1} = e^4(1+e^3)$

$u_1^2 + e^{11} = u_1 e^4(1+e^3)$

أي $u_1^2 - e^4(1+e^3)u_1 + e^{11} = 0$

$$\Delta = e^8(e^6 - 2e^3 + 1) = e^8(e^3-1)^2$$

$$\Delta = e^8(e^3-1)^2$$

$$\sqrt{\Delta} = e^4(e^3-1)$$

$$u_{1_1} = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{e^4(1+e^3) - e^4(e^3-1)}{2} = e^4$$

$$u_{1_2} = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{e^4(1+e^3)+e^4(e^3-1)}{2}$$

$$u_{1_2} = e^7$$

لدينا $u_2 = \frac{e^{11}}{u_1}$

ومنه $u_{2_1} = \frac{e^{11}}{e^4} = e^7$ و $u_{2_2} = \frac{e^{11}}{e^7} = e^4$

وبما أن (u_n) متتالية متزايدة تماما أي $u_2 > u_1$

ومنه $u_1 = e^4$ و $u_2 = e^7$

-استنتاج قيمة الأساس q

لدينا بما أن (u_n) متتالية هندسية $u_n = u_p . q^{n-p}$

ومنه $u_2 = u_1 q$

أي $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{e^7}{e^4} = e^3$

2 ... u ...

لـ ... $u_n = u$ ...

ومـ ... u_1 ...

أي $u_0 = \frac{u_1}{q} = \frac{e^4}{e^3} = e$

$$u_n = u_0 . q^n$$

$$u_n = e . e^{3n} = e^{3n+1}$$

2-ب-حساب S_n

$$S_n = \ln u_0 + \ln u_1 + \ln u_2 + \cdots + \ln(u_n)$$

نضع $v_n = \ln u_n$

ومنه $v_n = \ln e^{3n+1} = 3n+1$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = 3$ وحدها الأول $v_0 = 1$

ومنه $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$

$$S_n = \frac{n+1}{2}[1 + 1 + 3n]$$

$$S_n = \frac{n+1}{2}[2+3n]$$

$$S_n = \frac{3n^2+5n+2}{2}$$

3-أ-تبيان أن $PGCD(2S_n; a_n) = PGDC(a_n; 14)$

لدينا $2S_n = 3n^2 + 5n + 2$

ومنه نقسم $2S_n$ على a_n فنجد

$3n^2 + 5n + 2$	$n+3$
$-\ 3n^2 + 9n$	$3n - 4$
$0 - 4n + 2$	
$-\ -4n - 12$	
$0 + 14$	

ومنه

$$2S_n = (n+3)(3n-4) + 14 = a_n(3n-4) + 14$$

ومنه $PGCD(2S_n; a_n) = PGCD(a_n, 14)$

3-ب-تعيين القيم الممكنة لـ$PGCD(2S_n, a_n)$

ليكن $PGCD(2S_n, a_n) = d$

ولدينا $PGCD(2S_n, a_n) = PGCD(a_n, 14) = d$

أي d يكون من قواسم العدد 14

ومنه $d \in \{1, 2, 7, 14\}$

3-جـ-تعيين قيم n بحيث $PGCD(2S_n, a_n) = 7$

لدينا $PGCD(2S_n, a_n) = PGCD(a_n, 14) = 7$

نضع $\alpha \in \mathbb{N}$ $a_n = 7\alpha$

$$PGCD(7\alpha, 14) = 7$$

أي $7PGCD(\alpha, 14) = 7$

ومنه $PGCD(\alpha, 2) = 1$

ومنه $\alpha = 2\lambda + 1$ (αعدد فردي)

$$a_n = 7(2\lambda + 1) = n + 3$$

$n = 14\lambda + 4$ مع $\lambda \in \mathbb{N}$

4-دراسة بواقي قسمة 2^n على 7

$n = 0: 2^0 \equiv 1[7]$
$n = 1: 2^1 \equiv 2[7]$
$n = 2: 2^2 \equiv 4[7]$
$n = 3: 2^3 \equiv 1[7]$

القسمة دورية دورها 3

$n \equiv$	$3k$	$3k+1$	$3k+2$	
$2^n \equiv$	1	2	4	[7]

بواقي قسمة 2^n على 7 هي $r \in \{1,2,4\}$

5-تعيين قيم n بحيث $\begin{cases} b_n \equiv 0[7] \\ n \equiv 0[5] \end{cases}$

لدينا
$3na_n - 2S_n = 3n(n+3) - (n+1)(3n+2)$
$= 3n^2 + 9n - 3n^2 - 2n - 3n - 2$
ومنه $3na_n - 25n = 4n - 2$
ولدينا $1437 \equiv 2[7]$
ومنه $1437^{2016} \equiv 2^{2016}[7]$
ولدينا $2016 = 3(627)$ من الشكل $3k$
$1437^{2016} \equiv 2^{2016}[7]$
$\equiv 1[7]$
أي $b_n = 4n - 2 + 1 + 1[7]$
$b_n = 4n[7]$
أي أنه يكون $b_n \equiv 0[7]$ إذا كان $4n \equiv 0[7]$
ومنه $\begin{cases} n \equiv 0[7] \\ n \equiv 0[5] \end{cases}$
$n \equiv 0[7]$ معناه $n = 7k'$
$n \equiv 0[5]$ معناه $7k' = 0[5]$
5 أولي مع 7 أي 5 قاسم للعدد k'
ومنه $k' = 5k''$
ومنه $n = 7(5k') = 35k'$ مع $k'' \in \mathbb{N}$

6-البرهان أن L يقبل القسمة على 7 حيث

$L = 1437^{9n+1} - 3 \times 4^{12n+1} + 52$
يقبل L القسمة على 7 إذا كان $L \equiv 0[7]$
لدينا $1437^3 \equiv 2^3[7]$
ومنه $1437^{3n} \equiv 1^n\,[7]$
أي $(1437^{3n})^3 \equiv 1^3[7]$
$1437^{9n} \equiv 1[7]$ ...... (1)
و $1437 \equiv 2[7]$ ...... (2)
بضرب (1) في (2) نجد $1437^{9n+1} \equiv 2[7]$
ولدينا $4^{12n} = (2^2)^{12n} = 2^{24n}$
لدينا $(2^3)^{8n} \equiv 1^{8n}[7]$
ومنه $2^{24n} \equiv 1[7]$
أي $4 \times 4^{12n} \equiv 4 \times 1[7]$
$3.4^{12n+1} \equiv 12[7]$
ومنه $3(4)^{12n+1} \equiv 5[7]$
ولدينا $52 \equiv 3[7]$
ومنه $L \equiv 2 - 5 + 3[7]$
$L \equiv 0[7]$
ومنه L يقبل القسمة على 7

67. بكالوريا 2016 الرياضيات

الموضوع الثاني – التمرين الرابع

I- φ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:
$$\varphi(x) = (x^2 - x + 1)e^{-x+1} - 1$$
1-أ- احسب $\lim_{x\to-\infty} \varphi(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x)$

1-ب- ادرس اتجاه تغير الدالة φ ثم شكل جدول تغيراتها

2- بيّن أنّ المعادلة $\varphi(x) = 0$ تقبل في $\mathbb{R}$، حلا α يختلف عن 1 ثم تحقق أن: $2{,}79 < \alpha < 2{,}80$

3-استنتج إشارة $\varphi(x)$ على $\mathbb{R}$

II- f و g الدالتان العدديتان المعرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = (2x-1)e^{-x+1}$
$$g(x) = \frac{2x-1}{x^2 - x + 1}$$
(C_f) و (C_g) تمثيلاهما البيانيان في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1-أ- احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

1-ب- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

2- بيّن أنّ للمنحنيين (C_f) و (C_g) مماسا مشتركا (T) في النقطة ذات الفاصلة 1 ثم جد معادلة له

3-ارسم المماس (T) والمنحنى (C_f)

4-أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x،
$$f(x) - g(x) = \frac{(2x-1)\varphi(x)}{x^2 - x + 1}$$
4-ب- ادرس إشارة الفرق $f(x) - g(x)$ على $\mathbb{R}$ ثم استنتج الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g)

4-جـ- باستعمال المكاملة بالتجزئة، احسب بدلالة العدد الحقيقي x: $\int_1^x f(t)dt$

4-د-أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_g) والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x = 1$ و $x = 2$

III-1- احسب $f''(x)$، $f^{(3)}(x)$ و $f^{(4)}(x)$ أعط تخمينا لعبارة $f^{(n)}(x)$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم ($f^{(n)}$ الدالة المشتقة من المرتبة n للدالة f)

2- برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n أنه:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n[2x - (2n+1)]e^{1-x}$$

3- (u_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، كما يلي: $u_n = f^{(n)}(1)$

3-أ- احسب بدلالة العدد الطبيعي غير المعدوم k، المجموعة: $u_k + u_{k+1}$

3-ب- استنتج بدلالة n ، المجموع: $u_1 + u_2 + \cdots + u_{2n}$

الحل

1-أ- حساب النهايات

$\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to-\infty} [(x^2 - x + 1)e^{-x+1} - 1]$

$\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to+\infty} [(x^2 - x + 1)e^{-x+1} - 1]$

$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(e^1\left(\frac{x^2}{e^x} - \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right) - 1\right)$

لدينا $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ ومنه $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$

إذن: $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = -1$

1-ب- دراسة اتجاه تغير الدالة Q

الدالة φ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة:

$\varphi'(x) = (2x-1)e^{-x+1} - e^{-x+1}(x^2 - x + 1)$

$\varphi'(x) = (-x^2 + 3x - 2)e^{-x+1}$

إشارة المشتقة من إشارة $(-x^2 + 3x - 2)$

المعادلة $-x^2 + 3x - 2 = 0$ لها جذرين هما 1 و 2

اتجاه التغير

اذا كان $x \in]-\infty; 1[\cup [2; +\infty[$ فان $-x^2 + 3x - 2 \le 0$ ومنه $f'(x) \le 0$

ومنه الدالة f متناقصة تماما.

اذا كان $x \in [1; 2]$ فان $-x^2 + 3x - 2 \ge 0$ ومنه $f'(x) \ge 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما

-جدول تغيرات $\varphi(x)$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$3e^{-1} - 1$	↘	-1

2- بيان ان المعادلة $\varphi(x) = 0$ تقبل حلا مختلف عن 1

الدالة $Q(x)$ مستمرة ومتناقصة تماما على $]2; +\infty[$

و $Q(2) = 3e^{-1} - 1 > 0$

و $\lim_{x\to+\infty} Q(x) = -1 < 0$

ومنه حسب (مبرهنة القيم المتوسطة) فإن المعادلة $\varphi(x) = 0$ تقبل حل وحيد في المجال $]2; +\infty[$

التحقق أن $2,79 < \alpha < 2,8$

بما أن $]2,79; 2,8[\in]2; +\infty[$

ولدينا $\varphi(2,8) = -0,001 < 0$

و $\varphi(2,79) = 0,001 > 0$

ومنه للمعادلة $\varphi(x) = 0$ تقبل حلا α حيث $2.79 < \alpha < 2,8$

استنتاج إشارة $\varphi(x)$

x	$-\infty$		1		α		$+\infty$
$\varphi(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

1-أ- حساب النهايات

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (2x-1)e^{-x+1}$

$= (-\infty)(+\infty)$

$= -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (2x-1)e^{-x+1}$

$= \lim_{x\to+\infty} \left[e^1\left(\frac{2x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right)\right]$

ومنه $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

لأن $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$

1-ب- دراسة اتجاه تغير $f(x)$

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$f'(x) = 2e^{-x+1} - e^{-x+1}(2x-1)$

$= (-2x+3)e^{-x+1}$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $(-2x+3)$

إشارة $f'(x)$

لما $x \in]-\infty; \frac{3}{2}]$ يكون $f'(x) \ge 0$ ومنه $f(x)$ متزايدة تماما

ولما $x \in [\frac{3}{2}; +\infty[$ يكون $f'(x) \le 0$ ومنه $f(x)$ متناقصة تماما

وجدول تغيراتها

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$(-2x+3)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$2e^{\frac{-1}{2}}$	↘	0

2- البرهان أن لـ (C_f) و (C_g) مماسا مشترك

حتى يكون لـ (C_f) و (C_g) مماس مشترك عند

بحيث $x=1$

$(T_1): y_1 = f'(1)(x-1) + f(1)$

$(T_2): y_2 = g'^{(1)(x-1)} + g(1)$

بما أن T_1 ينطبق على T_2 يعني أن $y_1 = y_2$

أي: $g'(1) = f'(1)$ و $g(1) = f(1)$

لدينا $f'(1) = 1$ و $f(1) = 1$

و $g'(x) = \frac{-2x^2+2x+1}{(x^2-x+1)^2}$

ومنه $g'(1) = 1 = f'(1)$ ومنه $f'^{(1)} = g'^{(1)}$

و $y_1 = y_2$ إذن $f'(1) = g'(1)$

ومنه للمنحنى (C_f) (C_g) نفس المماس (T)

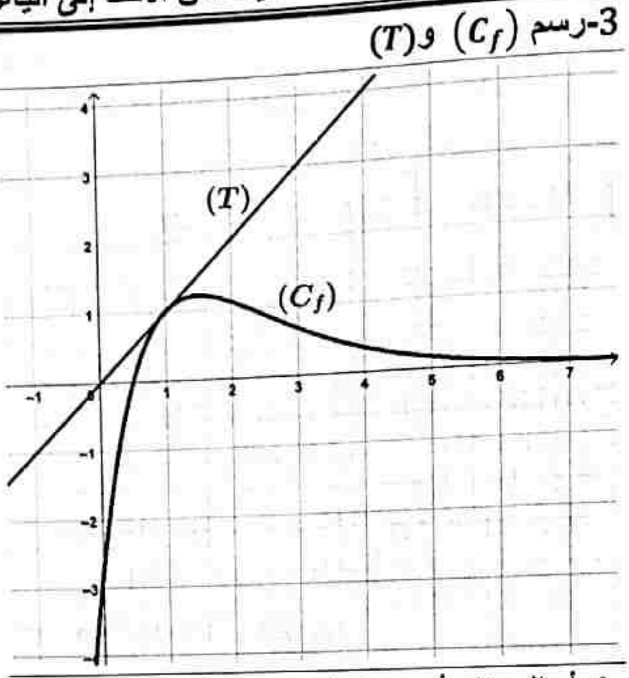
إيجاد معادلة المماس

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$y = x - 1 + 1$

$y = x$

3-رسم (C_f) و (T)



4-أ- البرهان أن من اجل $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) - g(x) = \frac{(2x-1)Q(x)}{x^2-x+1}$$

$$f(x) - g(x) = (2x-1)e^{-x+1} - \frac{2x-1}{x^2-x+1}$$

$$= \frac{(2x-1)e^{-x+1}(x^2-x+1)-(2x-1)}{x^2-x+1}$$

$$= \frac{(2x-1)\left[(x^2-x+1)e^{-x+1}-1\right]}{x^2-x+1}$$

$$= \frac{(2x-1)Q(x)}{x^2-x+1}$$

4-ب- دراسة إشارة الفرق $f(x) - g(x)$

إشارة الفرق من إشارة $\frac{(2x-1)Q(x)}{x^2-x+1}$

$x^2 - x + 1 = 0 \Leftarrow \Delta = -3 < 0$ ومنه إشارتها من إشارة (x^2) أي اشارتها موجبة

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		α		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$Q(x)$		$+$		$+$	0	$+$	0	$-$	
x^2-x+1		$+$		$+$		$+$		$+$	
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

الوضعية النسبية لـ (C_f) و (C_g)

(C_f) فوق (C_g) على $\left]\frac{1}{2};1\right[\cup\left]1;\alpha\right[$

(C_f) تحت (C_g) على $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup\left]\alpha;+\infty\right[$

(C_f) يمس (C_g) عند $x = 1$

(C_f) يقطع (C_g) عند $x = \frac{1}{2}$ و $x = \alpha$

4-جـ الحساب باستعمال التكامل بالتجزئة

$$\int_1^x f(t)dx$$

$$\int_1^x f(t)dx = \int_1^x (2t-1)e^{-t+1}dt$$

المكاملة بالتجزئة $\int uv' = [u.v] - \int u'v$

$u:$	$2t-1$	$u':$	2
$v:$	$-e^{-t+1}$	$v':$	e^{-t+1}

$\int_1^x f(t)dx = [-(2t-1)e^{-t+1}]_1^x - \int_1^x 2(-e^{-t+1})dt$
$= (-2x+1)e^{-x+1} - 1e^0 + 2[-e^{-t+1}]_1^x$
$= (-2x+1)e^{-x+1} + 1 + 2[-e^{-x+1} + 1]$
$= (-2x+1)e^{-x+1} + 1 - 2e^{-x+1} + 2$
$= (-2x-1)e^{-x+1} + 3$

4-د-حساب مساحة الحيز A

$$A = \int_1^2 [f(x) - g(x)]dx$$

$$A = \int_1^2 f(x)dx - \int_1^2 g(x)dx$$

لدينا

$$\int_1^2 f(x)dx = [(-2x-1)e^{-x+1} + 3]_1^2$$
$$= -5e^{-1} + 3$$

ولدينا $g(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+1}$

دالتها الأصلية $G(x) = \ln(x^2 - x + 1)$

$$\int_1^2 g(x)dx = \ln(3) - \ln 1 = \ln(3)$$

ومنه $A = -5e^{-1} + 3 - \ln 3$

1-حساب $f''(x)$ و $f^{(3)}(x)$ و $f^{(4)}(x)$

$f''(x) = (2x-5)e^{-x+1}$
$f^{(3)}(x) = -(2x-7)e^{-x+1}$
$f^{(4)}(x) = (2x-9)e^{-x+1}$

التخمين حول عبارة $f^{(n)}(x)$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n[2x - (2n+1)]e^{1-x}$$

2- البرهان بالتراجع عن عبارة $f^{(n)}(x)$

نعتبر الخاصية $p(n)$ حيث

$$p(n): f^{(n)} = -(1)^n[2x - (2n+1)]e^{1-x}$$

من اجل $n = 1$ لدينا

$f^{(1)} = -1(2x-3)e^{1-x} = (-2x+3)e^{1-x}$
$= f'(x)$

ومنه $p(n)$ محققة من اجل $n = 1$

نفرض أن $p(n)$ محققة من أجل $n \in \mathbb{N}^*$

ونبرهن صحة $P(n+1)$

لدينا:

$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}[2x - (2(n+1)+1)]e^{1-x}$
$= (-1)^{n+1}[2x - (2n+3)]e^{1-x}$

ولدينا:

$f^{(n)}(x) = (-1)^n[2x - (2n+1)]e^{1-x}$
$(f^{(n)}(x))' = (-1)^n[-2x + 2 + 2n + 1]e^{1-x}$
$= (-1)^n[-2x + (2n+3)]e^{1-x}$
$= (-1)^{n+1}[2x - (2n+3)]e^{1-x}$

ومنه $(f^n(x))' = f^{n+1}(x)$

ومنه الخاصية $p(n+1)$ محققة ومنه العلاقة من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n[2x - (2n+1)]e^{1-x}$$

3-أ- حساب $u_k + u_{k+1}$

$u_k + u_{k+1} = (-1)^k(-2k+1) + (-1)^{k+1}[-2k+1]$
$= (-1)^k(2)$

3-ب- استنتاج S_n بدلالة n

$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_{2n}$

عدد الحدود S_n هو $2n - 1 + 1 = 2n$

$S_n = (u_1 + u_2) + (u_3 + u_4) + \dots + (u_{2n-1} + u_{2n})$

لكن لدينا $u_k + u_{k+1} = 2(-1)^k$

ومنه

$u_1 + u_2 = 2(-1)^1$
$u_3 + u_4 = 2(-1)^3$
$u_{2n-1} + u_{2n} = 2(-1)^{2n-1}$

ومنه تصبح S_n

$$S_n = \underbrace{-2 - 2 - 2 - \dots - 2}_{\text{متتالية ثابتة}}$$

$$S_n = -2\left(\frac{\text{عدد الحدود}}{2}\right) = -2n$$

68. بكالوريا 2015 الرياضيات

الموضوع الثاني- التمرين الرابع

f الدالة المعرفة بـ: $f(0) = 0$ ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty; 0[$،

$$f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x}}$$

(C_f) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1-ادرس استمرارية الدالة f عند 0 من اليسار

2- احسب $\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x)}{x}$، ثم فسر النتيجة هندسيا

3-أ- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

3-ب- ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

4-أ- بين أنه $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]=0$

4-ب- استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $-\infty$ ، يطلب تعيين معادلة له

5- g الدالة المعرفة على المجال $]-\infty\,;0[$ بـ: $g(x)=\frac{f(x)}{x}$

5-أ-احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

5-ب-ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها

6-أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;0[$

$$f(x)>x$$

6-ب- استنتج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة الى المستقيم (Δ)

6-جـ- أنشئ المنحنى (C_f)

7- (u_n) المتتالية المعرفة بـ: $u_0=-3$ ومن اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=f(u_n)$

7-أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n<0$

7-ب- حدد اتجاه تغير المتتالية (u_n)

7-جـ- بيّن أن المتتالية (u_n) متقاربة ، ثم عين $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

8- m عدد حقيقي. h_m الدالة ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-\infty;0[$ بـ:

$$h_m(x)=xe^{\frac{1}{x}}-mx$$

8-أ-احسب $h'_m(x)$ حيث h'_m هي الدالة المشتقة للدالة h_m

8-ب- باستعمال المنحنى (C_f) ، ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة

$$h'_m(x)=0$$

الحل

1- دراسة استمرارية f على يسار 0

$$\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}(x-1)e^{\frac{1}{x}}$$

نضع $t=\frac{1}{x}\Leftarrow x=\frac{1}{t}$

ومنه لما $x\overset{<}{\to}0$ فإن: $t\to-\infty$

$$\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} f(x)=\lim\limits_{t\to-\infty}\left(\frac{1}{t}-1\right)e^{t}$$

$$=\lim\limits_{t\to-\infty}\frac{e^t}{t}-e^t=0=f(0)$$

ومنه f مستمرة عند 0 من اليسار

2- حساب $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}\frac{f(x)}{x}$

$$\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}\frac{(x-1)e^{\frac{1}{x}}}{x}$$

$$=\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}\left(\frac{xe^{\frac{1}{x}}}{x}-\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}\right)$$

نضع $t=\frac{1}{x}\Leftrightarrow x=\frac{1}{t}$

ومنه لما $x\to0$ فإن: $t\to-\infty$

$$\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{t\to-\infty}(e^t-te^t)=0$$

الدالة f تقبل الاشتقاق على يسار 0

-التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل نصف مماس موازي لمحور الفواصل في المبدأ 0

3-أ- حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)e^{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim\limits_{t\to0}\left(\frac{1}{t}-1\right)e^{t}$$

$$=-\infty$$

3-ب- دراسة اتجاه تغير الدالة f

f قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty;0[$ ودالتها المشتقة $f'(x)$

$$f'(x)=e^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}(x-1)$$

$$f'(x)=\left(\frac{x^2-x+1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}$$

-إشارة $f'(x)$

لدينا $\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}>0$ على المجال $]-\infty;0[$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة x^2-x+1

$x^2-x+1=0\Leftarrow\Delta=-3<0$ ومنه إشارة x^2-x+1 موجبة

ومنه لما $x\in]-\infty;0[$ يكون $f'(x)>0$ منه $f(x)$ متزايدة تماما

-جدول تغيرات f

x	$-\infty$ $\quad\quad$ 0
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow 0$

4-بيان أن $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)=0$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to-\infty}\left((x-1)e^{\frac{1}{x}}-x\right)$$

ح ع ت من الشكل $+\infty\times-\infty$

نضع $t=\frac{1}{x} \Leftarrow x=\frac{1}{t}$

لما $x\to-\infty \Leftarrow t\overset{<}{\to}0$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\lim_{t\overset{<}{\to}0}\left(\left(\frac{1}{t}-1\right)e^{t}-\frac{1}{t}\right)$$

$$=\lim_{t\overset{<}{\to}0}\left(\frac{e^t}{t}-e^t-\frac{1}{t}\right)$$

$$=\lim_{t\overset{<}{\to}0}\left(\frac{(e^t-1)}{t}-e^t\right)$$

طريقة العدد المشتق $\lim\limits_{t\overset{<}{\to}0}\left(\frac{(e^t-1)}{t}\right)=1$

ومنه: $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]=0$

4-ب- استنتاج أن C_f يقبل مقاربا مائلا بجوار $-\infty$.

بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]=0$

ومنه (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $-\infty$ معادلته $y=x$

5-أ-حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x-1)e^{\frac{1}{x}}}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(e^{\frac{1}{x}}-\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}\right)$$

نضع $t=\frac{1}{x} \Leftarrow x=\frac{1}{t}$

ومنه لما $x\to-\infty \Leftarrow t\overset{<}{\to}0$

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{t\overset{<}{\to}0}(e^t-te^t)=1$$

5-ب-دراسة اتجاه تغير الدالة g

g قابلة للاشتقاق على $]-\infty;0[$

$$g'(x)=\frac{f'(x)\times(x)-f(x)}{x^2}$$

$$g'(x)=\frac{\left(x\left(\frac{x^2-x+1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}-(x-1)e^{\frac{1}{x}}\right)}{x^2}$$

$$=\frac{\left(\frac{x^2-x+1-x^2+x}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$$

$$=\frac{1}{x}\times\frac{1}{x^2}\times e^{\frac{1}{x}}$$

-إشارة $g'(x)$: لما $x<0$

لدينا $x^2>0$ و $e^{\frac{1}{x}}>0$ و $\frac{1}{x}<0$

ومنه $g'(x)<0$ من اجل كل x من $]-\infty;0[$

ومنه الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0[$

-جدول تغيرات g

x	$-\infty$ $\quad\quad$ 0
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	$1 \searrow 0$

6-أ-البرهان أن $f(x)>x$

من جدول التغيرات للدالة g نجد أن $0<g(x)<1$

و لدينا $g(x)=\frac{f(x)}{x}$

ومنه $0<\frac{f(x)}{x}<1$

نضرب طرفي المتراجحة في x نجد:

$0>f(x)>x$ أي $f(x)>x$ (لأن $x<0$)

6-ب-استنتاج وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ):

لدينا معادلة المستقيم $(\Delta): y=x$

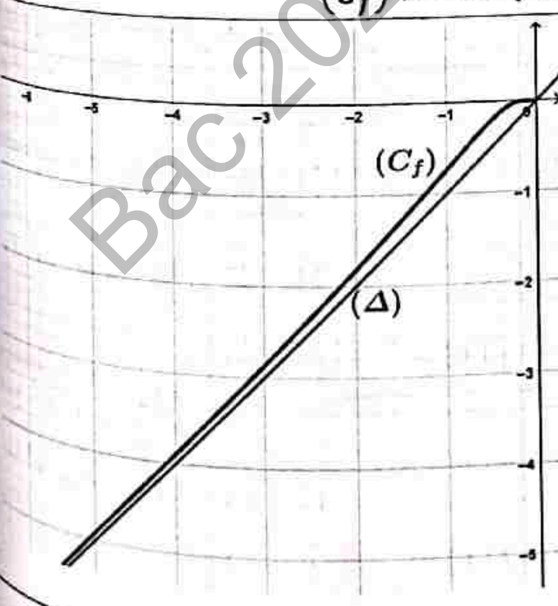
ندرس إشارة الفرق $f(x)-x$ في $]-\infty;0[$

ولدينا من السؤال السابق $f(x)>x$ ومنه

$f(x)-x>0$ ومنه (C_f) يقع فوق (Δ)

ولدينا $f(0)=0$ ومنه (C_f) و (Δ) يتقاطعان في المبدأ O

6-جـ انشاء (C_f)



7-أ-بيان أنه من اجل كل عدد طبيعي n $u_n < 0$

لدينا $u_{n+1} = (u_n - 1)e^{\frac{1}{u_n}}$

نتحقق من صحة الخاصية من أجل $n = 0$

لدينا $u_0 = -3$ ومنه $-3 < 0$

ومنه الخاصية محققة من أجل $n = 0$

نفرض أن $u_n < 0$ ونبرهن من أن $u_{n+1} < 0$

لدينا من الفرض $u_n < 0$ ومنه $f(u_n) < f(0)$

لأن f متزايدة تماما على المجال $]-\infty; 0[$

ومنه فإن $u_{n+1} < 0$

حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن $u_n < 0$ من أجل كل عدد طبيعي n

7-ب- تحديد اتجاه تغير المتتالية

ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$

ولدينا مما سبق $f(x) - x > 0$ أي $f(x) > x$

ومنه $f(u_n) - u_n > 0$

$u_{n+1} - u_n > 0$

ومنه (u_n) متزايدة تماما

بيان أن u_n متقاربة

بما أن (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 0 فهي متقاربة نحو نهاية l

حساب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

بما أن (u_n) متقاربة فإن:

$lim\ u_{n+1} = lim\ u_n = l$

ومنه: $f(l) = l$

بحل المعادلة نتحصل على $l = 0$

ومنه $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

أ-حساب $h'_m(x)$

لدينا

$$h'_m(x) = e^{\frac{1}{x}} + x\left(-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right) - m$$

$$= e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} - m$$

$$= \frac{x-1}{x}e^{\frac{1}{x}} - m$$

$$= \frac{f(x)}{x} - m$$

8-ب-المناقشة البيانية لحلول المعادلة $h'_m(x) = 0$

ومنه

$$\frac{f(x)}{x} - m = 0$$

مع $x \neq 0$

$$f(x) = mx$$

المناقشة البيانية لحلول المعادلة هي "فواصل " نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = mx$

-المناقشة :

-إذا كان $m \in]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[$ فإن المعادلة لا تقبل حلول

-إذا كان $m \in]0; 1[$ المعادلة تقبل حل وحيد

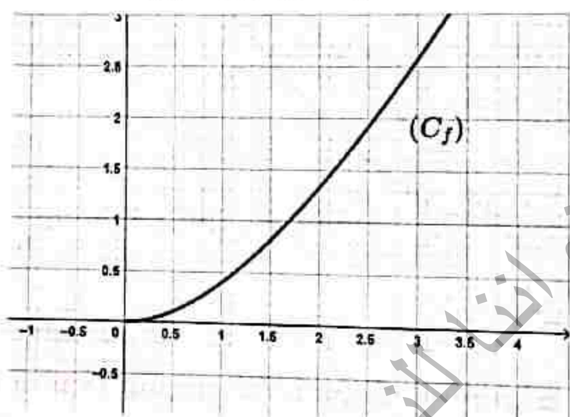
69. بكالوريا 2014 الرياضيات

الموضوع الثاني – التمرين الرابع

الدالة العددية f معرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{2x^2}{x+4}$. (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ كما هو مبين أدناه

1-بيّن أنّ الدالة f متزايدة تماما

2-(U_n) المتتالية العددية المعرفة بـــ: $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $U_{n+1} = f(U_n)$



(Δ) المستقيم الذي معادلته $y = x$

2-أ-باستعمال المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) ، مثل على حامل محور الفواصل، الحدود: U_0، U_1، U_2، U_3 و U_4 دون حسابها

2-ب-ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) وتقاربها

3-أ-برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq U_n \leq 3$

3-ب-بيّن أنّ المتتالية (U_n) متناقصة

3-جـ-استنتج أن (U_n) متقاربة

4-أ-ادرس إشارة العدد $7U_{n+1} - 6U_n$ واستنتج أنه من اجل كل عدد طبيعي n: $0 \leq U_{n+1} \leq \frac{6}{7}U_n$

4-ب-برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n

$$0 \leq u_n \leq 3\left(\frac{6}{7}\right)^n$$

4-جـ-احسب نهاية المتتالية (u_n) عندما يؤول n الى $+\infty$

الحل

1- تبيان أن الدالة f متزايدة

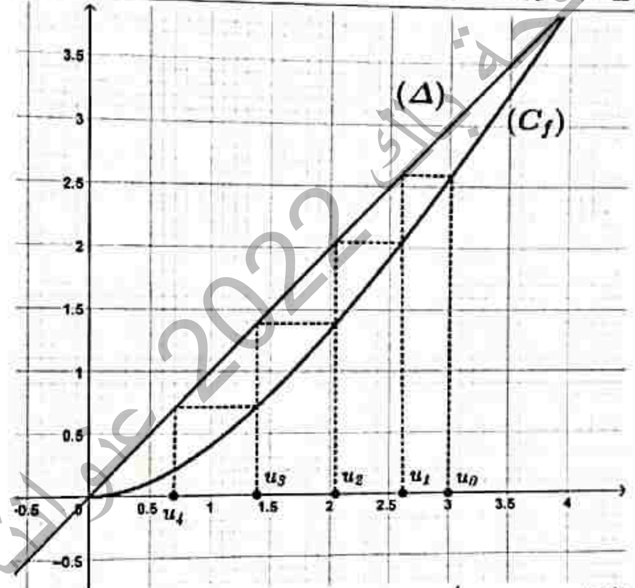
f قابلة للاشتقاق على $[0;+\infty[$ ودالتها المشتقة هي

$$f'(x)=\frac{2x^2+16x}{(x+4)^2}$$

من اجل كل $x\in[0;+\infty[$ ، $f'(x)\geq 0$

وعليه f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$

2- أ- تمثيل الحدود



التخمين: يبدو أن (u_n) متناقصة تماما ومتقاربة

3- أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $0\leq u_n\leq 3$

نسمي الخاصية $p(n)$: "$0\leq u_n\leq 3$"

نتحقق من صحة الخاصية $p(n)$ من أجل $n=0$

لدينا $u_0=3$ و $0\leq 3\leq 3$ ومنه $0\leq u_0\leq 3$

ومنه $p(0)$ محققة

نفرض أن $p(n)$ صحيحة ونبرهن أن $p(n+1)$ محققة

$$0\leq u_n\leq 3$$

وبما أن f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ فإن

$$f(0)\leq f(u_n)\leq f(3)$$

$$0\leq u_{n+1}\leq\frac{18}{3}\leq 3$$

وعليه $0\leq u_{n+1}\leq 3$ أي $p(n+1)$ محققة

وعليه حسب الاستدلال بالتراجع

فإن $0\leq u_n\leq 3$ من أجل كل عدد طبيعي n

3- ب- تبيان أن (u_n) متناقصة تماما

لدينا

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n^2}{u_n+4}-u_n$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n^2-u_n^2-4u_n}{u_n+4}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(u_n-4)}{u_n+4}$$

لدينا $u_n\geq 0$

$u_n+4\geq 4$

و $u_n\leq 3$

$u_n-4\leq -1$

وعليه $\frac{u_n(u_n-4)}{u_n+4}\leq 0$

ومنه $u_{n+1}-u_n\leq 0$

وعليه (u_n) متناقصة تماما

3- ج- استنتاج أن (u_n) متقاربة

-بما أن (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد 0 ($u_n\geq 0$) فإن (u_n) متقاربة

4- أ- دراسة إشارة $7u_{n+1}-6u_n$

لدينا

$$7u_{n+1}-6u_n=7\left(\frac{2u_n^2}{u_n+4}\right)-6u_n$$

$$=\frac{14(u_n^2)-6u_n^2-24(u_n)}{u_n+4}$$

$$=\frac{8(u_n^2)-24(u_n)}{u_n+4}$$

$$=\frac{8u_n(u_n-3)}{u_n+4}$$

لدينا $u_n\leq 3$

$u_n-3\leq 0$

وعليه $\frac{8u_n(u_n-3)}{u_n+4}\leq 0$

ومنه $7u_{n+1}-6u_n\leq 0$

استنتاج أن: $0\leq u_{n+1}\leq\frac{6}{7}u_n$

لدينا

$$7u_{n+1}-6u_n\leq 0$$

أي $u_{n+1}\leq\frac{6}{7}u_n$

وبما أن $u_n\geq 0$ فإن $0\leq u_{n+1}\leq\frac{6}{7}u_n$

4- ب- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي فإن: $0\leq u_n\leq 3\left(\frac{6}{7}\right)^n$

نسمي الخاصية $p(n): 0\leq u_n\leq 3\left(\frac{6}{7}\right)^n$

التحقق من صحة الخاصية من أجل $n=0$

لدينا $u_0=3$ و $0\leq 3\leq 3\left(\frac{6}{7}\right)^0=3$

ومنه $0\leq u_0\leq 3\left(\frac{6}{7}\right)^0$

ومنه $p(0)$ محققة

نفرض أن $p(n)$ صحيحة ونبرهن أن $p(n+1)$ محققة

لدينا $0 \le u_n \le 3\left(\frac{6}{7}\right)^n$

بالضرب في $\frac{6}{7}$ نجد $0 \le \frac{6}{7}u_n \le 3\left(\frac{6}{7}\right)^{n+1}$

مما سبق $u_{n+1} \le \frac{6}{7}u_n$

وعليه $0 \le u_{n+1} \le 3\left(\frac{6}{7}\right)^{n+1}$

وعليه $0 \le u_n < 3\left(\frac{6}{7}\right)^n$ من أجل كل عدد طبيعي n

4-جـ حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

لدينا $0 \le u_n \le 3\left(\frac{6}{7}\right)^n$

ومنه $0 \le \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \le \lim\limits_{n\to+\infty} 3\left(\frac{6}{7}\right)^n$

نعلم أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{6}{7}\right)^n = 0$

لأن $\left(-1 < \frac{6}{7} < 1\right)$

وعليه حسب النهايات بالمقارنة فإن: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

70. بكالوريا 2012 الرياضيات

الموضوع الأول – التمرين الرابع

I- g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 2 - xe^x$

1- ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2- بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$ ثم تحقق أن: $0.8 < \alpha < 0.9$

3-عين حسب قيم x إشارة $g(x)$

II- f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{2x+2}{e^x+2}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$(وحدة الطول $2cm$)

1- بين أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا

2-أ- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2-ب- بين أن المستقيم (Δ') ذا المعادلة $y = x + 1$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f)

3-ادرس وضعية (C_f) بالنسبة الى كل من (Δ') و(Δ) ، حيث (Δ) هو المستقيم ذو المعادلة $y = x$

4-أ- بين أنه من اجل كل عدد حقيقي x، $f'(x) = \frac{2g(x)}{(e^x+2)^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f

4-ب- بين أن: $f(\alpha) = \alpha$ ، ثم شكل جدول تغيرات f

5- ارسم (Δ)، (Δ') و (C_f)

6- ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة $f(x) = f(m)$

III- (U_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$U_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n:

$U_{n+1} = f(U_n)$

1- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $0 \le U_n < \alpha$

2- باستعمال (Δ)و(C_f) مثل على حامل محور الفواصل الحدود: U_0 و U_1 و U_2، ثم خمن اتجاه تغير (U_n)

3-برهن أن المتتالية (U_n) متقاربة، ثم احسب نهايتها

الحل

1- دراسة تغيرات الدالة g

1- النهايات

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(2 - xe^x) = 2$

لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(2 - xe^x) = -\infty$

2- المشتقة:

$g'(x) = -e^x - xe^x = -(x+1)e^x$

إشارة المشتقة من إشارة $-(x+1)$ لأن، $e^x > 0$

$x < -1 \Leftarrow -x - 1 > 0$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	−
$g(x)$	2 ↗	$2 + e^{-1}$	↘ $-\infty$

2- البرهان أن $g(x) = 0$ تقبل حل وحيدا α على المجال $]-\infty;+\infty[$

لدينا في المجال $]-\infty;-1]$ الدالة $g(x)$ مستمرة ومتزايدة تماما ولدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 2 > 0$ ومنه $g(x) > 0$ على كل المجال $]-\infty;-1]$ إذا المعادلة $g(x) = 0$ لا تقبل حلا على $]-\infty;-1[$

ولدينا على المجال $[-1;+\infty[$ الدالة $g(x)$ مستمرة ومتناقصة تماما ولدينا $f(-1) = 2 + e^{-1}$

و $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x) = -\infty < 0$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[-1;+\infty[$ وفي الأخير وبالاستعانة بالنتيجتين

الأولى والثانية نجد أن $g(x)=0$ تقبل حلا على الأقل α في $\mathbb{R}$

التحقق أن $0,8<\alpha<0,9$

الدالة مستمرة ورتيبة (متناقصة تماما) على المجال $]0,8\,;0,9[$

ولدينا $g(0,8)\times g(0,9)<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $g(\alpha)=0$ تقبل حل وحيد α حيث $0,8<\alpha<0,9$

3-تعيين إشارة $g(x)$

حسب السؤال السابق وجدول تغيرات $g(x)$ نجد

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	+	0	−

1- تبيان أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+2}{e^x+2}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x}\cdot\frac{2+\frac{2}{x}}{1+\frac{2}{e^x}}\right)$$

لدينا: $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$

و $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0$

ومنه $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

-التفسير الهندسي:

المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مقارب افقي لـ (C_f) في جوار $+\infty$

2) -حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+2}{e^x+2}=\frac{-\infty+2}{0+2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

2-ب- بيان أن (Δ') مقارب لـ (C_f) (بجوار $-\infty$)

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2x+2}{e^x+2}-(x+1)\right]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2x+2-xe^x-2x-e^x-2}{e^x+2}\right]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-xe^x-e^x}{e^x+2}\right]$$

بما أن $\lim_{x\to-\infty}xe^x=0$ و $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$

فإن $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y)=0$

ومنه (Δ) مقارب مائل لـ (C_f)

3- وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) و (Δ')

1- الوضعية بالنسبة لـ (Δ')

$$f(x)-y=\frac{2x+2}{e^x+2}-(x+1)$$
$$=\frac{-xe^x-e^x}{e^x+2}=\frac{e^x(-x-1)}{e^x+2}$$

إشارة الفرق من إشارة $-x-1$

$-x-1>0 \Leftrightarrow x<-1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)-y$	+	0	−
الوضعية	(C_f) فوق (Δ')	(C_f) يقطع (Δ')	(C_f) تحت (Δ')

وضعية (C_f) مع (Δ)

$$f(x)-y=\frac{2x+2}{e^x+2}-x$$
$$=\frac{2x+2-xe^x-2x}{e^x+2}$$
$$f(x)-y=\frac{2-xe^x}{e^x+2}=\frac{g(x)}{e^x+2}$$

ومنه إشارة الفرق من إشارة $g(x)$

الوضعية

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)-y$	+	0	−
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) تحت (Δ)

أ-البرهان أن عبارة $f'(x)=\frac{2g(x)}{(e^x+2)^2}$

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{2(e^x+2)-e^x(2x+2)}{(e^x+2)^2}$$
$$=\frac{2e^x+4-2e^x-2xe^x}{(e^x+2)^2}$$
$$=\frac{4-2xe^x}{(e^x+2)^2}$$
$$=\frac{2(2-xe^x)}{(e^x+2)^2}=\frac{2g(x)}{(e^x+2)^2}$$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$

ومتناقصة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$

4-ب- بيان أن $f(\alpha)=\alpha$

لدينا $f(\alpha)=\frac{2\alpha+2}{e^\alpha+2}$

نعلم أن $g(\alpha)=0$

أي $2-\alpha e^{\alpha}=0 \Rightarrow e^{\alpha}=\frac{2}{\alpha}$

نعوض قيمة e^{α} في عبارة $f(\alpha)$

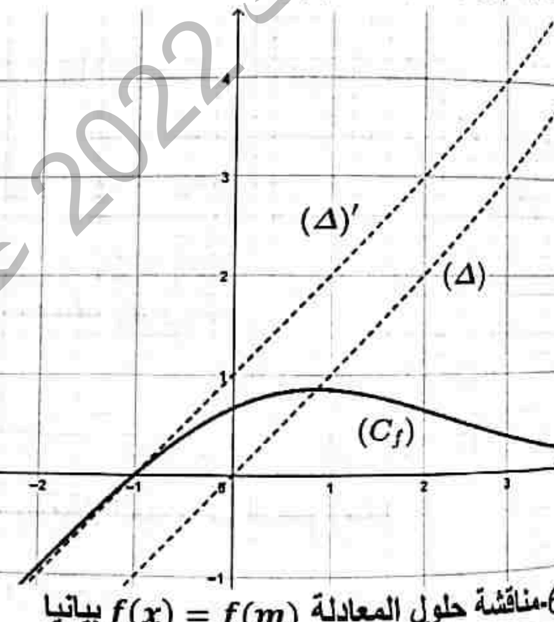
$$f(\alpha)=\frac{2\alpha+2}{\frac{2}{\alpha}+2}=\frac{2\alpha+2}{\frac{2+2\alpha}{\alpha}}=\alpha\frac{2\alpha+2}{2\alpha+2}$$

ومنه $f(\alpha)=\alpha$

جدول تغيرات f

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	α	↘	0

5-رسم (Δ) و (Δ') و (C_f)



6-مناقشة حلول المعادلة $f(x)=f(m)$ بيانيا

حلول المعادلة $f(x)=f(m)$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة

$$y=f(m)$$

-إذا كان $m\in]-\infty;-1]$ للمعادلة حل وحيد

-إذا كان $m\in]-1;\alpha[\cup]\alpha;+\infty[$ للمعادلة حلين

-إذا كان $m=\alpha$ للمعادلة حل مضاعف

1-البرهان بالتراجع أن $0\le u_n<\alpha$

- نسمي الخاصية $p(n)$ حيث "$0\le u_n<\alpha$"

نبرهن على صحة الخاصية من أجل $n=0$

لدينا $u_0=0$ و $0\le 0<\alpha$ ومنه $0\le u_0<\alpha$

ومنه: $p(0)$ محققة

- نفرض أن $p(n)$ صحيحة ونبرهن

أي: $0\le u_{n+1}<\alpha$

لدينا من فرضية التراجع: $0\le u_n<\alpha$

ولدينا f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0;\alpha[$

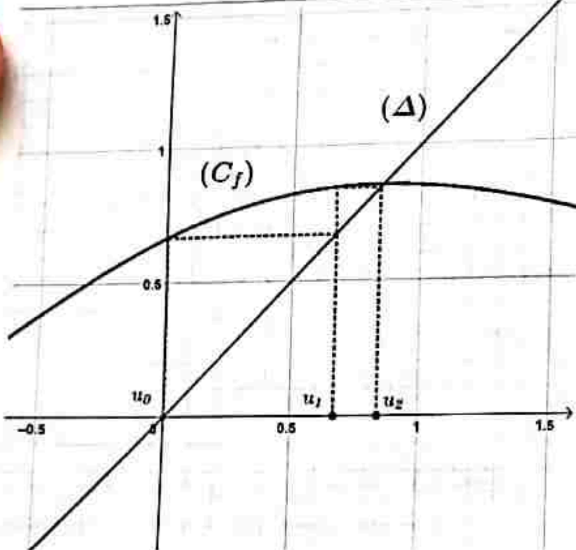
أي: $f(0)\le f(u_n)<f(\alpha)$

$$0\le\frac{2}{3}\le u_{n+1}<\alpha$$

ومنه: الخاصية $p(n+1)$ محققة

-ومنه: $0\le u_n<\alpha$ من أجل كل عدد طبيعي n

2- تمثيل الحدود



-التخمين: المتتالية (u_n) تبدو متزايدة وتتقارب نحو فاصلة نقطة تقاطع (C_f) مع (Δ)

3- البرهان أن u_n متقاربة

$$u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n=\frac{g(u_n)}{e^{u_n}+2}>0$$

ومنه $u_{n+1}-u_n>0$ ومنه u_n متزايدة تماما

بما أن u_n متزايدة ومحدودة من الأعلى بـ α

فهي متقاربة نحو نهايتها l

-حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

بما أن u_n متقاربة فإن:

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}=\lim_{n\to+\infty} u_n=l$$

ومنه: $f(l)=l$

$$\frac{2l+2}{e^{l}+2}=l$$

$$\frac{2l+2-le^{l}-2l}{e^{l}+2}=0$$

$$\frac{-le^{l}+2}{e^{l}+2}=0$$

$$2-le^{l}=0$$

ومنه $g(l)=0$

$$g(l)=g(\alpha)$$

ومنه: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\alpha$

71. بكالوريا 2009 الرياضيات

الموضوع الأول – التمرين الرابع

1-نعرف الدالة العددية f على المجال $[1,5]$ بالعبارة: $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{5}{x}\right)$

ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ الوحدة على المحورين $3cm$

1-أ-ادرس تغيرات الدالة f

1-ب-أنشئ المنحى البياني (C) والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ في نفس المعلم

2-نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=5$ وبالعبارة:

$$u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{5}{u_n}\right)$$

2-أ-احسب u_1 ، u_2

2-ب-استعمل المنحني (C) والمستقيم (Δ) لتمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، على محور الفواصل.

3-أ-برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_n \geq \sqrt{5}$$

3-ب-بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما ، ماذا تستنتج بالنسبة الى تقارب (u_n) ؟

4-أ-برهن أنه مهما يكن العدد الطبيعي n فإن:

$$\left(u_{n+1}-\sqrt{5}\right)\leq\frac{1}{2}\left(u_n-\sqrt{5}\right)$$

4-ب-استنتج أن $\left(u_n-\sqrt{5}\right)\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(u_0-\sqrt{5}\right)$

4-جـ- ماهي $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ ؟

الحل

1-أ-دراسة تغيرات الدالة f:

f قابلة للاشتقاق على $[1;5]$ ودالتها المشتقة:

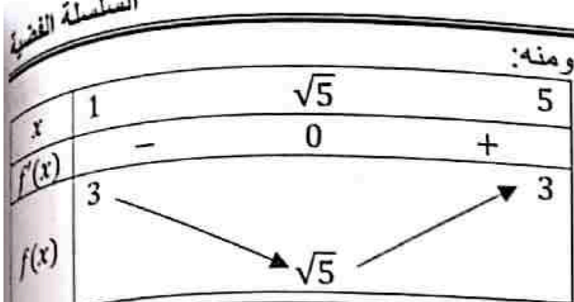
$$f'(x)=\frac{x^2-5}{2x^2}$$

$f'(x)=0$ يكافئ: $x^2-5=0$

وعليه $x=-\sqrt{5}\notin I$

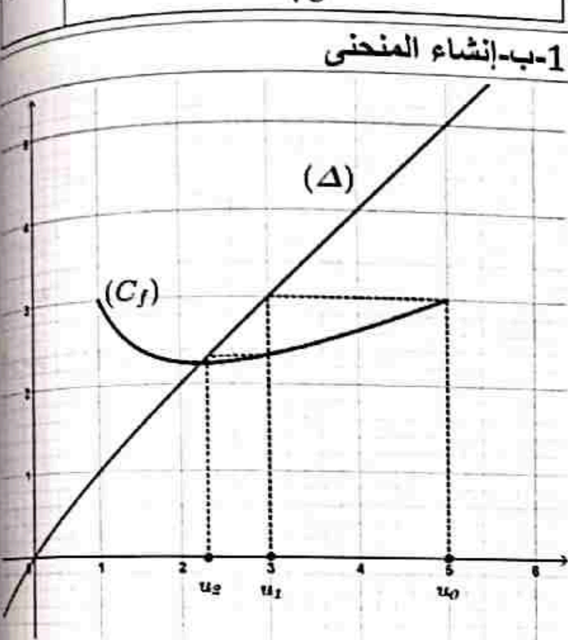
$x=\sqrt{5}$

ومنه:



x	1		$\sqrt{5}$		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	3	↘	$\sqrt{5}$	↗	3

1-ب-إنشاء المنحنى



2-أ-حساب u_1 و u_2

$$u_1=\frac{1}{2}\left(u_0+\frac{5}{u_0}\right)=3$$

$$u_2=\frac{1}{2}\left(u_1+\frac{5}{u_1}\right)=\frac{7}{3}$$

2-ب-تمثيل الحدود في الرسم السابق

3-أ- إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_n\geq\sqrt{5}$$

نسمي الخاصية $p(n): u_n\geq\sqrt{5}$

نتحقق من صحة الخاصية من أجل $n=0$ ،

لدينا $u_0=5\geq\sqrt{5}$

ومنه $P(0)$ محققة

نفرض أن $p(n)$ صحيحة ونبرهن أن $p(n+1)$ محققة

لدينا من الفرض $u_n\geq\sqrt{5}$

f متزايدة تماما ومنه $f(u_n)\geq f(\sqrt{5})$

$u_{n+1}\geq\sqrt{5}$

وعليه حسب الاستدلال بالتراجع فإن $u_n\geq\sqrt{5}$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$

3-ب-إثبات أن (u_n) متناقصة

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{5}{u_n}\right)-u_n$$
$$=-\frac{1}{2}u_n+\frac{5}{2u_n}$$
$$=\frac{-u_n^2+5}{2u_n}$$
$$=\frac{(\sqrt{5}-u_n)(\sqrt{5}+u_n)}{2u_n}$$

لدينا مما سبق:

$u_n\ge\sqrt{5}$ ومنه $\sqrt{5}-u_n\le 0$

وعليه $\frac{(\sqrt{5}-u_n)(\sqrt{5}+u_n)}{2u_n}\le 0$

وعليه $u_{n+1}-u_n\le 0$

ومنه (u_n) متناقصة

بما أن (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد $\sqrt{5}$ فهي متقاربة نحو نهايتها l

4-أ-البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن

$$\left(u_{n+1}-\sqrt{5}\right)\le\frac{1}{2}\left(u_n-\sqrt{5}\right)$$

لدينا:

$$u_{n+1}-\sqrt{5}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{5}{u_n}\right)-\sqrt{5}$$
$$=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{5}{u_n}+\sqrt{5}-\sqrt{5}\right)-\sqrt{5}$$
$$=\frac{1}{2}\left(u_n-\sqrt{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+\frac{5}{u_n}\right)-\sqrt{5}$$
$$=\frac{1}{2}\left(u_n-\sqrt{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{5}{u_n}-\sqrt{5}\right)$$

وبما أن $u_n\ge\sqrt{5}$

باستعمال المقلوب: $\frac{1}{u_n}\le\frac{1}{\sqrt{5}}$

$$\frac{5}{u_n}-\sqrt{5}\le\frac{5}{\sqrt{5}}-\sqrt{5}$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{5}{u_n}-\sqrt{5}\right)\le 0$$

بإضافة $\frac{1}{2}\left(u_n-\sqrt{5}\right)$ للطرفين نجد

$$\frac{1}{2}\left(u_n-\sqrt{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{5}{u_n}-\sqrt{5}\right)\le\frac{1}{2}\left(u_n-\sqrt{5}\right)$$

وعليه $u_{n+1}+\sqrt{5}\le\frac{1}{2}\left(u_n-\sqrt{5}\right)$

4-ب-إستنتاج أن:

$$\left(u_n-\sqrt{5}\right)\le\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(u_0-\sqrt{5}\right)$$

لدينا مما سبق:

$$\left(u_{n+1}-\sqrt{5}\right)\le\frac{1}{2}\left(u_n-\sqrt{5}\right)$$

وعليه: من أجل قيم n

$$\left(u_1-\sqrt{5}\right)\le\frac{1}{2}\left(u_0-\sqrt{5}\right)$$
$$\left(u_2-\sqrt{5}\right)\le\frac{1}{2}\left(u_1-\sqrt{5}\right)$$
$$\vdots$$
$$\left(u_n-\sqrt{5}\right)\le\frac{1}{2}\left(u_{n-1}-\sqrt{5}\right)$$

بضرب المتتاليات طرفا لطرف نجد:

$$\left(u_1-\sqrt{5}\right)\left(u_2-\sqrt{5}\right)\ldots\ldots\left(u_n-\sqrt{5}\right)$$
$$\le\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(u_0-\sqrt{5}\right)\ldots\ldots\left(u_{n-1}-\sqrt{5}\right)$$

بالاختزال نجد: $\left(u_n-\sqrt{5}\right)\le\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(u_0-\sqrt{5}\right)$

4-جـ- النهاية:

لدينا $\left(u_n-\sqrt{5}\right)\le\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(u_0-\sqrt{5}\right)$ و $u_n\ge\sqrt{5}$

اذن $u_n-\sqrt{5}\ge 0$

وعليه

$$0\le\lim_{n\to+\infty}\left(u_n-\sqrt{5}\right)\le\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(u_0-\sqrt{5}\right)$$

ومنه $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ لأن $-1<\frac{1}{2}<1$

وحسب النهايات بالمقارنة نجد

$$\lim_{n\to+\infty}\left(u_n-\sqrt{5}\right)=0$$

وعليه $\lim_{n\to+\infty}u_n=\sqrt{5}$

72. بكالوريا 2009 الرياضيات

الموضوع الثاني – التمرين الثاني

(u_n) المتتالية المعرفة بحدها الأول $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=3u_n+2n+1$

(v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $v_n=u_n+\alpha n+\beta$ حيث α و β عددان حقيقيان

1- عين α و β بحيث تكون المتتالية (v_n) متتالية هندسية ، يطلب حساب أساسها وحدها الأول

2- احسب كلا من v_n و u_n بدلالة n

3- احسب المجموعين S و S' حيث:

$$S=v_0+v_1+v_2+\cdots+v_n$$
$$S'=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n$$

4-أ- عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 3^n على 5

4-ب- عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها u_n مضاعفا للعدد 5

الحل

1- تعيين α و β

(v_n) متتالية هندسية أي:

لدينا $v_{n+1} = v_n q$

لدينا $v_{n+1} = u_{n+1} + \alpha(n+1) + \beta$

ومنه $v_{n+1} = 3u_n + 2n + 1 + \alpha(n+1) + \beta$

لدينا $u_n = v_n - \alpha n - \beta$

ومنه

$v_{n+1} = 3(v_n - \alpha n - \beta) + 2n + 1 + \alpha(n+1) + \beta$

أي

$v_{n+1} = 3v_n + \alpha(-2n+1) - 2\beta + 2n + 1$

$v_{n+1} = 3v_n + (-2\alpha + 2)n - 2\beta + \alpha + 1$
$= 0$

ومنه تكون (v_n) هندسية إذا كان

$(-2\alpha + 2)n - 2\beta + \alpha + 1 = 0$

أي $\begin{cases} -2\alpha + 2 = 0 \\ \text{و} \\ -2\beta + \alpha + 1 = 0 \end{cases}$

ومنه $\alpha = 1$ و $\beta = \frac{-\alpha-1}{-2} = 1$

ومنه حتى تكون (v_n) هندسية

يجب ان يكون $\alpha = 1$ و $\beta = 1$

أساسها $q = 3$ وحدها الأول v_0

$v_0 = u_0 + \alpha(0) + 1$

$v_0 = 1$

2- حساب v_n و u_n بدلالة n

$v_n = v_p q^{n-p}$

ومنه $v_n = v_0 q^n$

$v_n = 3^n$

عبارة u_n:

لدينا $v_n = u_n + n + 1$

ومنه $u_n = v_n - n - 1$

ومنه $u_n = 3^n - n - 1$

3- حساب S_n

$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$

$S_n = v_0 \dfrac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$

$S_n = \frac{3^{n+1}-1}{2}$

حساب S'_n

لدينا $S'_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

ومنه $u_n = v_n - n - 1$

لما $n = 0$ $u_0 = v_0 - 0 - 1$

لما $n = 1$ $u_1 = v_1 - 1 - 1$

لما $n = 2$ $u_2 = v_2 - 2 - 1$

.

.

لما $n = n$ $u_n = v_n - (n+1)$

ومنه

$S'_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n - [1 + 2 + \cdots + n + 1]$
$= S_n - T_n$

حيث: T_n عبارة عن مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية

$k_n = n + 1$ أساسها $r = 1$ وحدها الأول $k_0 = 1$

ومنه $S'_n = S_n - \left[\frac{n+1}{2}(n+2)\right]$

ومنه $S'_n = \frac{1}{2}[3^{n+1} - 1 - (n+1)(n+2)]$

4-أ- دراسة بواقي قسمة 3^n على 5

$3^0 \equiv 1[5]$, $n = 0$

$3^1 \equiv 3[5]$, $n = 1$

$3^2 \equiv 4[5]$, $n = 2$

$3^3 \equiv 2[5]$, $n = 3$

$3^4 \equiv 1[5]$, $n = 4$

القسمة دورية دورها 4

[5]	$4k+3$	$4k+2$	$4k+1$	$4k$	n
	2	4	3	1	$3^n \equiv$

بواقي قسمة 3^n على 5 هي $r = \{1; 2; 3; 4\}$

4-ب- تعيين قيمة العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها u_n مضاعفا للعدد 5

يكون u_n مضاعفا للعدد 5 إذا كان $u_n \equiv 0[5]$

أي $3^n - n - 1 \equiv 0[5]$

المناقشة

1-لما $n = 4k$ نجد

$3^n - n - 1 \equiv 3^{4k} - 4k - 1[5]$

$3^n - n - 1 \equiv 1 - 4k - 1[5]$

$3^n - n - 1 \equiv -4k[5]$

أي أنه يكون $u_n \equiv 0[5]$ إذا كان $-4k \equiv 0[5]$

أي

اذا $4k \equiv 0[5]$

ومنه $k \equiv 0[5]$

أي $k = 5k'$ ، $k' \in \mathbb{N}$

$n = 4(5k')$

$n = 20k'$ $k' \in \mathbb{N}$

2-لما $n = 4k + 1$

$3^n - n - 1 \equiv 3^{4k+1} - 4k - 1 - 1[5]$

$\equiv 3 - 4k - 2[5]$

أي أنه يكون $u_n \equiv 0[5]$ إذا كان $1-4k \equiv 0[5]$

أي $k \equiv 1[5]$

أي $k \equiv 4[5]$

ومنه $k = 5k' + 4$ أي $k' \in \mathbb{N}$

ومنه:

$n = 4(5k'+4)+1 = 20k'+17$ $k \in \mathbb{N}$

3.لما $k = 4k+2$

$$3^n - n - 1 \equiv 3^{4k+2} - 4k - 2 - 1[5]$$
$$\equiv 4 - 4k - 3[5]$$
$$\equiv -4k + 1[5]$$

أي أنه يكون $u_n \equiv 0[5]$

اذا كان $-4k+1 \equiv 0[5]$

$$-4k + 1 \equiv 0[5]$$
$$4k - 1 \equiv 0[5]$$
$$4k \equiv 1[5]$$

ولدينا $5k \equiv 0[5]$

$$k \equiv -1[5]$$
$$k \equiv 4[5]$$

ومنه $k = 5k' + 4$ $k' \in \mathbb{N}$

ومنه $n = 4(5k'+4)+2$

$$n = 20k' + 16 + 2$$

$n = 20k' + 18$ $k' \in \mathbb{N}$

4-لما $n = 4k+3$

$$3^n - n - 1 \equiv 3^{4k+3} - 4k - 3 - 1[5]$$
$$\equiv 2 - 4k - 4[5]$$
$$\equiv -2 - 4k[5]$$

أي أنه يكون $u_n \equiv 0[5]$

إذا كان $-2-4k \equiv 0[5]$

$$4k \equiv -2[5]$$

ولدينا $5k \equiv 0[5]$

بالطرح نجد $k \equiv 2[5]$

ومنه $k = 5k' + 2$ $k' \in z$

$$n = 4(5k'+2)+3$$
$$n = 20k' + 11$$

ومنه قيم n الطبيعية حتى يقبل u_n القسمة على 5 هي

$n \in \{20k+11; 20k+18; 20k+17; 20k\}$

مع: $k \in \mathbb{N}$

73. بكالوريا 2008 الرياضيات

الموضوع الأول – التمرين الثالث

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بالعبارة:

$$f(x) = 3 + \sqrt{x-1}$$

يرمز (C) الى منحنى f في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$(الوحدة على المحورين $2cm$)

1- احسب $\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ وفسر النتيجة هندسيا

-ادرس تغيرات الدالة f

-باستعمال منحنى دالة "الجذر التربيعي" أنشئ المنحنى(C)

-ارسم في نفس المعلم المستقيم(D)الذي معادلته: $y = x$

2- نعرف المتتالية (U_n) على المجموعة $\mathbb{N}$ كالاتي:

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

2-أ- باستعمال (D) و (C) ، مثل الحدود U_0، U_1، U_2 على محور الفواصل

2-ب- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) وتقاربها

3-أ- برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$2 \le U_n \le 5 \text{ و } u_{n+1} > u_n$$

3-ب- استنتج أن (U_n) متقاربة، أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

الحل

1- حساب $\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$$\lim_{\substack{x\to1 \\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to1 \\ >}} \frac{3+\sqrt{x-1}-3}{x-1}$$
$$= \lim_{\substack{x\to1 \\ >}} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} \quad = \lim_{\substack{x\to1 \\ >}} \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$
$$= \lim_{\substack{x\to1 \\ >}} \sqrt{\frac{1}{x-1}} \quad = +\infty$$

لأن $\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ >}} \frac{1}{x-1} = +\infty$

-تفسير النتيجة هندسيا: يوجد نصف مماس يوازي محور التراتيب عند النقطة ذات الفاصلة 1

(f غير قابلة للاشتقاق عند 1)

دراسة تغيرات الدالة f

المشتقة: f قابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$ و

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

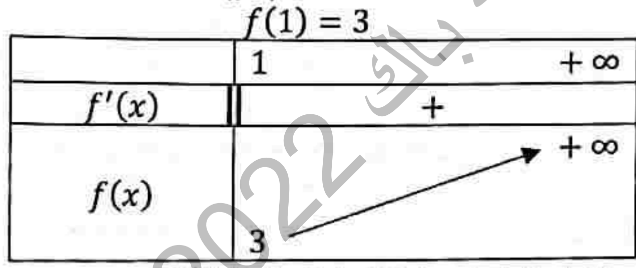
لدينا $\sqrt{x-1}>0$ ومنه $f'(x)>0$ على المجال $]1;+\infty[$

إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$

النهايات

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(3+\sqrt{x+1})=+\infty$$

$$f(1)=3$$



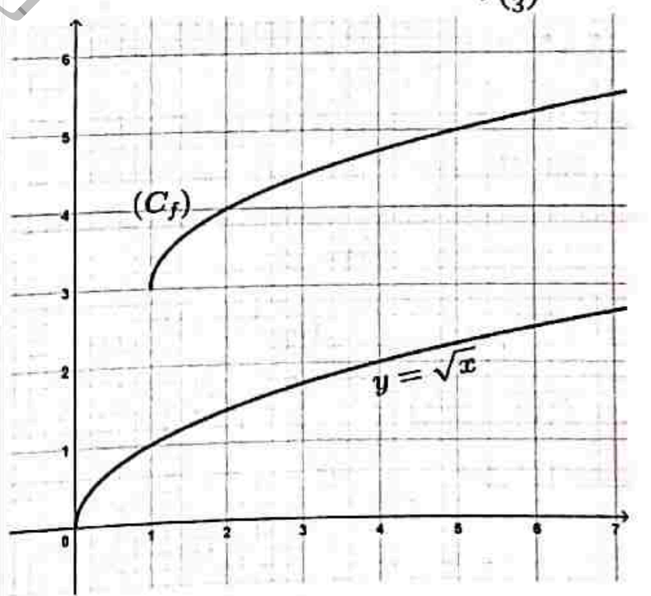
x	1 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	‖ $+$
$f(x)$	3 ↗ $+\infty$

انشاء المنحنى (C_f) باستعمال الدالة $x\to\sqrt{x}$

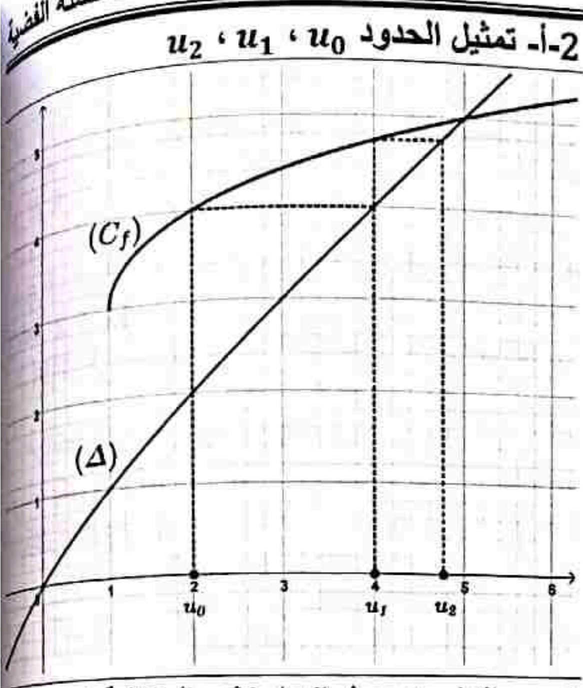
تسمى الدالة $u(x)$ حيث $u(x)=\sqrt{x}$

فإن $f(x)=u(x-1)+3$

ومنه (C_f) هو نفسه منحنى الدالة u بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\binom{1}{3}$



2-أ- تمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2



2-ب- التخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n)

(u_n) تبدو متزايدة ومتقاربة نحو فاصلة نقطة تقاطع (C_f) و (D)

3-أ- البرهان بالتراجع أن من اجل n طبيعي $u_{n+1}>u_n$ و $2\le u_n\le 5$

- البرهان أن $2\le u_n\le 5$

- نسمي الخاصية $p(n)$ حيث $p(n): 2\le u_n\le 5$

نبرهن من اجل $n=0$

لدينا $u_0=2$ ومنه $2\le 2\le 5$ ومنه $2\le u_0\le 5$

ومنه $p(0)$ محققة

- نفرض أن $p(n)$ صحيحة ونبرهن من اجل $n+1$

أي $p(n+1)$ أي $p(n+1): 2\le u_{n+1}\le 5$

لدينا من فرضية التراجع $2\le u_n\le 5$

ونعلم أن $f(x)$ مستمرة ومتزايدة تماما على $[2;5]$

إذن $f(2)\le f(u_n)\le f(5)$

أي $2\le u_{n+1}\le 5$ ومنه $p(n+1)$ محققة

- ومنه $p(n)$ صحيحة من أجل كل n طبيعي

-البرهان أن $u_{n+1}>u_n$

- نتحقق من اجل $n=0$

$u_0=2$ و $u_1=4$ و $4>2$ منه $u_1>u_0$

- نفرض أن $u_{n+1}>u_n$ صحيحة

ونبرهن من أجل $n+1$ أي $u_{n+2}>u_{n+1}$

لدينا من فرضية التراجع $u_{n+1}>u_n$

وبما أن $f(x)$ متزايدة تماما فإن

$$f(u_{n+1})>f(u_n)$$

أي $u_{n+2}>u_{n+1}$

- ومنه فإن $u_{n+1}>u_n$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$

3-ب- استنتاج أن (u_n) متقاربة

لدينا من السؤال السابق $u_{n+1} > u_n$

ومنه $u_{n+1} - u_n > 0$

ومنه (u_n) متزايدة تماما

ولدينا كذلك $2 \le u_n \le 5$

ومنه بما أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بـ 5 فإنها متقاربة نحو نهاية l

حساب $\lim u_n$

بما أن (u_n) متقاربة فإن

$$\lim u_n = \lim u_{n+1} = l$$

أي أن

$$3 + \sqrt{l-1} = l$$

$$\sqrt{l-1} = l-3$$

$$l-1 = (l-3)^2$$

$$l-1-(l-3)^2 = 0$$

$$-l^2+6l-9+l-1=0$$

$$-l^2+7l-10=0$$

بحل المعادلة نجد $\Delta = 9$

اما $l = -7$ مرفوض لأنّ $l > 2$

او $l = 5$ مقبول

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 5$

74. بكالوريا 2008 الرياضيات

الموضوع الثاني – التمرين الثاني

المتتالية المعرفة بحدها الأول $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1$

1-احسب u_1 و u_2 و u_3

2-(v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n$

2-أ-برهن بالتراجع أن (v_n) متتالية ثابتة

2-ب-استنتج عبارة u_n بدلالة n

2-جـ-احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3-(w_n) المتتالية العددية المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ: $w_n = \frac{2}{3}n - \left(\frac{2}{3}\right)^n$

-احسب المجموع S حيث:

$$S = w_0 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n$$

الحل

1- حساب u_1 و u_2 و u_3

ولدينا $u_0 = 2$ ، $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1$

$$u_1 = \frac{2}{3}(2) + 1 = \frac{7}{3}$$

$$u_2 = \frac{2}{3}\left(\frac{7}{3}\right) + 1 = \frac{23}{9}$$

$$u_3 = \frac{2}{3}\left(\frac{23}{9}\right) + 1 = \frac{73}{27}$$

2-أ- البرهان بالتراجع أن (v_n) متتالية ثابتة

(v_n) ثابتة أي $v_{n+1} = v_n$ إذن $v_{n+1} - v_n = 0$

نسمي الخاصية $p(n)$ "$v_{n+1} - v_n = 0$"

نتحقق من صحة الخاصية من اجل $n = 0$

$$v_1 - v_0 = u_1 + \left(\frac{2}{3}\right) - \left[u_0 + \left(\frac{2}{3}\right)^0\right]$$

$$= \frac{7}{3} + \frac{2}{3} - 2 - 1 = 0$$

ومنه $v_1 - v_0 = 0$

إذن الخاصية محققة من أجل قيمة ابتدائية $n = 0$

نفرض أن $p(n)$ محققة ونبرهن أن $p(n+1)$ محققة

أي نبرهن أن $v_{n+2} - v_{n+1} = 0$

لدينا

$$v_{n+2} - v_{n+1} = \left[u_{n+2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}\right] - \left[u_{n+1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$$

$$= \left[\frac{2}{3}u_{n+1} + 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}\right] - \left[\frac{2}{3}u_n + 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[u_{n+1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - \left(u_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)\right]$$

$$= \frac{2}{3}(v_{n+1} - v_n) = 0$$

وعليه $v_{n+2} - v_{n+1} = 0$ ومنه $p(n+1)$ محققة

ومنه حسب الاستدلال بالتراجع نجد $v_{n+1} - v_n = 0$ أي (v_n) ثابتة من أجل كل عدد طبيعي n

2-ب- استنتاج عبارة u_n

لدينا $v_n = u_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n$

وعليه $u_n = v_n - \left(\frac{2}{3}\right)^n$

بما أن (v_n) متتالية ثابتة

فأن $v_n = v_0 = u_0 + \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 3$

وعليه $u_n = 3 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$

2-جـ حساب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

لدينا $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ لأن: $-1 < \frac{2}{3} < 1$

وعليه $\lim_{n\to+\infty} u_n = 3$

3- حساب المجموع S

$$w_n = \frac{2}{3}n - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$S = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$

$= \left(\frac{2}{3}\right)(0) - \left(\frac{2}{3}\right)^0 + \frac{2}{3}(1) - \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \cdots + \frac{2}{3}(n) - \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$= \frac{2}{3}(0 + 1 + \cdots + n) - \left[\left(\frac{2}{3}\right)^0 + \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$

وعليه

$\ldots\left[\left(\frac{n+1}{2}\right)(0+n)\right] - \left[\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}\right]$

$\frac{n(n+1)}{3} - 3\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$

$\frac{n^2+n-9}{3} + 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

$$S = \frac{n^2+n-9}{3} + 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

متتاليات مقترحة

.75 متتالية مقترحة رقم:01

الإسم على اليوتيوب: المتتاليات و البرهان بالتراجع رقم 34(تمرين شامل و رائع)

I- (v_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ ، حيث حدودها موجبة تماما وتحقق:

$$\begin{cases} v_2+v_3=\frac{20}{9} \\ v_1\times v_3-v_2=\frac{4}{9} \end{cases}$$

1-احسب v_2 ثم الأساس q والحد الأول v_0 للمتتالية (v_n)

2-عين عبارة v_n بدلالة n ، ثم بين أنها متقاربة

II-نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=\alpha$ و $3u_{n+1}=2u_n+3$

1-عين قيمة α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة

2-نضع $u_0=6$

أ-احسب الحدود: u_1 ، u_2 ، u_3

ب-برهن بالتراجع أنه مهما كان $n\in\mathbb{N}$ فإن: $u_n>3$

جـ-عين اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج انها متقاربه

د-احسب نهاية المتتالية (u_n)

3-لتكن (w_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $w_n=u_n-v_n$

3-أ-احسب w_0 و w_1

3-ب- برهن بالتراجع أنه مهما كان $n\in\mathbb{N}$ فإن المتتالية (w_n) ثابتة

جـ-استنتج عبارة u_n بدلالة n،ثم احسب نهايتها مرة ثانية.

4-احسب بدلالة n المجموع S_n:

حيث : $S_n=\frac{u_0}{v_0}+\frac{u_1}{v_1}+\dots+\frac{u_n}{v_n}$

5-احسب كل من T_n و p_n بدلالة n:

$T_n=v_0^4+v_1^4+\dots.+v_n^4$

$p_n=(2v_0)\times(2v_1)\times\dots..\times(2v_n)$

الحل

I-1- حساب v_2

-الوسط الهندسي: $v_1\times v_3=v_2^2$

بالتعويض في المعطيات نجد: $v_2^2-v_2=\frac{4}{9}$

ومنه: $v_2^2-v_2-\frac{4}{9}=0$

نحل المعادلة: $v_2^2-v_2-\frac{4}{9}=0$ باستعمال المميز(Δ)

$$\Delta=b^2-4ac$$

$$\Delta=81-4(9)(-4)=225=(15)^2$$

$$(v_2)_1=\frac{9-15}{18}=\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$(v_2)_1$ مرفوض لأنّ الحدود موجبة تماما

$$(v_2)_2=\frac{9+15}{18}=\frac{4}{3}\ (\text{مقبول})$$

إذن: $v_2=\frac{4}{3}$

- حساب الأساس q

لدينا: $v_2+v_3=\frac{20}{9}$ ومنه: $v_3=\frac{20}{9}-\frac{4}{3}$

ومنه: $v_3=\frac{8}{9}$

-عبارة الحد العام لمتتالية هندسية هي:

$v_n=v_p.q^{n-p}$ مع $n\geq p$

ومنه: $v_3=v_2.q$ ومنه: $q=\frac{v_3}{v_2}$

إذن: $q=\frac{v_3}{v_2}=\frac{\frac{8}{9}}{\frac{4}{3}}=\frac{2}{3}$

-حساب الحد الأول v_0

لدينا: $v_n=v_p.q^{n-p}$ مع $n\geq p$

ومنه: $v_n=v_0.q^n$

ومنه: $v_2=v_0.q^2$

أي: $v_0=\frac{v_2}{q^2}=\frac{\frac{4}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}=3$

I-2- تعيين عبارة الحد العام v_n

$$v_n=v_p.q^{n-p}$$

ومنه: $v_n=3.\left(\frac{2}{3}\right)^n$

- تبيان أن (v_n) متقاربة:

لدينا: $v_n=3.\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ومنه: $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$

لأن: $-1<\frac{2}{3}<1$ أي: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$

وبما أن: $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\ell=0$ فإن المتتالية (v_n) متقاربة

II -1- تعيين قيمة α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة:

حتى تكون (u_n)ثابتة يجب أن: $u_{n+1}=u_n=u_0=\alpha$

لدينا: $3u_{n+1}=2u_n+3$

ومنه: $\alpha=\frac{2\alpha+3}{3}$ أي: $3\alpha=2\alpha+3$

أي: $3\alpha-2\alpha=3$ إذن: $\alpha=3$

-حتى تكون (u_n) ثابتة يجب أن تكون قيمة α هي: 3

II-2-أ-حساب u_3, u_2, u_1:

لدينا: $3u_{n+1} = 2u_n + 3$ أي: $u_{n+1} = \frac{(2u_n+3)}{3}$

ومنه: $u_1 = \frac{2u_0+3}{3} = \frac{2(6)+3}{3} = 5$

$$u_2 = \frac{2u_1+3}{3} = \frac{2(5)+3}{3} = \frac{13}{3}$$

$$u_3 = \frac{2u_2+3}{3} = \frac{2\left(\frac{13}{3}\right)+3}{3} = \frac{35}{9}$$

II-2-ب-البرهان بالتراجع أنه مهما كان $n \in \mathbb{N}$ فإن: $u_n > 3$

- نضع الخاصية $P(n)$ "$u_n > 3$"

- من أجل $n = 0$ لدينا: $u_0 = 6 > 3$ إذن: $P(0)$ محققة

- نفرض أن الخاصية $P(n)$ محققة من أجل $n \in \mathbb{N}$ أي: $u_n > 3$ ونبرهن أن $P(n+1)$ محققة أي: $u_{n+1} > 3$

-لدينا من الفرضية أن: $u_n > 3$

ومنه: $2u_n > 6$

$2u_n + 3 > 9$

$\frac{2u_n+3}{3} > 3$

أي: $u_{n+1} > 3$

ومنه $P(n+1)$ محققة

إذن $u_n > 3$ من أجل كل عدد طبيعي n

II-2-جـ- تعيين اتجاه تغير المتتالية (u_n):

-ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n+3}{3} - u_n = \frac{2u_n + 3 - 3u_n}{3} = \frac{-u_n+3}{3} = \frac{1}{3}(-u_n+3)$$

لدينا: $u_n > 3$ ومنه $-u_n + 3 < 0$

إذن: $u_{n+1} - u_n < 0$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما

-استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة:

- بما أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد (3) فهي متقاربة نحو نهاية ℓ

II-2-د- حساب نهاية (u_n)

- بما أن (u_n) متقاربة فإن:

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

لدينا: $u_{n+1} = \frac{2u_n+3}{3}$

ومنه: $\ell = \frac{2\ell+3}{3}$ أي: $3\ell = 2\ell + 3$

إذن: $\ell = 3$ ومنه $\lim_{n\to+\infty} u_n = 3$

II-3-أ-حساب w_0 و w_1:

ومنه $w_n = u_n - v_n$

$w_0 = u_0 - v_0 = 6 - 3 = 3$

و $w_1 = u_1 - v_1 = 5 - 2 = 3$

II-3-ب- البرهان بالتراجع أنه مهما كان $n \in \mathbb{N}$ فإن المتتالية (w_n) ثابتة:

- نسمي الخاصية $P(n)$ "(w_n) ثابتة"

- من أجل $n = 0$ لدينا: $w_0 = w_1 = 3$

أي: $P(0)$ محققة

- نفرض أن $P(n)$ محققة من أجل $n \in \mathbb{N}$

أي أن: $w_n = 3$

ونبرهن أن $P(n+1)$ محققة أي: $w_{n+1} = 3$

- لدينا: $w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1}$

$$= \frac{2u_n+3}{3} - \frac{2}{3}v_n$$

$$\frac{2u_n + 3 - 2v_n}{3} = \frac{2(u_n - v_n) + 3}{3} = \frac{2w_n+3}{3}$$

-لدينا: من الفرضية $w_n = 3$ إذن:

$$w_{n+1} = \frac{2w_n+3}{3} = \frac{2(3)+3}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

ومنه $P(n+1)$ محققة

إذن (w_n) متتالية ثابتة من أجل $n \in \mathbb{N}$

II-3-جـ- استنتاج عبارة (u_n) بدلالة n:

لدينا: $w_n = u_n - v_n$ ومنه: $u_n = w_n + v_n$ أي:

$$u_n = 3 + 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

-حساب نهاية (u_n):

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left[3\left(\frac{2}{3}\right)^n + 3\right] = 3$$

$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ لأن $-1 < \frac{2}{3} < 1$

II-4- حساب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n = \frac{u_0}{v_0} + \frac{u_1}{v_1} + \cdots + \frac{u_n}{v_n}$$

لدينا: $v_n = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$ و $u_n = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n + 3$

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{3\left(\frac{2}{3}\right)^n + 3}{3\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{3\left(\frac{2}{3}\right)^n}{3\left(\frac{2}{3}\right)^n} + \frac{3}{3\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

$$\frac{u_n}{v_n} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{-n}$$

$$\frac{u_n}{v_n} = 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

باستخدام العلاقة التراجعية التالية نجد:

$$\frac{u_n}{v_n} = 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$$\begin{cases} \frac{u_0}{v_0} = 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^0 \\ \frac{u_1}{v_1} = 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^1 \\ \frac{u_2}{v_2} = 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ \vdots \\ \frac{u_n}{v_n} = 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^n \end{cases}$$

بالجمع العمودي طرفا لطرف نجد:

$$S_n = \underbrace{1(n+1)}_{\text{1 تكرر n+1 مرة}} + \left[\left(\frac{3}{2}\right)^0 + \left(\frac{3}{2}\right)^1 + \cdots + \left(\frac{3}{2}\right)^n\right]$$

ومنه $S_n = 1(n+1) + [1.\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{3}{2} - 1}]$

إذن: $S_n = n + 1 + 2[\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - 1]$

II-5- حساب كل من T_n و P_n بدلالة n:

-حساب T_n: حيث: $T_n = v_0^4 + v_1^4 + \cdots + v_n^4$

لدينا: $v_n = v_p.q^{n-p}$ مع $n \geq p$

$$\begin{cases} (v_0)^4 = (v_0)^4 \\ (v_1)^4 = (v_0.q)^4 \\ (v_2)^4 = (v_0.q^2)^4 \\ \vdots \\ (v_n)^4 = (v_0.q^n)^4 \end{cases}$$

ومنه:

بالجمع العمودي طرفا لطرف نجد:

$$T_n = (v_0)^4 + (v_0q)^4 + (v_0q^2)^4 + \cdots + (v_0q^n)^4$$

$$T_n = v_0^4 + v_0^4.q^4 + v_0^4.q^{2(4)} + \cdots + v_0^4q^{n(4)}$$

$$T_n = v_0^4[1 + q^4 + q^{2(4)} + \cdots + q^{(n)(4)}]$$

$$T_n = 81[1\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{4(n+1)} - 1}{\left(\frac{2}{3}\right)^4 - 1}]$$

$$T_n = 81\left(\frac{\left(\frac{16}{81}\right)^{n+1} - 1}{\frac{16}{81} - 1}\right)$$

$$T_n = -\frac{81^2}{65}\left[\left(\frac{16}{18}\right)^{n+1} - 1\right]$$

- حساب P_n

لدينا: $P_n = (2v_0) \times (2v_1) \times \ldots \times (2v_n)$

$$\begin{cases} 2v_0 = 2v_0 \\ 2v_1 = 2q.v_0 \\ 2v_2 = 2q^2.v_0 \\ \vdots \\ 2v_n = 2q^n.v_0 \end{cases}$$

-بالضرب العمودي طرفا لطرف نجد:

$$P_n = (2v_0) \times (2v_0.q) \times \ldots \times (2v_0.q^n)$$

$$P_n = 2^{n+1}[v_0.v_0q.v_0q^2 \ldots v_0q^n]$$

$$P_n = 2^{n+1}.v_0^{n+1}[1.q.q^2 \ldots q^n]$$

$$P_n = 2^{n+1}.v_0^{n+1}(q^{1+2+\cdots+n})$$

إذن: $P_n = (2 \times 3)^{n+1}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n-1+1}{2}[1+n]}\right]$

أي: $P_n = (2 \times 3)^{n+1}[\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{2}(1+n)}]$

76. متتالية مقترحة رقم:02

الإسم على اليوتيوب: مواضيع مقترحة في الرياضيات في المتتاليات لبكالوريا 2017 (ع ت+ ر+ ت ر)رقم 32

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها الأول: $u_1 = 1$

و $u_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)}u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)}$

1-أ- بين بالتراجع أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 3.

1-ب- بيّن أنّ المتتالية (u_n) رتيبة.

2-(v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$كما يلي:

$v_n = n(3 - u_n)$

2-أ- بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

2-ب- عبر عن (v_n) و (u_n) بدلالة n.

2-جـ- ادرس تقارب المتتاليتين (v_n) و (u_n).

3-احسب بدلالة n المجموع:

$S_n = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \cdots + nu_n$

ثم أحسب $\lim_{n \to +\infty} S_n$.

الحل

1-أ-البرهان بالتراجع ان (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 3: أي أن $u_n < 3$

- نسمي الخاصية $p(n)$ "$u_n < 3$"
- من أجل $n = 1$ لدينا $u_1 = 1 < 3$ أي $p(1)$ محققة

نفرض أن $p(n)$ محققة أي $u_n < 3$

أي $u_n - 3 < 0$

ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي $u_{n+1} < 3$

أي $u_{n+1} - 3 < 0$

$$u_{n+1} - 3 = \frac{n}{2(n+1)}u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)} - 3$$
$$= \frac{nu_n + 3(n+2) - 3\times 2(n+1)}{2(n+1)}$$
$$= \frac{nu_n + 3n + 6 - 6n - 6}{2(n+1)}$$
$$= \frac{nu_n - 3n}{2(n+1)}$$
$$= \frac{n(u_n - 3)}{2(n+1)}$$

لدينا $n \in \mathbb{N}^*$ و $u_n - 3 < 0$ (من الفرضية)

ومنه $\frac{n(u_n-3)}{2(n+1)} < 0$ إذن $u_{n+1} - 3 < 0$

أي $u_{n+1} < 3$

ومنه $p(n+1)$ محققة وأخيرا $u_n < 3$ من أجل $n \in \mathbb{N}^*$ أي المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 3

1-ب-تبيان أن المتتالية (u_n) رتيبة:

ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n}{2(n+1)}u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)} - u_n$$
$$= \frac{nu_n + 3n + 6 - 2nu_n - 2u_n}{2(n+1)}$$
$$= \frac{3n + 6 - nu_n - 2u_n}{2(n+1)}$$
$$= \frac{-u_n(n+2) + 3(n+2)}{2(n+1)}$$
$$= \frac{(n+2)(3 - u_n)}{2(n+1)}$$

لدينا $n \in \mathbb{N}^*$ و $u_n - 3 < 0$ أي $3 - u_n > 0$

إذن: $\frac{(n+2)(3-u_n)}{2(n+1)} > 0$

ومنه $u_{n+1} - u_n > 0$

أي المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}^*$

2-أ-تبيان أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

تكون (v_n) هندسية إذا كان: $v_{n+1} = q\, v_n$

$$v_{n+1} = (n+1)(3 - u_{n+1})$$
$$= (n+1)\left[3 - \left(\frac{n}{2n+1}u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)}\right)\right]$$
$$= (n+1)\left(3 - \frac{n}{2(n+1)}u_n - \frac{3(n+2)}{2(n+1)}\right)$$
$$= 3(n+1) - \frac{n}{2}u_n - \frac{3}{2}(n+2)$$
$$= \frac{1}{2}(6n + 6 - nu_n - 3n - 6)$$
$$= \frac{1}{2}(3n - nu_n)$$
$$= \frac{1}{2}n(3 - u_n)$$
$$v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_1 = 1(3-1) = 2$

2-ب-التعبير عن v_n و u_n بدلالة n

$$v_n = v_1 q^{n-1}$$
$$v_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

ومنه $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

لدينا: $v_n = n(3 - u_n)$

$$3 - u_n = \frac{v_n}{n}$$

أي $u_n = 3 - \frac{1}{n}v_n$

ومنه $u_n = 3 - \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

2-جـ-دراسة تقارب المتتاليتان (v_n) و (u_n)

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = 0$$

(لأن $-1 < \frac{1}{2} < 1$)

ومنه (v_n) متتالية متقاربة نحو 0

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left[3 - \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right] = 3$$

ومنه (u_n) متتالية متقاربة نحو 3

3-حساب بدلالة n المجموع:

$$S_n = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \cdots + nu_n$$

لدينا $v_n = n(3 - u_n)$ أي $v_n = 3n - nu_n$

ومنه: $nu_n = 3n - v_n$

$u_1 = 3(1) - v_1$

$2u_2 = 3(2) - v_2$

$3u_3 = 3(3) - v_3$

.

.

$nu_n = 3(n) - v_n$

بالجمع العمودي طرفا لطرف نجد:

$$S_n = [3(1) + 3(2) + \cdots + 3(n)] - [v_1 + v_2 + \cdots + v_n]$$

$$S_n = \frac{n-1+1}{2}[3+3n] - v_1\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1}\right)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(3+3n) + 4\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right]$$

حساب: $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3n}{2}(1+n) + 4\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right]\right) = +\infty$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ لأن $-1 < \frac{1}{2} < 1$

77. متتالية مقترحة رقم:03

الإسم على اليوتيوب: مواضيع مقترحة في الرياضيات في المتتاليات لبكالوريا 2017(ع ت+ ر+ ت ر)رقم 9

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$

1-أحسب الحدود u_1, u_2 و u_3 ثم ضع تخمينا حول إتجاه تغير المتتالية (u_n).

2-أ-برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n لدينا: $u_n \leq n + 3$

2-ب - أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

2-جـ-استنتج أن (u_n) محدودة من الأسفل. هل يمكن القول أن (u_n) متقاربة؟

3-نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n = u_n - n$

أ-بيّن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب-عبر عن v_n بدلالة n ثم u_n بدلالة n ثم أحسب نهاية المتتالية (u_n).

جـ-أحسب بدلالة n المجموع:

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

4-لتكن المتتالية (T_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $T_n = \ln(v_n)$

أ-برهن أن المتتالية (T_n) حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

ب-أحسب بدلالة n المجموع:

$$A_n = T_0 + T_1 + T_2 + \cdots + T_n$$

ثم استنتج الجداء: $P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \ldots \times v_n$

الحل

1-حساب الحدود u_1 ، u_2 ، u_3

لدينا $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$

ومنه $u_1 = \frac{2}{3}(2) + \frac{1}{3}(0) + 1 = \frac{7}{3}$

$u_2 = \frac{2}{3}\left(\frac{7}{3}\right) + \frac{1}{3}(1) + 1 = \frac{26}{9}$

$u_3 = \frac{2}{3}\left(\frac{26}{9}\right) + \frac{1}{3}(2) + 1 = \frac{97}{27}$

وضع تخمين حول إتجاه التغير لـ(u_n)

لدينا $2 \leq \frac{7}{3} \leq \frac{26}{9} \leq \frac{97}{27}$

ومنه $u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq u_3$

ومنه المتتالية (u_n) تبدو متزايدة

2-أ-البرهان بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n يكون: $u_n \leq n + 3$

- نسمي الخاصية $p(n)$ $u_n \leq n + 3$

من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = 2$ و $2 \leq 3 + 0$ أي $u_0 \leq 3$

ومنه $p(0)$ محققة

نفرض أن $p(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n أي $u_n \leq n + 3$ و نبرهن أن $p(n+1)$ محققة أي $u_{n+1} \leq (n+1) + 3$ أي $u_{n+1} \leq n + 4$

لدينا من الفرض $u_n \leq n + 3$

$$\frac{2}{3}u_n \leq \frac{2}{3}(n+3)$$

$$\frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \leq \frac{2}{3}(n+3) + \frac{1}{3}n + 1$$

$$u_{n+1} \leq \frac{2}{3}n + \frac{6}{3} + \frac{1}{3}n + 1$$

$$u_{n+1} \leq \frac{3}{3}n + 2 + 1$$

$$u_{n+1} \leq n + 3 \leq n + 4$$

ومنه $p(n+1)$ محققة

إذن $u_n \leq n + 3$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

2-ب-دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n)

لدراسة اتجاه تغير ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

لدينا $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - u_n$

$$= -\frac{u_n}{3} + \frac{1}{3}n + \frac{3}{3}$$

$$= \frac{1}{3}(-u_n + n + 3)$$

لدينا من البرهان بالتراجع أن $u_n \leq n + 3$

ومنه $0 \leq -u_n + n + 3$

ومنه $0 \leq u_{n+1} - u_n$ إذن (u_n) متتالية متزايدة

2-جـ-استنتاج أن (u_n) محدودة من الأسفل

بما أن (u_n) متتالية متزايدة وأصغر قيمة تأخذها هي2

$$2 = u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq u_3 \ldots\ldots \leq u_n$$

ومنه (u_n) محدودة بالعدد 2

لا تمكن القول ان (u_n) متقاربة اذا كانت (u_n) متزايدة ومحدودة من الاسفل

3-أ-بيان أن (v_n) متتالية هندسية

تكون (v_n) متتالية هندسية إذا كان: $v_{n+1} = v_n q$

لدينا $v_n = u_n - n$

ومنه

$$v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1)$$

$$= \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - n - 1$$

$$= \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3}n$$

$$= \frac{2}{3}(u_n - n)$$

$$v_{n+1} = v_n \frac{2}{3}$$

ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ وحدها الأول $v_0 = u_0 - (0) = 2$

3-ب-التعبير عن (v_n) بدلالة n

(v_n) متتالية هندسية ومنه حدها العام هو

$$v_n = v_0 q^n$$

$$v_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

تعبير عن (u_n) بدلالة n

لدينا $v_n = u_n - n$

ومنه $u_n = v_n + n$

$$u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$$

حساب نهاية (u_n)

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n\right)$$

نعلم أن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ لأن $-1 < \frac{2}{3} < 1$

ومنه $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

3-جـ-حساب بدلالة n المجموع S_n

لدينا $v_n = u_n - n$

ومنه $u_n = v_n + n$

إذن $u_0 = v_0 + 0$

$u_1 = v_1 + 1$

$u_2 = v_2 + 2$

.

.

$u_n = v_n + n$

بالجمع طرفا لطرف نجد

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n + 0 + 1 + 2 \ldots\ldots + n$$

$$S_n = S'_n + S''_n$$

حيث $S_n{}'$ هو مجموع متتابع لمتتالية هندسية (v_n) أساسها $q' = \frac{2}{3}$ وحدها الأول $v_0 = 2$ ومنه

$$S'_n = \frac{v_0(q^{n+1}-1)}{q-1} = \frac{2\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 1\right)}{\frac{2}{3} - 1}$$

$$= \frac{2\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 1\right)}{-\frac{1}{3}} = -6\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 6$$

S''_n هو مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية أساسها $r = 1$ وحدها الأول $w_0 = 0$

ومنه $S''_n = \frac{(n)(n+1)}{2}$

ومنه $S_n = -6\left[\frac{2}{3}\right]^{n+1} + 6 + \frac{n(n+1)}{2}$

4-أ-البرهان أن (T_n) متتالية حسابية

تكون (T_n) متتالية حسابية اذا كان: $T_{n+1} = T_n + r$

لدينا $v_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$ و $T_n = \ln(v_n)$

ومنه $T_{n+1} = \ln(v_{n+1})$

ومنه $T_{n+1} = \ln\left(2\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$

$$T_{n+1} = \ln(2) + \ln\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

$$T_{n+1} = \ln(2) + (n+1)\ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$T_{n+1} = \ln(2) + n\ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$T_{n+1} = \ln 2 + \ln\left(\frac{2}{3}\right)^n + \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$T_{n+1} = \ln\left(2\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$T_{n+1} = T_n + \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

ومنه (T_n) متتالية حسابية أساسها $r = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$

وحدها الأول $T_0 = \ln(v_0) = \ln 2$

ومنه $T_n = T_0 + nr$

إذن $T_n = \ln 2 + n\ln\left(\frac{2}{3}\right)$

4-ب-حساب المجموع A_n بدلالة n

لدينا A_n هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية

معناه $A_n = \frac{(n+1)}{2}[T_0 + T_n]$

$$A_n = \frac{(n+1)}{2}\left[\ln 2 + \ln 2 + n\ln\left(\frac{2}{3}\right)\right]$$
$$= \frac{(n+1)}{2}\left[2\ln 2 + n\ln\left(\frac{2}{3}\right)\right]$$

استنتاج الجداء p_n بدلالة n

لدينا $p_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times ... \times v_n$

و $v_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$

$$v_0 = 2\left(\frac{2}{3}\right)^0$$
$$v_1 = 2\left(\frac{2}{3}\right)^1$$
$$v_2 = 2\left(\frac{2}{3}\right)^2$$
.
.
$$v_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

بضرب طرفا لطرف نجد

$$p_n = (2.2.2 \ldots\ldots 2)\left(\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2 \ldots\ldots \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$$

$$p_n = 2^{n+1}\left(\frac{2}{3}\right)^{0+1+2+\cdots+n}$$

$$p = 2^{n+1}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{(n+1)n}{2}}$$

.78 متتالية مقترحة رقم:04

الإسم على اليوتيوب: مواضيع مقترحة في الرياضيات في المتتاليات لبكالوريا 2019(عت+ر+تر) رقم 9

(u_n) متتالية معرفة بـ: $u_0 = -6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2n - 1$

1-أ-أحسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3

1-ب-برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 3$ أن: $u_n > 0$

1-جـ-اكتب u_n بدلالة u_{n-1} ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 4$ أن: $u_n > 2n - 3$

1-د-احسب نهاية المتتالية (u_n)

2-(v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = u_n + \alpha n + \beta$ حيث α و β عددان حقيقيان

2-أ-عين قيمة α و β حتى تكون (v_n) متتالية هندسية ، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

2-ب-اكتب v_n بدلالة n ثم أستنتج أن من أجل كل عدد طبيعي n أن: $u_n = 2^{2-n} + 4n - 10$

2-جـ-أحسب بدلالة n كل من:

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$
$$p_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n$$
$$T_n = \ln v_0 + \ln v_1 + \cdots + \ln v_n$$
$$H_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$
$$H'_n = u_0 + u_2 + u_4 + \cdots + u_{2n}$$

الحل

1-أ-حساب الحدود u_1 ، u_2 و u_3

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2n - 1$$
$$u_1 = \frac{1}{2}u_0 + 2(0) - 1 = -4$$
$$u_2 = \frac{1}{2}(-4) + 2 - 1 = -1$$
$$u_3 = \frac{1}{2}(-1) + 4 - 1 = \frac{5}{2}$$

1-ب-البرهان بالتراجع أنه من أجل $n \geq 3$: أن: $u_n > 0$

نسمي $p(n)$ الخاصية $u_n > 0$

من أجل $n = 3$ لدينا $u_3 = \frac{5}{6} > 0$ ومنه $p(3)$ محققة

نفرض أن $p(n)$محققة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 3$ أي $u_n > 0$ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي $u_{n+1} > 0$

لدينا من الفرضية $u_n > 0$ ومنه $\frac{1}{2}u_n > \frac{1}{2}(0)$

أي $\frac{1}{2}u_n > 0$ وكذلك لدينا $n \geq 3$

ومنه $2n \geq 2(3)$ أي $2n \geq 6$ أي $2n - 1 \geq 6 - 1$

ومنه $2n - 1 \geq 5 > 0$

ومنه $\frac{1}{2}u_n + 2n - 1 > 0$ ومنه $u_{n+1} > 0$

ومنه $p(n+1)$ محققة

إذن $u_n > 0$ من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 3$

1-جـ-كتابة u_n بدلالة u_{n-1}

لدينا $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2n - 1$

ومنه $u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + 2(n-1) - 1$

$$u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + 2n - 2 - 1$$
$$u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + 2n - 3$$

استنتاج من أجل $n \geq 4$ أن $u_n > 2n - 3$

لدينا: $u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + 2n - 3$

$$\frac{1}{2}u_{n-1} = u_n - 2n + 3$$

$u_{n-1} = 2u_n - 4n + 6$

لكن لدينا من البرهان بالتراجع أن $u_n > 0$

لما $n \geq 3$ ومنه $u_{n-1} > 0$ لما $n \geq 4$

ومنه $2u_n - 4n + 6 > 0$

$2u_n > 4n - 6$

$u_n > 2n - 3$ لما $n \geq 4$

1-د- حساب نهاية المتتالية (u_n)

لدينا $u_n > 2n - 3$

و $\lim_{n\to+\infty} (2n-3) = +\infty$

ومنه $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (باستعمال مبرهنة الحصر)

2-أ-تعيين قيمة α و β حتى تكون (v_n) م هندسية مع تعيين أساسها وحدها الأول

تكون (v_n) متتالية هندسية إذا وفقط إذا كان:

$v_{n+1} = v_n q$

$v_n = u_n + \alpha n + \beta$

$v_{n+1} = u_{n+1} + \alpha(n+1) + \beta$

$v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2n - 1 + \alpha n + \alpha + \beta$

ولدينا: $v_n = u_n + \alpha n + \beta$

$u_n = v_n - \alpha n - \beta$

ومنه

$v_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n - \alpha n - \beta) + 2n - 1 + \alpha n + \alpha + \beta$

$= \frac{1}{2}v_n - \frac{1}{2}\alpha n - \frac{1}{2}\beta + 2n - 1 + \alpha n + \alpha + \beta$

$= \frac{1}{2}v_n + \left(-\frac{\alpha}{2} + 2 + \frac{2}{2}\alpha\right)n - \frac{\beta}{2} - 1 + \alpha + \frac{2\beta}{2}$

$= \frac{1}{2}v_n + \left(\frac{\alpha}{2} + 2\right)n + \frac{\beta}{2} - 1 + \alpha$

تكون المتتالية (v_n) هندسية

إذا: $\left(\frac{\alpha}{2} + 2\right)n + \frac{\beta}{2} - 1 + \alpha = 0$

هام: -ينعدم كثير الحدود إذا انعدمت معاملات حدوده

ومنه $\frac{\alpha}{2} + 2 = 0 \Rightarrow \alpha = -4$

$\frac{\beta}{2} - 1 + \alpha = 0$

$\beta = 2(1-\alpha) = 2(1+4) = 10$

ومنه $\beta = 10$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ يجب ان تكون $\alpha = -4$ و $\beta = 10$

حساب حدها الأول v_0:

$v_n = u_n - 4n + 10$

$v_0 = u_0 - 4(0) + 10$

$= -6 + 0 + 10$

$v_0 = 4$

2-ب-كتابة v_n بدلالة n

$v_n = v_0 q^n$

$v_n = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$

استنتاج من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ أن:

$$u_n = 2^{2-n} + 4n - 10$$

لدينا $v_n = u_n - 4n + 10$

ومنه $u_n = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4n - 10$

$= 2^2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4n - 10$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4n - 10$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 4n - 10$

$= 2^{2-n} + 4n - 10$

2-ج- حساب S_n بدلالة n

S_n مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = 4$ ومنه

$S_n = v_0 \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-0+1}}{1-\frac{1}{2}}$

$S_n = 4\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}$

$S_n = 8\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

حساب p_n

$p_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$

لدينا $v_n = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$n = 0$ $\quad v_0 = 4\left(\frac{1}{2}\right)^0$

$n = 1$ $\quad v_1 = 4\left(\frac{1}{2}\right)^1$

.

.

$n = n$ $\quad v_n = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$

بالضرب طرفا لطرف نجد

$p_n = 4\left(\frac{1}{2}\right)^0 \times 4\left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \dots \times 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$p_n = 4 \times 4 \times \dots \times 4 \times \left[\left(\frac{1}{2}\right)^0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \dots \times \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$

$p_n = 4^{n+1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{1+2+3+\dots+n}$

$$p_n = 4^{n+1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}(n+1)}$$

حساب t_n بدلالة n:

$$t_n = \ln v_0 + \ln v_1 + \cdots + \ln v_n$$
$$t_n = \ln(v_0 \times v_0 \times ... \times v_n)$$
$$t_n = \ln(p_n)$$
$$t_n = \ln\left[4^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}(n+1)}\right]$$

حساب H_n بدلالة n

$$H_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

لدينا $u_n = v_n + 4n - 10$

(v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = 4$

أما $(4n - 10)$ متتالية حسابية أساسها $r = 4$ وحدها الأول -10

ومنه $H_n = S_n + \frac{n+1}{2}[-10 + 4n - 10]$

$$H_n = 8\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] + \frac{n+1}{2}[-10 + 4n - 10]$$
$$H_n = 8\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + (n+1)(2n - 10)$$

حساب H'_n بدلالة n

$$H'_n = u_0 + u_2 + \cdots + u_{2n}$$

لدينا $u_n = v_n + 4n - 10$

ومنه $u_{2n} = v_{2n} + 4(2n) - 10$

$$u_{2n} = v_{2n} + 8n - 10$$

و $v_n = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$

ومنه $v_{2n} = 4\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$

$$v_{2n} = 4\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

v_{2n} متتالية هندسية أساسها $q' = \frac{1}{4}$ وحدها الأول يساوي 4 و $(8n - 10)$ متتالية حسابية أساسها $r = 8$ وحدها الأول يساوي -10 ومنه H_n' هو عبارة عن مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية و متتالية حسابية حيث:

$$H'_n = 4\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}} + \frac{n+1}{2}(-10 + 8n - 10)$$
$$H'_n = \frac{16}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) + (n+1)(-10 + 4n)$$

79. متتالية مقترحة رقم:05

الإسم على اليوتيوب: مواضيع مقترحة في الرياضيات في المتتاليات باك 2018 (ع ت+ر+ت ر) رقم 10

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$u_0 = 1 \quad \text{و} \quad u_1 = 2$$
$$u_{n+2} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$$

I-(v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$v_n = u_{n+1} - u_n$$

1-برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

2-عبر عن (v_n) بدلالة n، مبينا أنه مهما كان n طبيعي فإن: $v_n > 0$

3-عين اتجاه تغير المتتالية (v_n) ثم برهن أنها متقاربة واحسب نهايتها

4-استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

5-احسب بدلالة n المجموع S_1 حيث:

$$S_1 = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$

ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n و احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

6-احسب بدلالة n المجاميع التالية:

$$S_2 = v_0^2 + v_1^2 + \cdots + v_n^2$$
$$S_3 = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_2} + \cdots + \frac{1}{v_n}$$
$$S_4 = \sqrt{v_0} + \sqrt{v_1} + \cdots + \sqrt{v_n}$$
$$S_5 = v_0 + v_2 + v_4 + \cdots + v_{2n}$$

7-احسب بدلالة n الجداء p_n حيث:

$$p_n = v_0 . v_1 . .... v_n$$

8-احسب بدلالة n المجموع S' :

$$S' = \ln(v_0) + \ln(v_1) + \cdots + \ln(v_n)$$

II-نعتبر المتتالية (W_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$$W_n = \ln(v_n)$$

أ-برهن ان (w_n) متتالية حسابية يطلب أساسها وحدها الأول

ب-عبر عن w_n بدلالة n واستنتج اتجاه تغيرها ثم احسب نهايتها

جـ-احسب المجموع S_n بدلالة n:

$$S_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$$

✍ الحل

I-1-تبيان أن (v_n) متتالية هندسية مع تعيين أساسها و حدها الأول v_0:

(v_n) متتالية هندسية إذا كان: $v_{n+1} = v_n q$

$$v_{n+1} = u_{n+1+1} - u_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1}$$

$$v_{n+1} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n - \frac{3u_{n+1}}{3}$$

$$v_{n+1} = \frac{4u_{n+1} - 3u_{n+1}}{3} - \frac{1}{3}u_n = \frac{1}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_{n+1} - u_n) = v_n.\frac{1}{3}$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$

-حساب v_0

$$v_n = u_{n+1} - u_n$$

$$v_0 = u_1 - u_0 = 2 - 1$$

$$v_0 = 1$$

I-2- التعبير عن v_n بدلالة n:

$v_n = v_p\ q^{n-p}$ مع $n \geq p$

ومنه: $v_n = v_0\ q^n$

ومنه: $v_n = 1.\left(\frac{1}{3}\right)^n$

ومنه: $v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

-البرهان بأن $v_n > 0$:

لدينا $\frac{1}{3} > 0$ ومنه $\left(\frac{1}{3}\right)^n > 0$

أي $v_n > 0$

I-3-تعيين اتجاه تغير المتتالية (v_n):

لدينا: $v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

و $v_{n+1} - v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{3}\right)^n$

$$v_{n+1} - v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{1}{3} - 1\right)$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^n\left(-\frac{2}{3}\right)$$

ومنه: $v_{n+1} - v_n = -\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n < 0$

لأن $-\frac{2}{3} < 0$

ومنه (v_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

-البرهان أن (v_n) متتالية متقاربة:

بما أن (v_n) متتالية متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد 0 (لأن $v_n > 0$) فإنها متقاربة

-حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$:

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$$

لأن $-1 < \frac{1}{3} < 1$

I-4-استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n):

لدينا: $v_n = u_{n+1} - u_n$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n = u_{n+1} - u_n$$

أي: $u_{n+1} - u_n > 0$

لأن: $\left(\frac{1}{3}\right)^n > 0$

ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

I-5- حساب S_1 بدلالة n:

$$S_1 = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$$

$$S_1 = v_0\left(\frac{1-q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}\right) = 1\left[\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-0+1}}{1-\frac{1}{3}}\right]$$

$$S_1 = \frac{\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)}{\frac{2}{3}}$$

ومنه: $S_1 = \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$

-استنتاج عبارة u_n بدلالة n:

$$v_n = u_{n+1} - u_n$$

ومن أجل قيم n

$n = 0$ ، $v_0 = u_1 - u_0$

$n = 1$ ، $v_1 = u_2 - u_1$

$n = 2$ ، $v_2 = u_3 - u_2$

.

.

$n = n - 1$ ، $v_{n-1} = u_n - u_{n-1}$

بالجمع طرفا لطرف نجد

$$v_0 + v_1 + v_2 + . + v_{n-1} = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + . + (u_n - u_{n-1})$$

$$= -u_0 + u_n$$

$$v_0 + v_1 + \cdots . + v_{n-1} = \frac{v_0(1 - q^{n-1+1})}{1-q}$$

$$= \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

ومنه $u_n = \frac{3}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] + u_0$

أي: $u_n = \frac{3}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] + 1$

- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

$$u_n = \frac{3}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] + 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]+1\right)$$

لدينا $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

ومنه $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{3}{2}+1 = \frac{5}{2}$

6-I-حساب بدلالة n المجاميع

-حساب S_2 بدلالة n

$$S_2 = v_0^2 + v_1^2 + \cdots + v_n^2$$

لدينا $v_n = v_0 q^n$

لدينا: من أجل قيم n

$n=0$ $v_0^2 = v_0^2$

$n=1$ $v_1^2 = (v_0 q)^2$

$n=2$ $v^2{}_2 = (v_0 q^2)^2$

.

.

$n=n$ $v_n^2 = (v_0 q^n)^2$

بالجمع طرفا لطرف

$$S_2 = v_0^2 + (v_0 q)^2 + (v_0 q^2)^2 + \cdots + (v_0 q^n)^2$$
$$= v_0^2 + v_0^2 q^2 + v_0^2 (q^2)^2 + \cdots + v_0^2 (q^n)^2$$
$$S_2 = v_0{}^2(1 + q^2 + (q^2)^2 + \cdots .(q^n)^2)$$

لدينا $v_0 = 1$

$$S_2 = 1^2[1 + q^2 + (q^2)^2 + \cdots .(q^n)^2]$$

و $1 + q^2 + (q^2)^2 + \cdots .(q^n)^2$ حدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها $q' = q^2$

ومنه $S_2 = 1\frac{1-(q^2)^{n+1}}{1-q^2} = \frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{9}}$

ومنه $S_2 = \frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}}{\frac{8}{9}}$

ومنه $S_2 = \frac{9}{8}\left(1-\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}\right)$

-حساب S_3 بدلالة n:

$$S_3 = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \cdots + \frac{1}{v_n}$$

لدينا $v_n = v_0 q^n$

ومنه أجل $n = 0$ $\frac{1}{v_0} = \frac{1}{v_0}$

$n=1$ $\frac{1}{v_1} = \frac{1}{v_0 q^1}$

$n=2$ $\frac{1}{v_2} = \frac{1}{v_0 q^2}$

.

.

$n=n$ $\frac{1}{v_n} = \frac{1}{v_0 q^n}$

ومنه $S_3 = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_0 q^1} + \frac{1}{v_0 q^2} + \cdots + \frac{1}{v_0 q^n}$

$$S_3 = \frac{1}{v_0}\left(1 + \frac{1}{q^1} + \frac{1}{q^2} + \cdots + \frac{1}{q^n}\right)$$

ولدينا $q = \frac{1}{3}$ و $v = 1$

ومنه $S_3 = 1\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} + \cdots + \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^n}\right)$

$$S_3 = 1 + 3 + 3^2 + \cdots 3^n$$

ومنه $S_3 = 1\left(\frac{1-3^{n+1}}{1-3}\right) = -\frac{1}{2}(1-3^{n+1})$

لأن $\left(1 + \frac{1}{q^1} + \frac{1}{q^2} + \cdots + \frac{1}{q^n}\right)$ حدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها $q' = 3$ وحدها الأول 1)

ومنه $S_3 = \frac{1}{2}(3^{n+1}-1)$

-حساب S_4 بدلالة n

$$S_4 = \sqrt{v_0} + \sqrt{v_1} + \cdots + \sqrt{v_n}$$

لدينا $v_n = v_0 q^n$

ومنه لما $n = 0$ $\sqrt{v_0} = \sqrt{v_0}$

$n = 1$ $\sqrt{v_1} = \sqrt{v_0 q^1}$

$n = 2$ $\sqrt{v_2} = \sqrt{v_0 q^2}$

.

.

$n = n$ $\sqrt{v_n} = \sqrt{v_0 q^n}$

ومنه $S_4 = \sqrt{v_0} + \sqrt{v_0 q^1} + \sqrt{v_0 q^2} + \cdots + \sqrt{v_0 q^n}$

$$S_4 = \sqrt{v_0}\left(1 + \sqrt{q^1} + \sqrt{q^2} + \cdots . + \sqrt{q^n}\right)$$

لدينا $\left(1 + \sqrt{q^1} + \sqrt{q^2} + \cdots . + \sqrt{q^n}\right)$ حدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها $q'' = \sqrt{q}$

أي $q'' = \sqrt{\frac{1}{3}}$

ومنه $S_4 = \frac{1-\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^{n+1}}{1-\sqrt{\frac{1}{3}}}$

-حساب S_5 بدلالة n

$$S_5 = v_0 + v_2 + v_4 + \cdots + v_{2n}$$

لدينا $v_n = v_0 q^n$

ومنه $v_{2n} = v_0 q^{2n} = v_0 q^n \times q^n$

وعليه $v_{2n} = v_n q^n$

من أجل $n = 0$ $v_0 = v_0$

$n = 1$ $v_2 = v_1 q^1 = v_0 q q$

$n = 2$ $v_4 = v_2 q^2 + v_0 q^2 q^2$

.

.

.

$n = n$ $v_{2n} = v_n q^n = v_0 q^n q^n$

ومنه بالجمع طرفا لطرف يصبح

$S_5 = v_0 + v_0qq + v_0q^2q^2 + \cdots + v_0q^nq^n$

ومنه: $S_5 = v_0(1 + qq + q^2q^2 + \cdots + q^nq^n)$

$S_5 = v_0[1 + q^2 + q^4 + \cdots + q^{2n}]$

لدينا $[1 + q^2 + q^4 + \cdots + q^{2n}]$ حدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها q^2 وحدها الأول 1 ومنه

$$S_5 = 1\left[\frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{9}}\right]$$

$$S_5 = \frac{9}{8}\left(1-\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}\right)$$

I-7-حساب p_n بدلالة n

$p_n = v_0v_1 \dots v_n$

لدينا $v_n = v_0q^n$

ومنه $p_n = v_0v_0q^1 \times v_0q^2 \times \dots \times v_0q^n$

ومنه $p_n = v_0^{n+1}\, q^{1+2+3+\cdots+n}$

لدينا $(1+2+3+\cdots n)$ حدود متتابعة لـ متتالية حسابية أساسها 1

$$p_n = 1^{n+1}.\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n-1+1}{2}[1+n]}$$

ومنه $p_n = 1\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{2}(1+n)}$

I-8-حساب بدلالة n المجموع S'

$S' = \ln(v_0) + \ln(v_1) + \cdots + \ln(v_1)$

لدينا $s'_n = \ln v_0 + \ln v_1 + \cdots + \ln v_n$

ومنه $S'n = \ln(v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n)$

ومنه $S'_n = \ln(p_n) = \ln\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{2}(n+1)}\right)$

ومنه $S'_n = \frac{n}{2}(n+1)\ln\frac{1}{3}$

II-أ-البرهان أن (w_n) متتالية حسابية

$w_n = \ln(v_n)$

لدينا $w_{n+1} = \ln(v_{n+1}) = \ln(v_nq)$

ومنه $w_{n+1} = \ln v_n + \ln q = \ln v_n + \ln\left(\frac{1}{3}\right)$

ومنه $w_{n+1} = w_n + \ln\left(\frac{1}{3}\right)$

ومنه (w_n) متتالية حسابية أساسها $r = \ln\frac{1}{3}$

أي: $r = -\ln 3$

حساب w_0

$w_0 = \ln v_0 = \ln 1 = 0$

II-ب-التعبير عن w_n بدلالة n

لدينا $w_n = w_p + (n-p)r$

ومنه $w_n = w_0 + (n-0)r$

أي $w_n = w_0 + nr$

ومنه $w_n = 0 + n(-\ln 3)$

أي $w_n = -n\ln 3$

استنتاج تغير المتتالية (w_n)

(w_n) متتالية حسابية أساسها $r = -\ln 3$

و $-\ln 3 < 0$ ومنه (w_n) متناقصة تماما

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} -n\ln 3 = -\infty$$

II-جـ-حساب المجموع S_n بدلالة n

$S_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$

$S_n = \frac{n-0+1}{2}[w_0 + w_n]$

$S_n = \frac{n+1}{2}[0 - n\ln 3]$

أي $S_n = \frac{n+1}{2}[-n\ln 3]$

80. متتالية مقترحة رقم:06

الإسم على اليوتيوب: مواضيع مقترحة في الرياضيات في المتتاليات باك 2018 (ع ت+ر+ت ر) رقم 14

نعتبر متتالية الاعداد الحقيقية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$u_0 = -1$

$u_1 = \frac{1}{2}$

$u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$

1-احسب u_2 واستنتج أن (u_n) ليست حسابية ولا هندسية

2-نعرف من اجل كل عدد طبيعي n، المتتالية (v_n) بـ: $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$

2-أ-احسب v_0

2- ب-عبر عن v_{n+1} بدلالة v_n

2-جـ- استنتج أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

2-د-عبر عن v_n بدلالة n

3-نعرف من أجل كل عدد طبيعي n، المتتالية (w_n) بـ: $w_n = \frac{u_n}{v_n}$

3-أ-احسب w_0

3-ب-باستعمال المساواة $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$، عبر عن w_{n+1} بدلالة u_n و v_n

3-جـ-استنتج انه من أجل كل عدد طبيعي n،

$w_{n+1} = w_n + 2$

ثم عبر عن w_n بدلالة n

4-بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$

5) من اجل كل عدد طبيعي n نضع

$$S_n=\sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0+u_1+u_2+\dots+u_n$$

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n

$$S_n = 2-\frac{2n+3}{2^n}$$

الحل

1. حساب u_2

لدينا: $u_{n+2}=U_{n+1}-\frac{1}{4}u_n$

ومنه: $u_{0+2}=U_{0+1}-\frac{1}{4}u_0$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(-1)=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

$$u_2=\frac{3}{4}$$

استنتاج أن (u_n) ليست حسابية ولا هندسية

حتى تكون (u_n) ليست حسابية يكفي أن يكون

$$u_1-u_0\neq u_2-u_1$$

ولدينا $u_1-u_0=\frac{1}{2}-(-1)=\frac{3}{2}$

$$u_2-u_1=\frac{3}{4}-\frac{2}{4}=\frac{1}{4}$$

ومنه $\frac{3}{2}\neq\frac{1}{4}$ (u_n) ليست حسابية

وحتى تكون (u_n) ليست هندسية يكفي أن يكون

$$\frac{u_1}{u_0}\neq\frac{u_2}{u_1}$$

لدينا $\frac{u_1}{u_0}=\frac{\frac{1}{2}}{-1}=-\frac{1}{2}$

$$\frac{u_2}{u_1}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}\times\frac{2}{1}=\frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{2}\neq-\frac{1}{2}$$

ومنه (u_n) ليست هندسية

ملاحظة: إذا كان $\frac{u_1}{u_0}=\frac{u_2}{u_1}$ هذا لا يعني أن (u_n) هندسية وإذا كان $u_1-u_0=u_2-u_1$ لا يعني أن (u_n) حسابية

2-أ-حساب v_0

لدينا $v_n=u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n$

$$v_0=u_{0+1}-\frac{1}{2}u_0=u_1-\frac{1}{2}u_0$$

$$v_0=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(-1)=1$$

2-ب -التعبير عن v_{n+1} بدلالة v_n

لدينا $v_{n+1}=u_{n+1+1}-\frac{1}{2}u_{n+1}$

$$v_{n+1}=u_{n+2}-\frac{1}{2}u_{n+1}\dots\dots(1)$$

$$u_{n+2}=u_{n+1}-\frac{1}{4}u_n\dots\dots(2)$$

بتعويض (2) في (1) نجد

$$v_{n+1}=u_{n+1}-\frac{1}{4}u_n-\frac{1}{2}u_{n+1}$$

$$=\frac{1}{2}u_{n+1}-\frac{1}{4}u_n$$

$$v_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n\right)$$

$$=\frac{1}{2}v_n$$

2-جـ-استنتاج أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

بما أن $v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$

هذا يعني أن (v_n) متتالية هندسية أساها $q=\frac{1}{2}$

2-د-التعبير عن v_n بدلالة n

نعلم أن (v_n) هندسية ومنه $v_n=v_0q^n$

مع $v_0=1$ و $q=\frac{1}{2}$

$$v_n=1\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$v_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

3-أ-حساب w_0

$$w_0=\frac{u_0}{v_0}=\frac{-1}{1}=-1$$

3-ب- التعبير عن w_{n+1} بدلالة u_n و v_n باستعمال المساواة $u_{n+1}=v_n+\frac{1}{2}u_n$

لدينا $w_n=\frac{u_n}{v_n}$

ومنه $w_{n+1}=\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}$

ولدينا $v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$

$$w_{n+1}=\frac{v_n+\frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n}$$

$$=\frac{v_n}{\frac{1}{2}v_n}+\frac{\frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n}$$

$$w_{n+1}=2+\frac{u_n}{v_n}$$

3-جـ-استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$w_{n+1} = w_n + 2$$

لدينا $w_n = \frac{u_n}{v_n}$ و $w_{n+1} = 2 + \frac{u_n}{v_n}$

ومنه $w_{n+1} = 2 + w_n$

التعبير عن w_n بدلالة n

لدينا من السؤال السابق $w_{n+1} = w_n + 2$

$w_{n+1} - w_n = 2 \ldots (1)$

من (1)نستنتج أن (w_n) متتالية حسابية

أساسها $r = 2$

عبارة الحد العام لمتتالية حسابية هو

$w_n = w_0 + (n-0)r$

ولدينا $w_0 = -1$

ومنه $w_n = -1 + 2n$

4-البرهان أن $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$

لدينا $w_n = \frac{u_n}{v_n}$ أي $u_n = w_n \cdot v_n$

مما سبق نجد أن $w_n = 2n - 1$

و $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$

$u_n = (2n-1) \times \frac{1}{2^n}$

$u_n = \frac{2n-1}{2^n}$

5-البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n

$$S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$$

-نسمي $p(n)$ الخاصية $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$

-من أجل $n = 0$ يكون S_n كالتالي

$S_0 = 2 - \frac{2(0)+3}{2^0} = 2 - \frac{3}{1} = -1$

ولدينا $S_0 = u_0 = -1$ ومنه $p(0)$ محققة من أجل $n = 0$

-نفرض أن $p(n)$ محققة من أجل $n \geq 0$

أي $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$

-ونبرهن أن $p(n+1)$ محققة

أي $S_{n+1} = 2 - \frac{-2(n+1)+3}{2^{n+1}}$

لدينا

$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{k=n+1} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n + u_{n+1}$

ومنه $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$

ولـ الفرضية أن

$S_{n+1} = 2 - \frac{2n+3}{2^n} + u$

ولد $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$ من $u_{n+1} = \frac{2(}{}$

معناه بالتعويض نجد

$S_{n+1} = 2 - \frac{2n+3}{2^n} + \frac{2(n+1)-1}{2^{n+1}}$

$= 2 - \frac{(2n+3)2}{2^n \times 2} + \frac{2(n+1)-1}{2^{n+1}}$

$= 2 + \frac{-2n-5}{2^{n+1}}$

$= 2 - \frac{2n+5}{2^{n+1}}$

$= 2 - \frac{2n+2+3}{2^{n+1}}$

$= 2 - \frac{2(n+1)+3}{2^{n+1}}$

معناه $p(n+1)$ محققة

إذن $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$ من أجل كل عدد طبيعي n

81. متتالية مقترحة رقم:07

الإسم على اليوتيوب: مواضيع مقترحة في الرياضيات في المتتاليات لبكالوريا 2017 (ع ت+ر+ت ر)رقم 8

-نعتبر المتتالية (u_n) متتالية عددية معرفة بـ:

$u_0 = 1$

$u_1 = 2$

$u_{n+1} = 2\alpha u_n + 3\alpha^2 u_{n-1} \quad n \in \mathbb{N}^*$

حيث α عدد حقيقي من المجموعة $]-1;1[-\{0\}$

نضع ومن أجل كل عدد طبيعي n:

$$v_n = u_{n+1} - 3\alpha u_n$$

1-أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول بدلالة α.

2-هل المتتالية (v_n) متقاربة؟

3-أحسب بدلالة α و n المجموع:

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$

4-عين قيمة العدد الحقيقي α علما أن $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{3}{4}$.

-استنتج عندئذ u_n بدلالة n ثم بيّن أنّ (u_n) متقاربة.

5-في كل ما يلي نضع: $\alpha = -\frac{1}{3}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $\pi_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n$

5-أ-بين أن: $\pi_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n^2-n-2}{2}}$

5-ب-عين أصغر عدد طبيعي n حتى يكون: $\pi_n \leq 3^{-44}$

الحل

1-البرهان أن (v_n) متتالية هندسية:

تكون (v_n) متتالية هندسية إذا كان $v_{n+1} = v_n q$

لدينا $v_n = u_{n+1} - 3\,\alpha u_n$

$(2)......v_{n+1} = u_{n+2} - 3\alpha\, u_{n+1}$

ولدينا $u_{n+1} = 2\,\alpha u_n + 3\,\alpha^2 u_{n-1}$

ومنه $(1)....\ u_{n+2} = 2\,\alpha u_{n+1} + 3\,\alpha^2 u_n$

بالتعويض (1) في (2) نجد

$$v_{n+1} = 2\,\alpha u_{n+1} + 3\,\alpha^2 u_n - 3\,\alpha u_{n+1}$$
$$v_{n+1} = -\alpha u_{n+1} + 3\,\alpha^2 u_n$$
$$v_{n+1} = -\alpha(u_{n+1} - 3\,\alpha u_n)$$

ومنه $v_{(n+1)} = -\alpha v_n$

معناه: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = -\alpha$

وحدها الأول v_0

$$v_0 = u_1 - 3\,\alpha u_0 = 2 - 3\,\alpha(1)$$
$$v_0 = 2 - 3\,\alpha$$

2-معرفة إذا كانت المتتالية (v_n) متتالية متقاربة:

بما أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = -\alpha$ مع $\alpha \in]-1;0[\cup]0;1[$

إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}(-\alpha)^n = 0$ معناه $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

ومنه المتتالية (v_n) متقاربة نحو 0

3-حساب المجموع S_n بدلالة α و n

S_n هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها

$$q = -\alpha$$

ومنه
$$S_n = \frac{v_0(q^{n+1}-1)}{q-1}$$
$$= (2 - 3\,\alpha)\frac{(-\alpha)^{n+1}-1}{-\alpha-1}$$
$$= (2 - 3\,\alpha)\frac{(-\alpha)^{n+1}-1}{-(\alpha+1)}$$
$$= \frac{3\,\alpha-2}{\alpha+1}\left((-\alpha)^{n+1} - 1\right)$$

4-تعيين قيمة العدد α حيث $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{3}{4}$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(3\,\alpha-2)}{\alpha+1}\right)\left((-\alpha)^{n+1}-1\right)$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3\,\alpha-2}{\alpha+1}\right)(-\alpha)^{n+1} - \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3\,\alpha-2}{\alpha+1}\right)$$

لدينا $-1 < -\alpha < 1$ معناه $\lim\limits_{n\to+\infty}(-\alpha)^{n+1} = 0$

ومنه

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} -\left(\frac{(3\,\alpha-2)}{\alpha+1}\right)$$
$$= \lim_{n\to+\infty} -\left(\frac{(3\,\alpha-2)}{\alpha+1}\right)$$
$$= \frac{2-3\,\alpha}{\alpha+1}$$

ولدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{3}{4}$

معناه $\frac{2-3\,\alpha}{\alpha+1} = \frac{3}{4}$

$$(2-3\,\alpha)4 = 3(\alpha+1)$$
$$8 - 12\,\alpha = 3\,\alpha + 3$$
$$15\,\alpha = 5$$
$$\alpha = \frac{1}{3}$$

استنتاج u_n بدلالة n حيث $\alpha = \frac{1}{3}$

لدينا
$$v_n = u_{n+1} - 3\,\alpha u_n$$
$$v_n = u_{n+1} - 3\left(\frac{1}{3}\right)u_n$$
$$= u_{n+1} - u_n$$

ولدينا $S_n = \left(\frac{3\,\alpha-2}{\alpha+1}\right)\left((-\alpha)^{n+1} - 1\right)$

مع $\alpha = \frac{1}{3}$

فإن
$$S_n = \left(\frac{3\left(\frac{1}{3}\right)-2}{\frac{1}{3}+1}\right)\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1\right)$$
$$= \left(\frac{1-2}{\frac{4}{3}}\right)\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1\right)$$
$$S_n = -\frac{3}{4}\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1\right)$$

كما نلاحظ أن

$$v_0 = u_1 - u_0$$
$$v_1 = u_2 - u_1$$
$$v_2 = u_3 - u_2$$
$$\vdots$$
$$v_n = u_{n+1} - u_n$$

و بالجمع طرفا لطرف نجد

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = -u_0 + u_{n+1}$$

ومنه $u_{n+1} = S_n + u_0$

$$u_{n+1} = -\frac{3}{4}\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1\right) + 1$$
$$= -\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \frac{3}{4} + 1$$
$$= -\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \frac{7}{4}$$

ومنه مهما كان $n \in \mathbb{N}$ فإن $u_n = -\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{7}{4}$

بيان أن (u_n) متقاربة

لدينا $u_n = -\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{7}{4}$

نعلم أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$ لأن $-\ldots -\frac{1}{3} < 1$

معناه $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{7}{4}\right) = \frac{7}{4}$

ومنه (u_n) متتالية متقاربة نحو $\frac{7}{4}$

5-أ-بيان أن $\pi_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n^2-n-2}{2}}$

لدينا $v_n = (2-3\alpha)(-\alpha)^n$

بما أن $\alpha = -\frac{1}{3}$ و $v_0 = 2-3\alpha$

فإن $v_0 = 3$ و $v_n = \left[2-3\left(-\frac{1}{3}\right)\right]\left(\frac{1}{3}\right)^n$

ومنه $v_n = 3\left(\frac{1}{3}\right)^n$

لدينا $\pi_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$

معناه $\pi_n = 3\left(\frac{1}{3}\right)^1 \times 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \dots \times 3\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$$\pi_n = 3^{n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \dots \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$= 3^{n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{1+2+\dots+n}$$

$$\pi_n = 3^{n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{2}(n+1)}$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^{-n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{2}(n+1)}$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^{-n-1+\frac{n+n^2}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{-2n-2+n+n^2}{2}}$$

$$\pi_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n^2-n-2}{2}}$$

5-ب-تعيين أصغر عدد طبيعي n حتى يكون $\pi_n \le 3^{-44}$

$$\pi_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n^2-n-2}{2}} = 3^{-\left(\frac{n^2-n-2}{2}\right)}$$

$$3^{-\left(\frac{n^2-n-2}{2}\right)} \le 3^{-44}$$

معناه $-\left(\frac{n^2-n-2}{2}\right) \le -44$

$$n^2-n-2 \ge 88$$

$$n^2-n-90 \ge 0$$

ندرس إشارة n^2-n-90

$$\Delta = 1-4(1)(-90)$$

$$\Delta = 361$$

$$\sqrt{\Delta} = 19$$

$$n_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{1+19}{2} = 10$$

$$n_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{1-19}{2} = -9$$

ومنه $n^2-n-90 = (n+9)(n-10)$

لدينا $n+9>0$ لأنّ $n \in \mathbb{N}$

ومنه

$n^2-n-90 = 0 \Rightarrow n-10 = 0 \Rightarrow n = 10$

ومنه أصغر عدد طبيعي n يحقق الشرط هو $n = 10$

82. متتالية مقترحة رقم:08

الإسم على اليوتيوب: مواضيع مقترحة في الرياضيات في المتتاليات لبكالوريا2017 (ع ت+ر+ت ر) رقم 2

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي: $u_1 = \frac{1}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n:

$$u_{n+1} = \frac{n}{4(n+1)}u_n$$

1-أ-احسب u_2 و u_3

1-ب-برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $u_n > 0$

1-جـ-ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متتالية متقاربة واحسب نهايتها

2-نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $v_n = n2^n u_n$

2-أ-بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_1

2-ب-اكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n، ثم أثبت صحة تقارب المتتالية (u_n)

3-أ-احسب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n$$

3-ب-احسب بدلالة n الجداء p_n حيث:

$$p_n = u_1 \times (2u_2) \times (3u_3) \times \dots \times (nu_n)$$

الحل

1-أ-حساب u_2 و u_3

لدينا: $u_1 = \frac{1}{4}$ و $u_{n+1} = \frac{n}{4(n+1)}u_n$

ومنه $u_{1+1} = u_2 = \frac{1}{4(1+1)}u_1 = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4}$

ومنه $u_2 = \frac{1}{32}$

بنفس الطريقة نجد $u_3 = \frac{1}{192}$

1-ب-البرهان أن $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n > 0$

البرهان بالتراجع: نسمي $P(n)$ الخاصية $u_n > 0$

من أجل $n=1$ لدينا $u_1=\frac{1}{4}>0$ ومنه $P(1)$ محققة

نفرض أن $P(n)$ محققة أي $u_n>0$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي $u_{n+1}>0$

لدينا (1) ..... $u_n>0$ من الفرضية

ولدينا (2) ..... $\frac{n}{4(n+1)}>0$ لأن: $n\in\mathbb{N}^*$

نضرب (1) في(2) نجد $\frac{n}{4(n+1)}u_n>0$ ومنه $u_{n+1}>0$

أي $p(n+1)$ محققة

ومنه نستنتج أن $u_n>0$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$

1-جـ-دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n)

لدينا $u_n>0$

ولدينا
$$u_{n+1}-u_n=\frac{n}{4(n+1)}u_n-u_n$$
$$=u_n\left(\frac{n}{4(n+1)}-1\right)$$
$$=u_n\left[\frac{-3n-4}{4n+4}\right]$$

ولدينا $\frac{-3n-4}{4n+4}<0$ و $u_n>0$

ومنه $u_{n+1}-u_n\leq 0$

أي المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}^*$

استنتاج أنها متتالية متقاربة

بما أن (u_n) متتالية متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد 0 لأن $(u_n>0)$ فهي متقاربة نحو نهاية l

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

لأن (u_n) متقاربة نحو نهاية l فإن
$$\lim_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim_{n\to+\infty}u_n=l$$

ومنه
$$l-\frac{n}{4n+1}l=0$$
أي
$$l\left(1-\frac{n}{4n+1}\right)=0$$
$$l\left(\frac{3n+1}{4n+1}\right)=0$$
لاحظ أن
$$\frac{(3n+1)}{4n+1}\neq 0$$
ومنه
$$l=0$$
أي
$$\lim_{n\to+\infty}u_n=0$$

2-أ-تبيان أن (v_n) متتالية هندسية مع تعيين أساسها q و v_1

لدينا
$$v_{n+1}=(n+1)2^{n+1}u_{n+1}$$
$$=(n+1)2^n.\frac{2n}{4(n+1)}u_n$$
ومنه
$$=n2^nu_n\frac{n+1}{4(n+1)}.2$$
$$v_{n+1}=v_n\frac{1}{2}$$

$$v_{n+1}=v_nq$$

ومنه (v_n) م هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$

وحدها الأول v_1
$$v_n=n2^nu_n$$
$$v_1=1\times 2^1u_1$$
ومنه
$$v_1=\frac{1}{2}$$

2-ب-كتابة كل من v_n و u_n بدلالة n

كتابة v_n بدلالة n
$$v_n=v_1q^{n-1}$$
$$v_n=\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$v_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

تعيين u_n بدلالة n

لدينا
$$v_n=n2^nu_n$$
ومنه
$$u_n=\frac{v_n}{n2^n}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n2^n}$$
$$u_n=\frac{1}{n}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{2^n}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n$$
$$=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

اثبات صحة تقارب المتتالية (u_n)

لدينا
$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$
لدينا
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$$
و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}=0$ لأن $-1<\frac{1}{2}<1$

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$

ومنه المتتالية (u_n) متقاربة نحو العدد **0**

3-أ-حساب S_n بدلالة n
$$S_n=v_1+v_2+v_3+\cdots+v_n$$
مجموع متتالية هندسية ومنه
$$S_n=v_1\frac{q^{n-1+1}-1}{q-1}$$
أي
$$S_n=\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{-\frac{1}{2}}$$
ومنه
$$S_n=-\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n-1\right]=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

3-ب-حساب الجداء p_n بدلالة n.
$$p_n=u_1\times 2u_2\times 3u_3\times\ldots\times nu_n$$
لدينا $v_n=n2^nu_n$

ومنه $nu_n = \frac{v_n}{2^n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$nu_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

لدينا من أجل $n = 1$ $\quad u_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$n = 2$ $\quad 2u_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^4$

$n = 3$ $\quad 3u_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^6$

.

.

$n = n$ $\quad nu_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

بالضرب العمودي نجد:

$$p_n = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 \ldots \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

$$p_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{2+4+6+8+\cdots+2n}$$

$(2+4+6+8+\cdots+2n)$ هو مجموع متتالية حسابية (T_n) أساسها $r = 2$ وحدها الأول $t_1 = 0$

ومنه $\quad p_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}(2+2n)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n(n+1)}$

83. متتالية مقترحة رقم:09

الإسم على اليوتيوب: مواضيع مقترحة في الرياضيات في المتتاليات لبكالوريا 2019(عت+ر+تر) رقم 6

I-(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول: $u_0 = 1$

ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{5u_n+2}{u_n+4}$

1-عين قيمة العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون:

$$u_{n+1} = a + \frac{b}{(u_n+4)}$$

2-برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$1 \le u_n \le 2$$

3-ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة

4-أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

II-نضع من أجل كل عدد طبيعي n، المتتالية (v_n) المعرفة بـ: $v_n = \frac{u_n-2}{u_n+\alpha}$ حيث: $\alpha \in \mathbb{R}^*$

1-عين قيمة α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0. ثم استنتج أنها متقاربة

2-اكتب v_n بدلالة n، ثم u_n بدلالة n، احسب مرة أخرى $\lim_{n\to+\infty} u_n$

3-أحسب بدلالة n المجموع S_n:

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$

4-أحسب بدلالة n المجموع S'_n:

$$S'_n = \frac{1}{(u_0+1)^2} + \frac{1}{(u_1+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(u_n+1)^2}$$

الحل

I -1- تعيين قيمة a و b بحيث يكون

$$u_{n+1} = a + \frac{b}{u_n+4}$$

ط1: لدينا $\quad u_{n+1} = \frac{5u_n+2}{u_n+4}$

$$u_{n+1} = \frac{5u_n+20-20+2}{u_n+4}$$

$$u_{n+1} = \frac{5(u_n+4)}{u_n+4} - \frac{18}{u_n+4}$$

$$u_{n+1} = 5 - \frac{18}{u_n+4}$$

ومنه $a = 5$ $\quad b = -18$

ط2: لدينا

$$a + \frac{b}{u_n+4} = \frac{a(u_n+4)+b}{u_n+4}$$

$$a + \frac{b}{u_n+4} = \frac{au_n+4a+b}{u_n+4}$$

بالمطابقة مع $u_{n+1} = \frac{5u_n+2}{u_n+4}$

نجد أن $a = 5$

$4a + b = 2 \Rightarrow \; b = 2 - 4(5) \Rightarrow b = -18$

I-2-البرهان بالتراجع أن $1 \le u_n \le 2$

نسمي $p(n)$ الخاصية $1 \le u_n \le 2$

من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = 1$ و $1 \le 1 \le 2$

ومنه $p(0)$ محققة

نفرض أن $p(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n

أي $1 \le u_n \le 2$ ونبرهن صحة $p(n+1)$

أي $1 \le u_{n+1} \le 2$

لدينا من الفرض $1 \le u_n \le 2$

و $u_{n+1} = 5 - \frac{18}{u_n+4}$

ومنه $5 \le u_n + 4 \le 6$

$$-\frac{18}{5} \le \frac{-18}{u_n+4} \le -\frac{18}{6}$$

$$5 + -\frac{18}{5} \le 5 - \frac{18}{u_n+4} \le 5 - \frac{18}{6}$$

$$1 \le \frac{7}{5} \le u_{n+1} \le \frac{12}{6}$$

$$1 \le u_{n+1} \le 2$$

ومنه $p(n+1)$ محققة أي $1 \le u_n \le 2$

إذن $1 \le u_n \le 2$ من أجل كل عدد طبيعي n

I-3- دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n)

ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{5u_n + 2}{u_n + 4} - u_n$$

$$= \frac{5u_n + 2 - u_n^2 - 4u_n}{u_n + 4}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + u_n + 2}{u_n + 2}$$

نحل المعادلة من الدرجة الثانية

$$-u_n^2 + u_n + 2 = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = 3$$

$$u_{n1} = 2 \qquad u_{n2} = -1$$

ومنه $-u_n^2 + u_n + 2 = -(u_n - 2)(u_n + 1)$

أي $u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n-2)(u_n+1)}{u_n+2}$

لدينا $1 \le u_n \le 2$ ومنه $-(u_n - 2) \ge 0$

وبالتالي $-\frac{(u_n-2)(u_n+1)}{u_n+2} \ge 0$

أي $u_{n+1} - u_n \ge 0$

وبالتالي (u_n) متتالية متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

- **استنتاج أن (u_n) متقاربة**

بما أن (u_n) متتالية متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 2 لأن $1 \le u_n \le 2$ فهي متقاربة نحو نهاية l

I-4- حساب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

بما أن (u_n) متقاربة نحو نهاية l فإن

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = l$$

ولدينا $u_{n+1} = \frac{5u_n+2}{u_n+4}$

نحل المعادلة $l = \frac{5l+2}{l+4}$

$$\frac{5l+2}{l+4} - l = 0$$

$$\frac{5l + 2 - l^2 - 4l}{l+4} = 0$$

$$-l^2 + l + 2 = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = 3$$

$l_1 = 2$ مقبول

$l_2 = -1 < 1$ مرفوض لأن $1 < u_n$ و

ومنه $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$

II-1- تعيين قيمة α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية

تكون (v_n) هندسية إذا وفقط إذا كان $v_{n+1} = v_n \times q$

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} + \alpha} = \frac{\frac{5u_n+2}{u_n+4} - 2}{\frac{5u_n+2}{u_n+4} + \alpha}$$

$$v_{n+1} = \frac{\frac{5u_n + 2 - 2u_n - 8}{u_n+4}}{\frac{5u_n + 2 + \alpha u_n + 4\alpha}{u_n+4}}$$

$$v_{n+1} = \frac{3u_n - 6}{(5+\alpha)u_n + 4\alpha + 2}$$

$$u_{n+1} = \frac{3}{5+\alpha} \times \frac{u_n - 2}{u_n + \frac{4\alpha+2}{5+\alpha}}$$

تكون (v_n) متتالية هندسية إذا كان $\alpha = \frac{4\alpha+2}{5+\alpha}$

$$\frac{4\alpha+2}{5+\alpha} - \alpha = 0$$

$$\frac{-\alpha^2 - \alpha + 2}{5+\alpha} = 0$$

$$-\alpha^2 - \alpha + 2 = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = 3$$

$$\alpha_2 = -2 \qquad \alpha_1 = 1$$

1- إذا كان $\alpha = -2$

$$v_{n+1} = \frac{3}{5-2} \cdot \frac{u_n - 2}{u_n + \frac{-8+2}{5-2}}$$

$$v_{n+1} = \frac{3u_n - 2}{3u_n - 2} = 1$$

(v_n) متتالية ثابتة أي $\alpha = -2$ مرفوض

2- إذا كان $\alpha = 1$

$$v_{n+1} = \frac{3}{5+1} \cdot \frac{u_n - 2}{u_n + \frac{4+2}{5+1}}$$

$$v_{n+1} = \frac{3}{6} \cdot \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$$

ومنه تكون (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$

اذا كان $\alpha = 1$

- حساب v_0

$$v_0 = \frac{u_0 - 2}{u_0 + 1} = -\frac{1}{2}$$

استنتاج أنها متقاربة

بما أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$

و $-1<\frac{1}{2}<1$

فإن (v_n) متتالية متقاربة نحو 0

II-2- كتابة v_n بدلالة n

$$v_n = v_0.q^n = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

-كتابة u_n بدلالة n

$$v_n = \frac{u_n-2}{u_n+1}$$
$$v_n(u_n+1) = u_n-2$$
$$v_nu_n+v_n-u_n=-2$$
$$u_n(v_n-1) = -2-v_n$$
$$u_n = \frac{-2-v_n}{v_n-1}$$
$$u_n = \frac{v_n+2}{1-v_n}$$
$$u_n = \frac{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n+2}{1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

-حساب النهاية مرة أخرى

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n+2}{1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

لدينا $-1<\frac{1}{2}<1$ أي $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$

ومنه $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{1}=2$

II-3- حساب S_n بدلالة n

S_n مجموع متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول

$$v_0=-\frac{1}{2}$$

$$S_n = v_0\frac{(1-q^{n+1})}{1-q} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right)$$

$$v_0 = -\frac{1}{2}\frac{\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}{\frac{1}{2}} = -\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

$$S_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1$$

II-4- حساب S'_n بدلالة n

لدينا
$$v_n = \frac{u_n-2}{u_n+1}$$
$$v_n = \frac{u_n+1-1-2}{u_n+1}$$
$$v_n = 1-\frac{3}{u_n+1}$$
$$v_n-1 = -\frac{3}{u_n+1}$$
$$-\frac{1}{3}(v_n-1) = \frac{1}{u_n+1}$$

ومنه
$$\left(\frac{1}{u_n+1}\right)^2 = \left(\frac{1-v_n}{3}\right)^2$$

من أجل قيم n نجد:

$$\begin{cases} n=0 & \frac{1}{(u_0+1)^2} = \left(\frac{1-v_0}{3}\right)^2 \\ n=1 & \frac{1}{(u_1+1)^2} = \left(\frac{1-v_1}{3}\right)^2 \\ & \vdots \\ n=n & \frac{1}{(u_n+1)^2} = \left(\frac{1-v_n}{3}\right)^2 \end{cases}$$

بالجمع طرفا لطرف نجد

$$S'_n = \left(\frac{1-v_0}{3}\right)^2+\left(\frac{1-v_1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1-v_n}{3}\right)^2$$

لدينا

$$\begin{cases} \left(\frac{1-v_0}{3}\right)^2 = \frac{1+v_0^2-2v_0}{9} \\ \left(\frac{1-v_1}{3}\right)^2 = \frac{1+v_1^2-2v_1}{9} \\ \vdots \\ \left(\frac{1-v_n}{3}\right)^2 = \frac{1+v_n^2-2v_n}{9} \end{cases}$$

بالجمع طرفا لطرف نجد

$$S'_n = \frac{1(n+1)+v_0^2+v_1^2+v_2^2+\cdots+v_n^2-2(v_0+v_1+\cdots+v_n)}{9}$$

نأخذ $T_n = v_0^2+v_1^2+v_2^2+\cdots+v_n^2$

$$v_n^2 = v_0^2.q^{2n}$$

ومنه $T_n = v_0^2+v_0^2.q^2+\cdots+v_0^2.q^{2n}$

T_n مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها $q^2=\frac{1}{4}$ وحدها الأول $v_0^2=\frac{1}{4}$

ومنه
$$T_n = \frac{1}{4}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}\right)$$

$$T_n = \frac{1}{4}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}}\right)$$

$$T_n = \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{3}$$

ومنه

$$S'_n = \frac{1(n+1)+T_n-2S_n}{9}$$

$$S'_n = \frac{n+1+\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{3}-2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1\right]}{9}$$

$$S'_n = \frac{3n+4-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{27}-\frac{2}{9}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1\right]$$

84. متتالية مقترحة رقم:10

الإسم على اليوتيوب: مواضيع مقترحة في الرياضيات في المتتاليات لبكالوريا 2019(عت+ر+تر) رقم 15

المتتالية المعرفة على المجموعة $\mathbb{N}$ كما يلي (u_n):

$u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \frac{3u_n}{u_n+21}$

1-برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n > 0$

2-أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة

أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3-أ-بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_{n+1} \leq \frac{1}{7}u_n$$

3-ب-برهن بطريقتين مختلفتين أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}$$

3-جـ-استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ مرة ثانية

4-نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$v_n = \frac{u_n}{u_n+18}$$

4-أ-بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول ثم أكتب عبارة v_n بدلالة n

4-ب- استنتج أن: $u_n = \frac{18\left(\frac{1}{7}\right)^n}{19-\left(\frac{1}{7}\right)^n}$

وأحسب نهاية المتتالية (u_n) مرة أخرى

5-احسب بدلالة n المجموع S_n:

$$S_n = \frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_1}+\cdots+\frac{1}{u_n}$$

الحل

1- البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n > 0$

-نبرهن على ذلك بالاستدلال بالتراجع

- نسمي $p(n)$ الخاصية "$u_n > 0$"

-من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = 1 > 0$ أي $p(0)$ محققة

-نفرض أن $p(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n أي $u_n > 0$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي $u_{n+1} > 0$

لدينا $u_n > 0$ ومنه $u_n + 21 > 21 > 0$

ومنه $\frac{1}{u_n+21} > 0$ و $3u_n > 0$

ومنه $\frac{3u_n}{u_n+21} > 0$

أي $u_{n+1} > 0$ ومنه: $p(n+1)$ محققة

إذن $u_n > 0$ من أجل كل عدد طبيعي n

2-دراسة اتجاه تغيير المتتالية (u_n)

-ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n}{u_n+21} - u_n$$
$$= \frac{3u_n - u_n^2 - 21u_n}{u_n+21}$$
$$= \frac{-u_n^2 - 18u_n}{u_n+21}$$
$$= \frac{-u_n(u_n+18)}{u_n+21} < 0$$

لأن: $u_n > 0$

ومنه: $u_{n+1} - u_n < 0$

ومنه (u_n) متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

استنتاج أن: (u_n) متقاربة

بما أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد 0 لأن: $0 < u_n$

إذن فهي متقاربة نحو نهاية l

-حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

بما أن (u_n) متتالية متقاربة نحو نهاية l فإن:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$$

لدينا $u_{n+1} = \frac{3u_n}{u_n+21}$

إذن نحل المعادلة $l = \frac{3l}{l+21}$ أي: $\frac{3l}{l+21} - l = 0$

$$\frac{3l - l(l+21)}{l+21} = 0$$

ومنه $\frac{3l-l^2-21l}{l+21} = 0$

$$\frac{-l^2-18l}{l+21}=0$$

أي $\begin{cases}-l^2-18l=0\\ l+21\neq 0\end{cases}$ و

$\begin{cases}l(l+18)=0\\ l\neq -21\end{cases}$ و

$\begin{cases}l=0 & \text{مقبول}\\ l=-18 & \text{مرفوض}\end{cases}$

لأنه $u_n>0$

ومنه: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$

3-أ-تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي $\mathbb{N}$

$$u_{n+1}\le \frac{1}{7}u_n$$

يكفي أن نبرهن أن $u_{n+1}-\frac{1}{7}u_n\le 0$

$$u_{n+1}-\frac{1}{7}u_n=\frac{3u_n}{u_n+21}-\frac{1}{7}u_n$$

$$=\frac{(21u_n-u_n^2-21u_n)}{7(u_n+21)}$$

$$=\frac{-u_n^2}{7(u_n+21)}\le 0$$

لأن: $-u_n^2\le 0$ و $7(u_n+21)>0$

ومنه $u_{n+1}-\frac{1}{7}u_n\le 0$

أي $u_{n+1}\le\frac{1}{7}u_n$

3-ب-البرهان بطريقتين مختلفتين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_{n+1}\le\left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}$

طريقة 1- نستعمل البرهان بالتراجع للبرهان على ذلك

نسمي $p(n)$ الخاصية $u_{n+1}\le\left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}$

من أجل $n=0$ نجد أن $u_{0+1}=u_1=\frac{3u_0}{u_0+21}=\frac{3}{22}$

و $\frac{3}{22}\le\frac{1}{7}$

ومنه $p(0)$ محققة

نفرض أن $p(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n

$$u_{n+1}\le\left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}$$

ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي $u_{n+2}\le\left(\frac{1}{7}\right)^{n+2}$

لدينا من الفرضية $u_{n+1}\le\left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}$

نضرب طرفي المتتالية في $\left(\frac{1}{7}\right)$

نجد: $\frac{1}{7}u_{n+1}\le\left(\frac{1}{7}\right)^{n+2}$

ولدينا $u_{n+1}\le\frac{1}{7}u_n$ ومنه $u_{n+2}\le\frac{1}{7}u_{n+1}$

إذن $u_{n+2}\le\left(\frac{1}{7}\right)^{n+2}$ (بالتعدي)

ومنه $p(n+1)$ محققة

إذن $u_{n+1}\le\left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n

طريقة 2: لدينا مما سبق $u_{n+1}\le\frac{1}{7}u_n$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$\begin{cases}u_1\le\frac{1}{7}u_0 & n=0\\ u_2\le\frac{1}{7}u_1 & n=1\\ \vdots & \\ u_{n+1}\le\frac{1}{7}u_n & n=n\end{cases}$$

بالضرب العمودي طرف لطرف والاختزال نجد:

$$u_{n+1}\le\left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}u_0$$

ومنه $u_{n+1}\le\left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}$

3-جـ-استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

لدينا $u_n>0$ ومنه $u_{n+1}>0$

ولدينا $u_{n+1}\le\left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}$

أي $0<u_{n+1}\le\left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}$

و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}=0$ لأنّ $-1<\frac{1}{7}<1$

$$0<\lim_{n\to+\infty}u_n\le\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}$$

$$0<\lim_{n\to+\infty}u_n\le 0$$

حسب مبرهنة الحصر فإن

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=0$$

4-أ-تبيان أن (v_n) متتالية هندسية

- تكون (v_n) متتالية هندسية إذا كان $v_{n+1}=q.v_n$

ومنه $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}}{u_{n+1}+18}$

$$=\frac{\frac{3u_n}{u_n+21}}{\frac{3u_n}{u_n+21}+18}$$

$$= \frac{\frac{3u_n}{u_n+21}}{\frac{3u_n+18u_n+18(21)}{u_n+21}}$$

$$= \frac{3u_n}{21u_n+(18)21}$$

$$= \frac{u_n}{7u_n+7(18)}$$

$$= \frac{1}{7}\frac{u_n}{u_n+18}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{7}v_n$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{7}$

حدها الأول $v_0 = \frac{u_0}{u_0+18} = \frac{1}{19}$

عبارة v_n بدلالة n

$$v_n = v_0 q^n$$

$$v_n = \frac{1}{19}\left(\frac{1}{7}\right)^n$$

ب-استنتاج أن: $u_n = \frac{18\left(\frac{1}{7}\right)^n}{19-\left(\frac{1}{7}\right)^n}$

لدينا

$$v_n = \frac{u_n}{u_n+18}$$

ومنه

$$u_n = v_n(u_n+18)u_nv_n + 18v_n - u_n = 0$$

$$u_n(v_n-1) = -18v_n$$

$$u_n = -\frac{18v_n}{v_n-1} = \frac{18v_n}{1-v_n}$$

ومنه

$$u_n = \frac{18\left(\frac{1}{19}\left(\frac{1}{7}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{19}\left(\frac{1}{7}\right)^n}$$

$$u_n = \frac{\frac{18\left(\frac{1}{7}\right)^n}{19}}{\frac{19-\left(\frac{1}{7}\right)^n}{19}}$$

إذن:

$$u_n = \frac{18\left(\frac{1}{7}\right)^n}{19-\left(\frac{1}{7}\right)^n}$$

مما سبق نهاية المتتالية (u_n).

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim \frac{18\left(\frac{1}{7}\right)^n}{19-\left(\frac{1}{7}\right)^n} = \frac{0}{19} = 0$$

ومنه $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

5-حساب بدلالة n المجموع S_n

$$S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \cdots + \frac{1}{u_n}.$$

لدينا

$v_n = \frac{u_n}{u_n+18}$ ومنه $\frac{1}{v_n} = \frac{u_n+18}{u_n}$

أي $\frac{1}{v_n} = 1 + \frac{18}{u_n}$

ومنه $\frac{18}{u_n} = \frac{1}{v_n} - 1$

أي $\frac{1}{u_n} = \frac{1}{18v_n} - \frac{1}{18}$

لدينا $v_n = \frac{1}{19}\left(\frac{1}{7}\right)^n$ ومنه

$$\frac{1}{u_n} = \frac{1}{18\left(\frac{1}{19}\right)\left(\frac{1}{7}\right)^n} - \frac{1}{18}$$

ومنه

$$= \frac{19}{18}.(7)^n - \frac{1}{18}$$

$$\frac{1}{u_n} = \frac{19}{18}(7)^n - \frac{1}{18}$$

نأخذ $w_n = \frac{19}{18}(7)^n$ و $t_n = -\frac{1}{18}$

(w_n) متتالية هندسية أساسها $q = 7$ وحدها الأول $w_0 = \frac{19}{18}$

(t_n) متتالية ثابتة

$$S_n = (w_0+t_0) + (w_1+t_1) + \cdots + (w_n+t_n)$$

$$S_n = (w_0+w_1+\cdots w_n) + \left(-\frac{1}{18}\right)(n+1)$$

$$S_n = \left(\frac{19}{18}\right)\frac{7^{n+1}-1}{7-1} - \frac{1}{18}(n+1)$$

$$S_n = \frac{19}{6(18)}\left(7^{(n+1)}-1\right) - \frac{1}{18}(n+1)$$

85. متتالية مقترحة رقم:11

الإسم على اليوتيوب: مواضيع مقترحة في الرياضيات في المتتاليات باك 2018 (ع ت+ر+ت ر) رقم 9

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{4} \\ u_{n+1} = u_n^2 + \frac{u_n}{2} \end{cases}$$

1-احسب u_1 و u_2

2-أ-بين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$0 < u_n \leq \frac{1}{4}$$

2-ب-بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما

2-ج-هل المتتالية (u_n) متقاربة؟ علل

3-أ-بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_{n+1} \leq \frac{3}{4}u_n$$

3-ب-استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

3-جـ-احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

الحل

1-حساب u_1 و u_2:

-لدينا: $u_{n+1} = u_n^2 + \frac{u_n}{2}$

إذن $u_{0+1} = u_1 = u_0^2 + \frac{u_0}{2}$

$$u_1 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{\frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{16} + \frac{1}{8}$$

ومنه: $u_1 = \frac{3}{16}$

$$u_{1+1} = u_2 = u_1^2 + \frac{u_1}{2} = \left(\frac{3}{16}\right)^2 + \left(\frac{\frac{3}{16}}{2}\right)$$

$$u_2 = \frac{9}{256} + \frac{3\times 8}{32+8}$$

$$u_2 = \frac{33}{256}$$

2-أ-تبيان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$0 < u_n \leq \frac{1}{4}$$

-نسمي $P(n)$ الخاصية $0 < u_n \leq \frac{1}{4}$

من أجل $n = 0$ لدينا: $u_0 = \frac{1}{4}$ و $0 < \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$ ومنه

$P(0)$ محققة

نفرض الخاصية $P(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n أي $0 < u_n \leq \frac{1}{4}$ ونبرهن صحة $P(n+1)$

أي $0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{4}$

-لدينا من الفرضية $0 < u_n \leq \frac{1}{4}$

بتربيع الطرفين: $0 < u_n^2 \leq \frac{1}{16}$ ....(1)

ولدينا: $0 < \frac{1}{2}u_n \leq \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}$

(2) $0 < \frac{1}{2}u_n \leq \frac{1}{8}$

نجمع (1) مع (2) نجد: $0 < u_n^2 + \frac{u_n}{2} \leq \frac{1}{16} + \frac{1}{8}$

ومنه: $0 < u_n^2 + \frac{u_n}{2} \leq \frac{3}{16}$

ومنه: $0 < u_{n+1} \leq \frac{3}{16} \leq \frac{1}{4}$

ومنه نستنتج: $0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{4}$

أي $P(n+1)$ محققة

إذن $0 < u_n \leq \frac{1}{4}$ من أجل كل عدد طبيعي n

2-ب-تبيان أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما:

-نبرهن أن: $u_{n+1} - u_n \leq 0$

$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 + \frac{u_n}{2} - u_n = \frac{2u_n^2 + u_n - 2u_n}{2}$$

$$= \frac{2u_n^2 - u_n}{2} = \frac{u_n}{2}(2u_n - 1)$$

لدينا: $0 < \frac{u_n}{2}$

و $0 < u_n \leq \frac{1}{4}$ (من البرهان بالتراجع)

أي $2u_n \leq \frac{1}{2}$

$$2u_n - 1 \leq -\frac{1}{2} < 0$$

ومنه: $\frac{u_n}{2}(2u_n - 1) < 0$

أي $u_{n+1} - u_n < 0$

ومنه نستنتج أن (u_n) متناقصة تماما.

2-جـ-معرفة تقارب المتتالية (u_n):

بما أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد 0 فهي متقاربة نحو نهاية ℓ.

3-أ- تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_{n+1} \leq \frac{3}{4}u_n$$

طريقة A:

$$u_{n+1} = u_n^2 + \frac{u_n}{2} = u_n\left(u_n + \frac{1}{2}\right)$$

ولدينا: $u_n \leq \frac{1}{4}$ (من البرهان بالتراجع)

ومنه: $u_n + \frac{1}{2} \leq \frac{3}{4}$ نضرب الطرفين في u_n

لأن $u_n > 0$ ومنه $u_n\left(u_n + \frac{1}{2}\right) \leq \frac{3}{4}u_n$

ومنه: $u_{n+1} \leq \frac{3}{4}u_n$

طريقة B:

يكفي أن نبرهن أن: $u_{n+1} - \frac{3}{4}u_n \leq 0$

$$u_{n+1} - \frac{3}{4}u_n = u_n^2 + \frac{u_n}{2} - \frac{3}{4}u_n$$

$$u_{n+1} - \frac{3}{4}u_n = \frac{4u_n^2 - u_n}{4} = \frac{u_n}{4}[4u_n - 1]$$

لدينا: $\frac{u_n}{4} > 0$ ولدينا $u_n \leq \frac{1}{4}$

ومنه: $4u_n \leq 1$

$$4u_n - 1 \leq 0$$

ومنه نجد: $u_{n+1} - \frac{3}{4}u_n \leq 0$

أي: $u_{n+1} \leq \frac{3}{4}u_n$

3-ب-استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_n \le \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

لدينا: $u_{n+1} \le \frac{3}{4}u_n$

من أجل $n=0$: $u_1 \le \frac{3}{4}u_0$

من أجل $n=1$: $u_2 \le \frac{3}{4}u_1$

من أجل $n=2$: $u_3 \le \frac{3}{4}u_2$

..

من أجل $n=n-1$: $u_n \le \frac{3}{4}u_{n-1}$

نضرب طرف لطرف نجد:

$$u_1 \times u_2 \times u_3 \times \dots \times u_{n-1} \times u_n \le \frac{3}{4}u_0 \times \frac{3}{4}u_1 \times \frac{3}{4}u_2 \times \dots \times \frac{3}{4}u_{n-1}$$

ومنه: $u_n \le \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1+1} u_0$

أي: $u_n \le \left(\frac{3}{4}\right)^n u_0$

ومنه: $u_n \le \left(\frac{3}{4}\right)^n \left(\frac{1}{4}\right) \le \left(\frac{3}{4}\right)^n$

ومنه: $u_n \le \left(\frac{3}{4}\right)^n$

3-ج-حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

لدينا: $0 < u_n \le \left(\frac{3}{4}\right)^n$

أي $0 < \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \le \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$

و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ لأن $-1 < \frac{3}{4} < 1$

ومنه و حسب مبرهنة الحصر $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

86. متتالية مقترحة رقم:12

الإسم على اليوتيوب: مواضيع مقترحة في الرياضيات في المتتاليات باك 2018 (ع ت+ر+ت ر) رقم 18

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{u_n^3+2}{u_n^2+1}$

1-أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0 < u_n < 2$

2-ادرس رتابة المتتالية (u_n)

3-استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة. ما هي نهايتها؟

4-أ-بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$2 - u_{n+1} \le \frac{4}{5}(2 - u_n)$$

4-ب-استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$0 \le 2 - u_n \le \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

ثم عين نهاية المتتالية (u_n) من جديد

الحل

1-اثبات أنه من اجل كل عدد طبيعي n: $0 < u_n < 2$

نبرهن بالتراجع أن $0 < u_n < 2$

نسمي $p(n)$ الخاصية $0 < u_n < 2$

من أجل $n=0$ لدينا $u_0 = 1$ ومنه $0 < u_0 < 2$

أي $p(0)$ محققة

نفرض أن $p(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n

أي $0 < u_n < 2$ نبرهن أن $p(n+1)$ صحيحة أي $0 < u_{n+1} < 2$ أي يكفي أن نبرهن أن $0 < u_{n+1}$ و $u_{n+1} < 2$

لدينا من الفرض

$$u_n > 3 \Rightarrow \begin{cases} u_n^3 > 0 \\ u_n^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_n^3 + 3 > 0 \\ u_n^2 + 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_n^3 + 3 > 0 \\ \dfrac{1}{u_n^2+1} > 0 \end{cases}$$

ومنه $\frac{u_n^3+3}{u_n^2+1} > 0 \Rightarrow u_{n+1} > 0 \dots\dots(1)$

ولدينا: $u_n < 2$

$$u_{n+1} - 2 = \frac{u_n^3+2}{u_n^2+1} - 2 = \frac{u_n^3 + 2 - 2u_n^2 - 2}{u_n^2+1} = \frac{u_n^3 - 2u_n^2}{u_n^2+1} = \frac{u_n^2[u_n - 2]}{u_n^2+1}$$

لدينا من الفرض $u_n > 0$

و منه $u_n^2 > 0$ أي $u_n^2 + 1 > 0$

معناه $\frac{u_n^2}{u_n^2+1} > 0$

ولدينا من الفرض $u_n < 2$ ومنه $u_n - 2 < 0$

ومنه $u_{n+1} - 2 < 0$

أي $u_{n+1} < 2 \dots.(2)$

من (1) و (2) نجد أن $0 < u_{n+1} < 2$

أي $p(n+1)$ محققة

إذن $0 < u_n < 2$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

2-دراسة رتابة المتتالية (u_n)

لدارسة رتابة يكفي دراسة إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n^3+2}{u_n^2+1}-u_n$$
$$=\frac{u_n^3+2-u_n^3-u_n}{u_n^2+1}$$
$$=\frac{2-u_n}{u_n^2+1}$$

من سؤال السابق نجد أن $u_n>0$

ومنه $u_n^2+1>0$

و $u_n<2$ أي $2-u_n>0$

ومنه $\frac{2-u_n}{u_n^2+1}>0$

ومنه $u_{n+1}-u_n>0$ إذن: (u_n) متتالية متزايدة تماما

3-استنتاج أن (u_n) متقاربة:

بما أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 2 نستنتج أن (u_n) متقاربة

حساب نهاية (u_n)

بما أن (u_n) متقاربة فإن:

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}u_{n+1}=l$$

نحل المعادلة $\frac{l^3+2}{l^2+1}=l$

$$\frac{l^3+2}{l^2+1}-l=0\Rightarrow\frac{l^3+2}{l^2+1}-\frac{l(l^2+1)}{l^2+1}=0$$
$$\frac{l^3+2-l^3-l}{l^2+1}=0$$

$l^2+1\neq0$ $\quad\frac{2-l}{l^2+1}=0\Rightarrow2-l=0$

معناه $l=2$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=2$$

4-أ-البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$2-u_{n+1}\leq\frac{4}{5}(2-u_n)$$

يكفي أن نبرهن أن:

$$2-u_{n+1}-\frac{4}{5}(2-u_n)\leq0$$

$$2-u_{n+1}-\frac{4}{5}(2-u_n)$$
$$=2-\frac{u_n^3+2}{u_n^2+1}-\frac{4}{5}(2-u_n)$$
$$=\frac{2u_n^2+2-u_n^3-2}{u_n^2+1}-\frac{4}{5}(2-u_n)$$
$$=\frac{u_n^2(2-u_n)}{u_n^2+1}-\frac{4}{5}(2-u_n)$$
$$=(2-u_n)\left(\frac{u_n^2}{u_n^2+1}-\frac{4}{5}\right)$$
$$=(2-u_n)\frac{(u_n^2-4)}{5(u_n^2+1)}$$

لدينا $0<u_n<2$

$2-u_n>0$

و $u_n^2>0$ ومنه $5(u_n^2+1)>0$

ولدينا $0<u_n^2<2^2$

$0<u_n^2<4$

ومنه $u_n^2-4<0$

معناه $\frac{2-u_n}{5(u_n^2+1)}(u_n^2-4)<0$

ومنه $2-u_{n+1}-\frac{4}{5}(2-u_n)\leq0$

معناه $2-u_{n+1}\leq\frac{4}{5}(2-u_n)$

4-ب-استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n

$$0\leq2-u_n\leq\left(\frac{4}{5}\right)^n$$

ط-1-لدينا من أجل كل عدد طبيعي n:

$$2-u_{n+1}\leq\frac{4}{5}(2-u_n)$$

ومنه من أجل $n=0$ $\quad 2-u_{0+1}\leq\frac{4}{5}(2-u_0)$

$2-u_1\leq\frac{4}{5}(2-u_0)$

$n=1$ $\quad 2-u_2\leq\frac{4}{5}(2-u_1)$

$n=2$ $\quad 2-u_3\leq\frac{4}{5}(2-u_2)$

.

.

$n=n-1$ $\quad 2-u_n\leq\frac{4}{5}(2-u_{n-1})$

بالضرب طرفا لطرف والاختزال نجد

$2-u_n\leq\left(\frac{4}{5}\right)^n(2-u_0)$ و $u_0=1$

$2-u_n\leq\left(\frac{4}{5}\right)^n(2-1)$

$2-u_n\leq\left(\frac{4}{5}\right)^n$

ط-2-البرهان بالتراجع أن $2-u_n\leq\left(\frac{4}{5}\right)^n$

نسمي $p(n)$ الخاصية $2-u_n\leq\left(\frac{4}{5}\right)^n$

من أجل $n=0$ نجد $2-u_0\leq\left(\frac{4}{5}\right)^0$

$2-1\leq1$

ومنه $p(0)$ محققة

نفرض أن $P(n)$ محققة أي $2-u_n<\left(\frac{4}{5}\right)^n$

ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة

أي $2-u_{n+1}\le\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$

لدينا من الفرض $2-u_n\le\left(\frac{4}{5}\right)^n$

ومنه: $\frac{4}{5}(2-u_n)\le\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$

ولدينا من (4-أ) $2-u_{n+1}\le\frac{4}{5}(2-u_n)$

ومنه: $2-u_{n+1}\le\frac{4}{5}(2-u_n)\le\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$

ومنه $2-u_{n+1}\le\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$

ومنه $P(n+1)$ محققة

ومنه وحسب البرهان بالتراجع يكون لدينا

$2-u_n\le\left(\frac{4}{5}\right)^n$ صحيحة من أجل كل $n\in\mathbb{N}$

و $u_n<2$ فإن $2-u_n>0$

ومنه: $0\le 2-u_n\le\left(\frac{4}{5}\right)^n$

-تعيين نهاية المتتالية (u_n) من جديد:

لدينا: $0\le 2-u_n\le\left(\frac{4}{5}\right)^n$

ولدينا: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n=0$ لأن $-1<\frac{4}{5}<1$

ومنه وحسب نظرية الحصر

نجد $\lim\limits_{n\to+\infty}(2-u_n)=0$

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=2$

87. متتالية مقترحة رقم:13

الإسم على اليوتيوب: مواضيع مقترحة في الرياضيات في المتتاليات لبكالوريا 2017(ع ت+ر+ت ر)رقم 27

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=3$

ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}$.

1-أ-أحسب u_1, u_2, u_3 ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: . $u_n>1$

1-ب-بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

1-جـ-استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة،ثم أحسب نهايتها.

2-نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$$v_n=u_n^2-1$$

2-أ-بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n،

$$2v_{n+1}=v_n$$

2-ب-إستنتج أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0.

2-جـ-أكتب بدلالة n،كلا من v_n و u_n، ثم أحسب من جديد $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

3-أحسب بدلالة n كلا من المجاميع التالية:

$$S_n=u_0^2+u_1^2+\cdots+u_n^2$$
$$T_n=v_0+2v_1+\cdots+2^nv_n$$
$$L_n=\ln v_0+\ln v_1+\cdots+\ln v_n$$

الحل

1-أ-حساب u_1 ، u_2 ، u_3:

$$u_1=\sqrt{\frac{1+u_0^2}{2}}=\sqrt{\frac{1+3^2}{2}}=\sqrt{5}$$

$$u_2=\sqrt{\frac{1+u_1^2}{2}}=\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}^2}{2}}=\sqrt{3}$$

$$u_3=\sqrt{\frac{1+u_2^2}{2}}=\sqrt{\frac{1+\sqrt{3}^2}{2}}=\sqrt{2}$$

البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n>1$

نسمي $p(n)$ الخاصية: "$u_n>1$"

من أجل $n=0$ لدينا: $u_0=3>1$

أي $p(0)$ محققة

نفرض أن $p(n)$ محققة من أجل كل $n\in\mathbb{N}$

أي $u_n>1$

ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي $u_{n+1}>1$

لدينا من الفرضية $u_n>1$ ومنه $u_n^2>1$

أي $1+u_n^2>2$

ومنه $\frac{1+u_n^2}{2}>1$

أي أن $\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}>1$

ومنه $u_{n+1}>1$

ومنه $p(n+1)$ محققة

وأخيرا $u_n>1$ من أجل كل عدد طبيعي n

1-ب-تبيان أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

تكون (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ إذا كان:

$$u_{n+1}-u_n>0$$

$$u_{n+1}-u_n=\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}-u_n$$

$$=\frac{\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}-u_n\right)\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}+u_n\right)}{\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}+u_n}$$

$$= \frac{\frac{1+u_n^2}{2} - u_n^2}{\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} + u_n}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1-u_n^2}{\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} + u_n}$$

لدينا: $u_n > 1$ ومنه المقام موجب تماما

ومنه: $u_n > 1$ أي $u_n^2 > 1$ $-u_n^2 < -1$

ومنه: $1 - u_n^2 < 0$

إذن: $\frac{1}{2}\frac{1-u_n^2}{\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}+u_n} < 0$

ومنه: $u_{n+1} - u_n < 0$

أي المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

1-جـ- استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة:

بما أن (u_n) متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ ومحدودة من الأسفل بالعدد 1

فإن (u_n) متقاربة نحو نهاية l

حساب نهاية u_n

بما أن (u_n) متقاربة نحو نهاية l فإن:

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = l$$

ومنه $\sqrt{\frac{1+l^2}{2}} = l$ مع $l \geq 0$

ومنه $\frac{1+l^2}{2} = l^2$ أي $1 + l^2 = 2l^2$

ومنه $l^2 = 1$

إذن: $l = 1$ لأن: $l \geq 0$

ومنه $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$

2-أ-تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$2v_{n+1} = v_n$$

$$2v_{n+1} = 2(u_{n+1}^2 - 1) = 2\left[\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}\right)^2 - 1\right]$$

$$= 2\left(\frac{1+u_n^2-2}{2}\right) = u_n^2 - 1 = v_n$$

اذن $2v_{n+1} = v_n$

2-ب-إستنتاج أن: (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول:

تكون (v_n) متتالية هندسية إذا كان: $v_{n+1} = q\, v_n$

لدينا: $2v_{n+1} = v_n$ ومنه: $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$

إذن: (v_n) متتالية هندسية أساسها: $q = \frac{1}{2}$

إيجاد v_0: $v_0 = u_0^2 - 1 = 9 - 1 = 8$

2-جـ-كتابة بدلالة n كلا من v_n و u_n

بما أن (v_n) متتالية هندسية فإن:

$$v_n = v_0 q^n$$

$$v_n = 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

كتابة (u_n) بدلالة n:

لدينا: $v_n = u_n^2 - 1$ ومنه $u_n = \sqrt{v_n + 1}$

إذن $u_n = \sqrt{8\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1}$

حساب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

$$u_n = \sqrt{8\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{8\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1} = 1$$

لأن: $-1 < \frac{1}{2} < 1$

أي: $\lim_{n\to+\infty} 8\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

3-حساب بدلالة n كلا من المجاميع التالية:

$$S_n = u_0^2 + u_1^2 + \cdots + u_n^2$$

لدينا $v_n = u_n^2 - 1$ ومنه $u_n^2 = v_n + 1$

أي

$$u_0^2 = v_0 + 1$$
$$u_1^2 = v_1 + 1$$
$$\vdots$$
$$u_n^2 = v_n + 1$$

نقوم بالجمع العمودي طرفا لطرف:

نجد:

$$u_0^2 + u_1^2 + \cdots + u_n^2 = (v_0 + v_0 + \cdots + v_n) + 1(n+1)$$

$$S_n = v_0 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} + n + 1$$

$$= 8\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} + n + 1$$

$$= 4\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] + n + 1$$

حساب t_n بدلالة n:

$$t_n = v_0 + 2v_1 + \cdots + 2^n v_n$$

$$2^n v_n = 2^n . 8\left(\frac{1}{2}\right)^n = 8$$

$$t_n = v_0 + 2(v_0 q) + 2^2(v_0 q^2) + \cdots . + 2^n 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$t_n = 8 + 8 + \cdots + 8$$

إذن: $t_n = 8(n+1)$

حساب l_n بدلالة n:

$$l_n = ln\, v_0 + ln\, v_1 + \cdots + ln\, v_n$$

من خواص اللوغاريتم:

$$ln(a.b.c) = ln\, a + ln\, b + ln\, c$$

ومن

$$l_n = ln\, v_0 + ln\, v_1 + \cdots + ln\, v_n$$
$$= ln(v_0 \times v_1 \times \ldots.\times v_n)$$

لدينا

$$v_n = v_0 q^n$$
$$v_0 = v_0$$
$$v_1 = v_0 q$$
$$v_2 = v_0 q^2$$
$$.$$
$$.$$
$$v_n = v_0 q^n$$

بالضرب العمودي طرفا لطرف نجد:

$$v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n = (v_0)(v_0 q)(v_0 q^2)\ldots(v_0 q^n)$$

ومنه:

$$\ln(v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n)$$
$$= \ln[(v_0)(v_0 q)(v_0^2 q^2)\ldots.(v_0 q^n)]$$
$$l_n = \ln(v_0^{n+1}.q.q^2\ldots.q^n)$$
$$l_n = \ln\left[8^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{1+2+\cdots+n}\right]$$
$$l_n = \ln\left[8^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}(1+n)}\right]$$
$$l_n = \ln(8)^{n+1} + \ln\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}(1+n)}$$

إذن: $l_n = (n+1)\ln 8 + \frac{n(n+1)}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$$l_n = (n+1)\left[\ln 8 - \frac{n \ln 2}{2}\right] = (n+1)\ln(2)\left[3 - \frac{n}{2}\right]$$

88. متتالية مقترحة رقم:14

الإسم على اليوتيوب: مواضيع مقترحة في الرياضيات في المتتاليات لبكالوريا 2017(ع ت+ر+ت ر)رقم24

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{4u_n} \end{cases}$$

1-أحسب u_1 ، u_2 .

2- أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $0 < u_n < 4$

2-ب- بيّن أنّ (u_n) متزايدة تماما، ماذا تستنتج؟

3- نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$v_n = \ln(u_n) - \ln 4$$

3-أ- بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية

3-ب- أكتب v_n و u_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{n\to\infty} u_n$

4- أحسب بدلالة n كلا من:

$S_n = v_0 + v_1 \ldots. + v_n$ و $P_n = u_0 \times u_1 \times \ldots\ldots u_n$

الحل

1-حساب u_1 و u_2

$u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \sqrt{4u_n}$

$$u_1 = \sqrt{4u_0} = \sqrt{4} = 2$$
$$u_2 = \sqrt{4u_1} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

2-أ-البرهان بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n أن $0 < u_n < 4$

نسمي $p(n)$ الخاصية $0 < u_n < 4$

من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = 1$ أي $0 < u_0 < 4$

$p(0)$ محققة من أجل $n = 0$

ونفرض أن $p(n)$ محققة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

أي $0 < u_n < 4$

ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي $0 < u_{n+1} < 4$

لدينا من الفرضية $0 < u_n < 4$

$$0 < 4u_n < 16$$
$$0 < \sqrt{4u_n} < 4$$
$$0 < u_{n+1} < 4$$

ومنه $p(n+1)$ محققة

إذن $0 < u_n < 4$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

2-ب-البرهان أن (u_n) متزايدة:

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{4u_n} - u_n$$
$$= \frac{(\sqrt{4u_n} - u_n)(\sqrt{4u_n} + u_n)}{\sqrt{4u_n} + u_n}$$
$$= \frac{4u_n - u_n^2}{\sqrt{4u_n} + u_n} = \frac{u_n(4 - u_n)}{\sqrt{4u_n} + u_n}$$

لدينا $u_n > 0$ و $u_n < 4$

ومنه $\sqrt{4u_n} > 0$ و $0 < 4 - u_n$

و $\sqrt{4u_n} + u_n > 0$

ومنه $(u_{n+1} - u_n) > 0$

ومنه (u_n) متتالية متزايدة تماما

استنتاج: بما أن (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 4 فهي متقاربة نحو نهايتها l

3-أ-بيان أن (v_n) متتالية هندسية:

حتى تكون (v_n) هندسية يكفي أن يكون

$$v_{n+1} = v_n . q$$

لدينا $v_n = \ln(u_n) - \ln(4)$

ومنه

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) - \ln(4)$$
$$= \ln\sqrt{4u_n} - \ln 4$$
$$= \ln(4u_n)^{\frac{1}{2}} - \ln 4$$
$$= \frac{1}{2}\ln(4u_n) - \ln 4$$
$$= \frac{1}{2}\ln(u_n) + \frac{1}{2}\ln 4 - \ln 4$$
$$= \frac{1}{2}\ln u_n - \frac{1}{2}\ln 4$$
$$= \frac{1}{2}(\ln(u_n) - \ln 4)$$
$$= \frac{1}{2}v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$

وحدها الأول:- (v_0)

$$v_0 = \ln u_0 - \ln 4$$
$$v_0 = \ln 1 - \ln 4$$
$$v_0 = -\ln 4$$

3-ب-كتابة v_n و u_n بدلالة n

(v_n) متتالية هندسية معناه

$$v_n = v_0 q^n$$
$$v_n = -\ln(4)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

ولدينا $v_n = \ln(u_n) - \ln 4$

$$\ln(u_n) = v_n + \ln 4$$

ومنه $u_n = e^{v_n + \ln 4}$

و $v_n = -\ln 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$

معناه: $u_n = e^{-\ln(4)\left(\frac{1}{2}\right)^n + \ln 4}$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

$$\lim_{n+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} e^{-\ln(4)\left(\frac{1}{2}\right)^n + \ln 4}$$

لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ لأن $1 < \frac{1}{2} < 1$

ومنه

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = e^{-\ln(4)(0) + \ln 4}$$
$$= e^{\ln 4}$$
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 4$$

4-حساب S_n

S_n هي مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية (v_n)

ومنه $S_n = v_0 \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$

$$S_n = -\ln 4\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1}\right]$$
$$= -\ln 4\,\frac{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1\right]}{-\frac{1}{2}}$$
$$= 2\ln 4\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1\right]$$

حساب p_n بدلالة n

لدينا $p_n = u_0 \times u_1 \times \ldots\times u_n$

و $v_n = \ln u_n - \ln 4$

$$\ln(u_n) = v_n + \ln 4$$
$$u_n = e^{v_n + \ln 4}$$
$$u_0 = e^{v_0 + \ln 4}$$
$$u_1 = e^{v_1 + \ln 4}$$
$$\vdots$$
$$u_n = e^{v_n + \ln(4)}$$

بضرب عموديا طرفا لطرف نجد

$$p_n = e^{v_0 + \ln(4)} \times e^{v_1 + \ln 4} \times \ldots\times e^{v_n + \ln 4}$$
$$p_n = e^{v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \ln 4 + \ln 4 + \cdots + \ln 4}$$
$$= e^{S_n + (n+1)\ln 4}$$
$$p_n = e^{2\ln 4\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1\right] + (n+1)\ln 4}$$

89. متتالية مقترحة رقم:15

الإسم على اليوتيوب: مواضيع مقترحة في الرياضيات في المتتاليات لبكالوريا 2019(عت+ر+تر) رقم 12

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_1 = e^2$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $u_{n+1} = e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{u_n}$

1-برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $u_n > \frac{1}{e}$

2-أ-بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

2-ب-استنتج أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما

2-جـ-هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟ إذا كانت متقاربة فما هي نهايتها

3-نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $v_n = \frac{1}{2} + \ln\sqrt{u_n}$

3-أ-برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

3-ب-اكتب v_n بدلالة n، ثم استنتج u_n بدلالة n

4-أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n = \frac{1}{1 + \ln u_1} + \frac{1}{1 + \ln u_2} + \ldots + \frac{1}{1 + \ln u_n}$$

الحل

1-البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $u_n > \frac{1}{e}$

نسمي $p(n)$ الخاصية " $u_n > \frac{1}{e}$ ".

من أجل $n = 1$ لدينا $u_1 = e^2 > \frac{1}{e}$

ومنه $p(1)$ محققة

نفرض أن $p(n)$ محققة من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$

أي $u_n > \frac{1}{e}$

ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي $u_{n+1} > \frac{1}{e}$

لدينا من الفرضية $u_n > \frac{1}{e}$ ومنه

$\sqrt{u_n} > \sqrt{\frac{1}{e}}$ و $e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{u_n} > e^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{e}}$

ومنه $e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{u_n} > e^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{e}}$

إذن: $e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{u_n} > e^{-1}$

إذن $e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{u_n} > \frac{1}{e}$

أي $u_{n+1} > \frac{1}{e}$

ومنه $p(n+1)$ محققة

إذن: $u_n > \frac{1}{e}$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$

2-أ-تبيان انه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n أن $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

يكفي اثبات أن $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 < 0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n}$$

$$= \frac{\left(e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{u_n} - u_n\right)}{u_n}$$

$$= \frac{\sqrt{u_n}\left(e^{-\frac{1}{2}} - \sqrt{u_n}\right)}{u_n}$$

لدينا $u_n > \frac{1}{e}$ ومنه: $\sqrt{u_n} > e^{-\frac{1}{2}}$

و إذن: $e^{-\frac{1}{2}} - \sqrt{u_n} < 0$

$$\frac{\sqrt{u_n}\left(e^{-\frac{1}{2}} - \sqrt{u_n}\right)}{u_n} < 0$$

ومنه $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

2-ب-استنتاج أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما

$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ و $u_n > 0$ و $u_{n+1} > 0$ (لأن $u_n > \frac{1}{e}$)

ومنه $u_{n+1} < u_n$ أي أن $u_{n+1} - u_n < 0$

ومنه نستنتج أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما

2-جـ-معرفة إذا كانت (u_n) متقاربة

-بما أن (u_n) متتالية متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد $\frac{1}{e}$ (لأن $\frac{1}{e} < u_n$)

فهي متقاربة نحو نهاية l.

حساب النهاية:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$$

$$l = e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{l}$$

$$l^2 = e^{-1}\, l$$

منه $l^2 - \frac{1}{e}l = 0$

$$\frac{e.l^2 - l}{e} = 0$$

ومنه $\frac{l(e.l-1)}{e} = 0$

إذن

$$\begin{cases} l = 0 \\ \text{أو} \\ l = \frac{1}{e} \end{cases}$$

$l = 0$ مرفوض لأنّ $u_n > \frac{1}{e} > 0$

ومنه: $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{e}$

3-أ-اثبات أن (v_n) متتالية هندسية

-تكون (v_n) متتالية هندسية إذا كان

$$v_{n+1} = q.v_n$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} + \ln\sqrt{u_{n+1}} = \frac{1}{2} + \ln\sqrt{e^{\frac{-1}{2}}\sqrt{u_n}}$$

$$= \frac{1}{2} + \ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{u_n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[\ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) + \ln(\sqrt{u_n})\right]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + \ln\sqrt{u_n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \ln\sqrt{u_n}\right) = \frac{1}{2}v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول v_1

$$v_1 = \frac{1}{2} + \ln\sqrt{u_1}$$

$$= \frac{1}{2} + \ln \sqrt{e^2}$$

$$= \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

3-ب- كتابة v_n بدلالة n

$$v_n = v_1 . q^{n-1}$$

$$v_n = \frac{3}{2} . \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

إذن: $v_n = 3 . \left(\frac{1}{2}\right)^n$

استنتاج عبارة u_n بدلالة n

$$v_n = \frac{1}{2} + \ln \sqrt{u_n}$$

$$\ln(\sqrt{u_n}) = v_n - \frac{1}{2}$$

ومنه $\sqrt{u_n} = e^{\left(v_n - \frac{1}{2}\right)}$

ومنه $u_n = \left(e^{\left(v_n - \frac{1}{2}\right)}\right)^2$

$$u_n = e^{2\left(v_n - \frac{1}{2}\right)} = e^{2.3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}$$

$$u_n = e^{6\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}$$

4-حساب بدلالة n المجموع S_n بحيث

$$S_n = \frac{1}{1 + \ln u_1} + \frac{1}{1 + \ln u_2} + \cdots + \frac{1}{1 + \ln u_n}$$

$$\frac{1}{1 + \ln u_n} = \frac{1}{1 + \ln e^{6\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}}$$

$$= \frac{1}{1 + 6\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}$$

$$= \frac{1}{6\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$= \frac{1}{6} \frac{1}{\frac{1}{2^n}}$$

$$\frac{1}{1 + \ln u_n} = \frac{1}{6} 2^n = w_n$$

حيث (w_n) متتالية هندسية أساسها $q' = 2$ وحدها الأول $w_1 = \frac{1}{3}$

ومنه $S_n = w_1 + w_2 + \cdots + w_n$

$$s_n = \frac{1}{3} . \frac{(2^{n-1+1} - 1)}{2 - 1} = \frac{1}{3}(2^n - 1)$$

90. متتالية مقترحة رقم:16

الإسم على اليوتيوب: مواضيع مقترحة في الرياضيات في المتتاليات لبكالوريا 2017 (ع ت + ر + ت ر) رقم 1

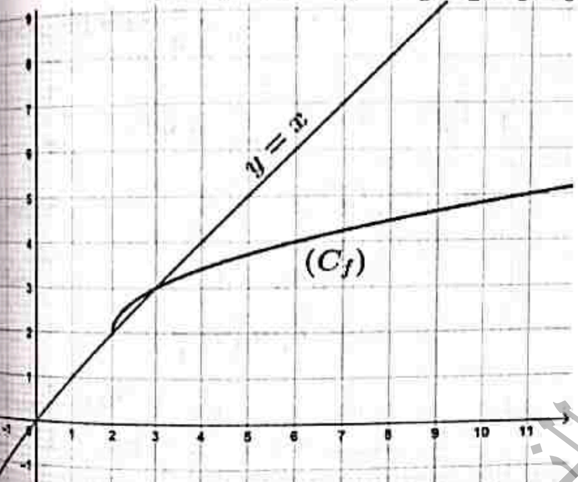
نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ:

$$\begin{cases} u_0 = 11 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n - 2} + 2 \end{cases}$$

1-أ-باستعمال المنحني (C_f) الممثل للدالة f المرفقة بالمتتالية (u_n) والمعرفة بالعبارة

$f(x) = \sqrt{x - 2} + 2$

والمنصف الأول ذي المعادلة $y = x$ مثل الحدود u_3, u_2, u_1, u_0 على محور الفواصل



1-ب-ماهو تخمينك لاتجاه تغير المتتالية (u_n) ؟

2-برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3 \leq u_n \leq 11$

3-تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n - 2}\left(1 - \sqrt{u_n - 2}\right)$$

4-بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة

5-استنتج مما سبق ان المتتالية (u_n) متقاربة وعين نهايتها

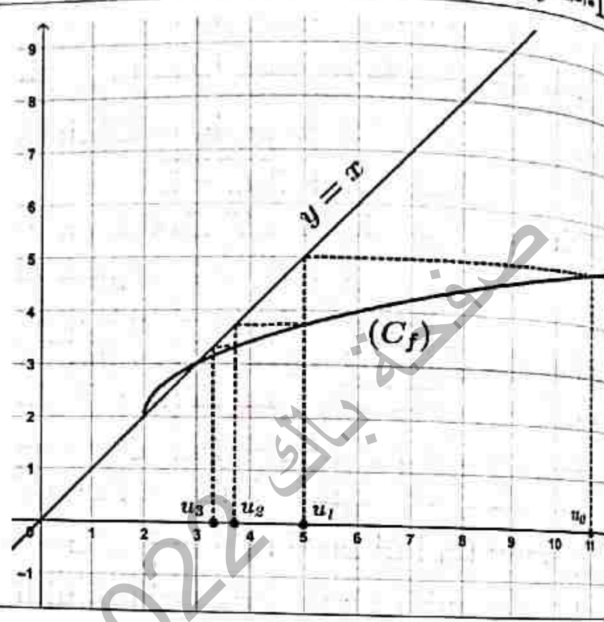
6-أ-بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$0 \leq u_{n+1} - 3 \leq \frac{1}{2}(u_n - 3)$$

6-ب-استنتج أن: $0 \leq u_n - 3 \leq 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$ من أجل كل عدد طبيعي n ، ثم عين نهاية المتتالية (u_n)

الحل

1-أ-تمثيل الحدود



1-ب-التخمين

اتجاه تغير المتتالية (u_n) متناقصة لأن

$u_0 > u_1 > u_2 > u_3$

2-البرهان بالتراجع انه مهما كان $n \in \mathbb{N}$ فإن $3 \le u_n \le 11$

نسمي $P(n)$ الخاصية "$3 \le u_n \le 11$"

نحقق من أجل $n = 0$ فاصلة $u_0 = 11$

و $3 \le 11 \le 11$

ومنه $P(0)$ محققة

نفرض أن $P(n)$ محققة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

أي $3 \le u_n \le 11$ ونبرهن صحة $p(n+1)$

أي $3 \le u_{n+1} \le 11$

لدينا

$3 \le u_n \le 11$

ومنه

$1 \le u_n - 2 \le 9$

و

$\sqrt{1} + 2 \le \sqrt{u_n - 2} + 2 \le \sqrt{9} + 2$

ومنه

$3 \le \sqrt{u_n - 2} + 2 \le 5$

أي

$3 \le u_{n+1} \le 5 \le 11$ ومنه $P(n+1)$ محققة

إذن $3 \le u_n \le 11$ مهما كان $n \in \mathbb{N}$

3-التحقق أن

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n - 2}\left(1 - \sqrt{u_n - 2}\right)$$

لدينا

$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n - 2} + 2 - u_n$

$= \sqrt{u_n - 2} - (-2 + u_n) = \sqrt{u_n - 2} - (u_n - 2)$

$= \sqrt{u_n - 2} - \left(\sqrt{u_n - 2} \times \sqrt{u_n - 2}\right)$

$= \sqrt{u_n - 2}\left(1 - \sqrt{u_n - 2}\right)$

4-تبيان أن المتتالية (u_n) متناقصة

لدينا $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n - 2}\left(1 - \sqrt{u_n - 2}\right)$

لدينا $3 \le u_n \le 11$

ومنه $1 \le \sqrt{u_n - 2} \le 3$

أي $\sqrt{u_n - 2} \ge 0$ ....(1)

ولدينا $1 \le \sqrt{u_n - 2} \le 3$

أي $0 \ge 1 - \sqrt{u_n - 2} \ge -2$ ....(2)

من (1) و(2) نجد أن: $u_{n+1} - u_n \le 0$

ومنه المتتالية (u_n) متناقصة

5-استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة

بما أن المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 3 لأن: $3 \le u_n \le 11$ فهي متقاربة نحو نهاية l

تعيين $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

بما أن (u_n) متتالية متقاربة فإن:

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = l$

أي $l = \sqrt{l - 2} + 2 \Leftarrow l - 2 = \sqrt{l - 2}$

بتربيع الطرفين: $(l-2)^2 = \left(\sqrt{l - 2}\right)^2$

$l^2 + 4 - 4l = l - 2$

ومنه $l^2 - 5l + 6 = 0$

$\Delta = 25 - 4(6) = 1$

$l_1 = \frac{5-1}{2(1)} = 2$ مرفوضة لكن $3 \le u_n \le 4$

$l_2 = \frac{(5+1)}{2(1)} = 3$

ومنه $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$

ومنه $l = 3$

6-أ-نبرهن أن

$$0 \le u_{n+1} - 3 \le \frac{1}{2}(u_n - 3)$$

لدينا من البرهان بالتراجع: $3 \le u_n \le 11$

وكذلك $3 \le u_{n+1} \le 11$

$0 \le u_{n+1} - 3$ ......(1)

أي

$u_{n+1} - 3 \le \frac{1}{2}(u_n - 3)$

لدينا $u_{n+1} - 3 = \sqrt{u_n - 2} + 2$

$u_{n+1} - 3 = \sqrt{u_n - 2} - 1 \times \left(\frac{\sqrt{u_n - 2} + 1}{\sqrt{u_n + 2} + 1}\right)$

بالضرب بالمرافق نجد:

$u_{n+1} - 3 = \frac{(u_n - 3)}{\sqrt{u_n - 2} + 1}$

لدينا $3 \le u_n$

ومنه $2 \leq \sqrt{u_n - 2} + 1$.

بقلب المتباينة أي نحصل على: $\frac{1}{\sqrt{u_n-2}+1} \leq \frac{1}{2}$

ولدينا $0 \leq u_n - 3$

ومنه $\frac{(u_n-3)}{\sqrt{u_n-2}+1} \leq \frac{1}{2}(u_n - 3)$

ومنه $(2)......u_{n+1} - 3 \leq \frac{1}{2}(u_n - 3)$

من (1) و(2) نجد أن:

$$\mathbf{0 \leq u_{n+1} - 3 \leq \frac{1}{2}(u_n - 3)}$$

6-ب-استنتاج أن $0 \leq u_n - 3 \leq 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$

لدينا $0 \leq u_{n+1} - 3 \leq \frac{1}{2}(u_n - 3)$

من أجل $n = 0$ $0 \leq u_1 - 3 \leq \frac{1}{2}(u_0 - 3)$

من اجل $n = 1$ $0 \leq u_2 - 3 \leq \frac{1}{2}(u_1 - 3)$

من اجل $n = 2$ $0 \leq u_3 - 3 \leq \frac{1}{2}(u_2 - 3)$

. . . . . .

. . . . . .

من أجل $n = n - 1$ $0 \leq u_n - 3 \leq \frac{1}{2}(u_{n-1} - 3)$

بالضرب عموديا طرف لطرف نحصل على

$$0 \leq (u_1 - 3)(u_2 - 3)(u_3 - 3)\ldots(u_n - 3)$$
$$\leq \frac{1}{2}(u_0 - 3) \times \frac{1}{2}(u_1 - 3) \times \frac{1}{2}(u_2 - 3)\ldots$$
$$\times \frac{1}{2}(u_{n-1} - 3)$$

ومنه بالاختزال نجد

$$0 \leq (u_n - 3) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - 3)$$

مع $u_0 = 11$

ومنه $u_n - 3 \leq 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$

تعيين نهاية المتتالية (u_n)

لدينا $0 \leq u_n - 3 \leq 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$

لكن $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

لأن $-1 < \frac{1}{2} < 1$

أي حسب مبرهنة الحصر فإنه $\lim_{n\to+\infty} u_n - 3 = 0$

أي $\lim_{n\to+\infty} u_n = 3$

.91 متتالية مقترحة رقم:17

الإسم على اليوتيوب: مواضيع مقترحة في الرياضيات في المتتاليات لبكالوريا2017(ع ت+ر+ت ر)رقم31

-لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة بـ: $u_0 = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$

من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_{n+1} = 1 + \sqrt[3]{u_n - 1}$$

1-برهن باستعمال الاستدلال بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $1 < u_n < 2$.

2-تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt[3]{u_n - 1}\left(1 - \sqrt[3]{u_n - 1}\right)\left(1 + \sqrt[3]{u_n - 1}\right)$$

3-بيّن أنّ (u_n) متزايدة

4-استنتج أن (u_n) متقاربة.

II-نضع: $v_n = \ln(u_n - 1)$

1-تحقق أن $v_0 = -\frac{1}{3}$ ثم بيّن أنّ (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{3}$.

2-أكتب v_n بدلالة n ثم إستنتج $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

الحل

1-البرهان باستعمال الاستدلال بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $1 < u_n < 2$

نسمي $p(n)$ الخاصية: $1 < u_n < 2$

تحقق من أجل $n = 0$ لدينا $1 < u_0 = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{e}} < 2$ ومنه $p(0)$ محققة

نفرض أن $p(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n

أي: $1 < u_n < 2$ ونبرهن صحة $p(n+1)$

أي: $1 < u_{n+1} < 2$

لدينا من الفرضية $1 < u_n < 2$

ومنه: $0 < u_n - 1 < 1$

$$0 < \sqrt[3]{u_n - 1} < 1$$

$$1 < 1 + \sqrt[3]{(u_n - 1)} < 2$$

أي $1 < u_{n+1} < 2$ ومنه $p(n+1)$ محققة

إذن $1 < u_n < 2$ من أجل كل عدد طبيعي n

2- التحقق أن:

$u_{n+1} - u_n = \left(\sqrt[3]{u_n - 1}\right)\left(1 - \sqrt[3]{u_n - 1}\right)\left(1 + \sqrt[3]{u_n - 1}\right)$

من أجل كل عدد طبيعي n

لدينا: $u_{n+1} = 1 + \sqrt[3]{u_n - 1}$

ومنه:

$$u_{n+1} - u_n = \left(1 + \sqrt[3]{u_n - 1}\right) - u_n$$
$$= \sqrt[3]{u_n - 1} - (u_n - 1)$$

$$= \sqrt[3]{u_n - 1}\left(1 - \left(\sqrt[3]{u_n - 1}\right)^2\right)$$

إذن

$$u_{n+1} - u_n = \left(\sqrt[3]{u_n - 1}\right)\left(1 - \sqrt[3]{u_n - 1}\right)\left(1 + \sqrt[3]{u_n - 1}\right)$$

3-تبيان أن (u_n) متزايدة

يكفي أن نبرهن أن $u_{n+1} - u_n \geq 0$

لدينا: $1 < u_n < 2$

و

$$u_{n+1} - u_n = \left(\sqrt[3]{u_n - 1}\right)\left(1 - \sqrt[3]{u_n - 1}\right)\left(1 + \sqrt[3]{u_n - 1}\right)$$

انطلاقا من: $1 < u_n < 2$

نجد $0 < \sqrt[3]{u_n - 1} < 1$

ومنه $1 < \sqrt[3]{u_n - 1} + 1 < 2$

ومنه $0 < 1 - \sqrt[3]{u_n - 1} < 1$

إذن:

$$\sqrt[3]{u_n - 1}\left(1 - \sqrt[3]{u_n - 1}\right)\left(1 + \sqrt[3]{u_n - 1}\right) > 0$$

ومنه $u_{n+1} - u_n > 0$

ومنه (u_n) متزايدة تماما

4-استنتاج أن (u_n) متقاربة:

بما أن (u_n) متتالية متزايدة تماما محدودة من الأعلى بالعدد2 فهي متقاربة نحو نهاية l

1-التحقق أن $v_0 = -\frac{1}{3}$

$$v_0 = \ln(u_0 - 1) = \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{e}} - 1\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{\sqrt[3]{e}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{(e)^{\frac{1}{3}}}\right)$$

$$= \ln e^{-\frac{1}{3}}$$

$$= -\frac{1}{3}$$

تبيان أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$

تكون (v_n) هندسية إذا كان $v_{n+1} = q.v_n$

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 1) = \ln(1 + \sqrt[3]{u_n - 1} - 1)$$

$$= \ln\left(\sqrt[3]{u_n - 1}\right)$$

$$= \ln(u_n - 1)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{3}\ln(u_n - 1)$$

$$= \frac{1}{3}v_n$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$

2-كتابة v_n بدلالة n :-

$$v_n = v_0 q^n = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n = -\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$$

لأن $-1 < \frac{1}{3} < 1$

استنتاج $\lim_{n \to +\infty} u_n$

$$v_n = \ln(u_n - 1)$$

$$u_n - 1 = e^{v_n}$$

$$u_n = e^{v_n} + 1$$

ومنه

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} (e^{v_n} + 1) = 1 + 1 = 2$$

إذن $\lim_{n \to +\infty} u_n = 2$

.92 متتالية مقترحة رقم:18

الإسم على اليوتيوب: مواضيع مقترحة في الرياضيات في المتتاليات لبكالوريا 2019(عت+ر+تر) رقم 11

ليكن α عدد حقيقي حيث: $0 < \alpha < 1$

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 2$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{(1+\alpha)u_n - \alpha}{u_n}$

1-أ-برهن بالتراجع أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$:

$$u_n \geq 1$$

1-ب-أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة وأحسب نهايتها

2- (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n - \alpha}$

2-أ-بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0

2-ب-اكتب v_n ثم u_n بدلالة n و α

2-جـ-أحسب من جديد نهاية المتتالية (u_n)

3-أ-احسب المجموع S_n بدلالة n و α ،

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$

3-ب-احسب المجموع S_n' بدلالة n و α ،

$$S_n' = v_0 + \frac{v_1}{\alpha} + \frac{v_2}{\alpha^2} + \cdots + \frac{v_2}{\alpha^n}$$

3-جـ-استنتج بدلالة n و α المجموع H_n

$$H_n = \frac{1}{u_0 - \alpha} + \frac{1}{u_1 - \alpha} + \cdots + \frac{1}{u_n - \alpha}$$

الحل

1-أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_n \geq 1$

ط1:

نسمي $p(n)$ الخاصية " $u_n \geq 1$ "

تحقق من أجل $n = 0$ نجد $u_0 = 2 > 1$

أي $p(0)$ محققة

نفرض أن $p(n)$ محققة من أجل كل n من $\mathbb{N}$ أي $u_n \geq 1$

ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي $u_{n+1} \geq 1$

أي $u_{n+1} - 1 \geq 0$

$$u_{n+1} - 1 = \frac{(1+\alpha)u_n - \alpha}{u_n} - 1$$

$$= \frac{(1+\alpha)u_n - \alpha - u_n}{u_n}$$

$$= \frac{u_n + \alpha u_n - \alpha - u_n}{u_n}$$

$$= \frac{\alpha(u_n - 1)}{u_n}$$

لدينا من الفرضية: $u_n \geq 1$ أي $u_n - 1 \geq 0$

بما أن $0 < \alpha$

إذن: $\frac{\alpha(u_n-1)}{u_n} \geq 0$

ومنه: $u_{n+1} - 1 \geq 0$

أي $u_{n+1} \geq 1$ ومنه: $p(n+1)$ محققة

وأخيرا $u_n \geq 1$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

ط2

لدينا $u_{n+1} = \frac{(1+\alpha)u_n - \alpha}{u_n}$

$$\begin{array}{r|l} (1+\alpha)u_n - \alpha & u_n \\ \hline -\ (1+\alpha)u_n & 1+\alpha \\ \hline -\alpha & \end{array}$$

ومنه $u_{n+1} = (1+\alpha) - \frac{\alpha}{u_n}$

لدينا من الفرضية: $u_n \geq 1$ ومنه $\frac{1}{u_n} \leq 1$

$0 < \alpha < 1$

ومنه $-\frac{\alpha}{u_n} \geq -\alpha$

أي $(1+\alpha) - \frac{\alpha}{u_n} \geq 1 + \alpha - \alpha$

إذن $(1+\alpha) - \frac{\alpha}{u_n} \geq 1$

ومنه $u_{n+1} \geq 1$

$p(n+1)$ محققة وأخيرا $u_n \geq 1$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$

1-ب-دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n)

ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(1+\alpha)u_n - \alpha}{u_n} - u_n$$

$$= \frac{(1+\alpha)u_n - \alpha - u_n^2}{u_n}$$

$$= \frac{-u_n^2 + (1+\alpha)u_n - \alpha}{u_n}$$

$$\Delta = (1+\alpha)^2 - 4(-1)(-\alpha)$$

$$= \alpha^2 - 2\alpha + 1$$

$$= (\alpha - 1)^2$$

لدينا $0 < \alpha < 1$: $\sqrt{(\alpha-1)^2} = |\alpha - 1|$

ومنه $\sqrt{\Delta} = 1 - \alpha$

$$u_{n_1} = \frac{-(1+\alpha) - (1-\alpha)}{2(-1)} = -\frac{2}{-2} = 1$$

$$u_{n_2} = \frac{-(1+\alpha) + (1-\alpha)}{2(-1)} = \frac{-2\alpha}{-2} = \alpha$$

$$-u_n^2 + (1+\alpha)u_n - \alpha = -(u_n - 1)(u_n - \alpha)$$

ومنه $u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n-1)(u_n-\alpha)}{u_n}$

ولدينا $0 < \alpha < 1$ و $u_n \geq 1$

ومنه: $u_n - 1 \geq 0$

إذن $-\frac{(u_n-1)(u_n-\alpha)}{u_n} \leq 0$

ومنه $u_{n+1} - u_n \leq 0$

أي أن المتتالية (u_n) متناقصة

استنتاج أنها متقاربة

بما أن (u_n) متتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 1 (لأن: $u_n \geq 1$)

ومنه: فهي متقاربة نحو نهاية l

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

بما أن (u_n) متتالية متقاربة نحو l فإن:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$$

ومنه $l = \frac{(1+\alpha)l - \alpha}{l}$

ومنه $\frac{(1+\alpha)l - \alpha}{l} - l = 0$

$$\frac{(1+\alpha)l - \alpha - l^2}{l} = 0$$

$$\frac{-l^2 + (1+\alpha)l - \alpha}{l} = 0$$

ومنه $-l^2 + (1+\alpha)l - \alpha = 0$ و $l \neq 0$

من الجواب السابق نجد: $l = 1$ أو $l = \alpha$

لكن $l = \alpha$ مرفوض لأن $u_n \geq 1$ و $\alpha < 1$

ومنه $l = 1$ أي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

2-أ-تبيان أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول:

لدينا $v_n = \frac{u_n-1}{u_n-\alpha}$

تكون (v_n) متتالية هندسية إذا وفقط إذا تحقق:

$$v_{n+1} = q\, v_n$$

$$v_{n+1} = \left(\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}-\alpha}\right) = \frac{\frac{(1+\alpha)u_n-\alpha}{u_n}-1}{\frac{(1+\alpha)u_n-\alpha}{u_n}-\alpha}$$

$$= \frac{\frac{(1+\alpha)u_n-u_n-\alpha}{u_n}}{\frac{(1+\alpha)u_n-\alpha u_n-\alpha}{u_n}}$$

$$= \frac{\alpha u_n-\alpha}{u_n-\alpha}$$

$$= \alpha\frac{u_n-1}{u_n-\alpha}$$

$$v_{n+1} = \alpha v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \alpha$

وحدها الأول $v_0 = \frac{u_0-1}{u_0-\alpha} = \frac{1}{2-\alpha}$ مع $0 < \alpha < 1$

2-ب-كتابة v_n بدلالة n و α:

$$v_n = v_0 q^n$$

$$v_n = \frac{1}{2-\alpha}\alpha^n$$

كتابة (u_n) بدلالة n لدينا: $v_n = \frac{u_n-1}{u_n-\alpha}$

ومنه $u_n - 1 = v_n(u_n-\alpha)$

$u_n - 1 = v_n u_n - \alpha v_n$

أي $u_n - v_n u_n = 1 - \alpha v_n$

$u_n(1-v_n) = 1-\alpha v_n$

ومنه $u_n = \frac{1-\alpha v_n}{1-v_n}$

إذن: $u_n = \frac{1-\frac{\alpha}{2-\alpha}\alpha^n}{1-\frac{1}{2-\alpha}\alpha^n}$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1-\frac{\alpha}{2-\alpha}\alpha^n}{1-\frac{1}{2-\alpha}\alpha^n}\right) = 1$$

لأن $0 < \alpha < 1$ أي أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha^n = 0$

3-أ-حساب المجموع S_n بدلالة n و α

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$

S_n عبارة عن مجموع لحدود متتابعة لمتتالية هندسية

أساسها $q = \alpha$ وحدها الأول $v_0 = \frac{1}{2-\alpha}$

$$S_n = v_0\frac{q^{n+1}-1}{q-1} = \frac{1}{2-\alpha}\,\frac{\alpha^{n+1}-1}{\alpha-1}$$

3-ب-حساب المجموع $S_n{}'$ بدلالة n:

$$S'_n = v_0 + \frac{v_1}{\alpha} + \frac{v_2}{\alpha^2} + \cdots + \frac{v_n}{\alpha^n}$$

لدينا $\frac{v_n}{\alpha^n} = \frac{\frac{1}{2-\alpha}\alpha^n}{\alpha^n} = \frac{1}{2-\alpha}$

$\frac{1}{2-\alpha}$ ثابت إذن: $S'_n = \frac{1}{2-\alpha} + \frac{1}{2-\alpha} + \cdots + \frac{1}{2-\alpha}$

$$S'_n = \frac{1}{2-\alpha}(n+1)$$

3-ج-إستنتاج بدلالة n و α المجموع H_n:

$$H_n = \frac{1}{u_0-\alpha} + \frac{1}{u_1-\alpha} + \cdots + \frac{1}{u_n-\alpha}$$

لدينا $v_n = \frac{u_n-1}{u_n-\alpha}$ ومنه $v_n = \frac{u_n-1+\alpha-\alpha}{u_n-\alpha}$

$= \frac{u_n-\alpha}{u_n-\alpha} + \frac{\alpha-1}{u_n-\alpha}$

$= 1 + \frac{\alpha-1}{u_n-\alpha}$

ومنه $v_n = 1 + \frac{\alpha-1}{u_n-\alpha}$

ومنه $v_n - 1 = \frac{\alpha-1}{u_n-\alpha}$ ، نضرب في $\left(\frac{1}{\alpha-1}\right)$ فنجد:

$$\frac{v_n-1}{\alpha-1} = \frac{1}{u_n-\alpha}$$

إذن: $\frac{1}{u_n-\alpha} = \frac{v_n-1}{\alpha-1}$

ومنه $H_n = \frac{v_0-1}{\alpha-1} + \frac{v_1-1}{\alpha-1} + \cdots + \frac{v_n-1}{\alpha-1}$

$$H_n = \frac{(v_0+v_1+\cdots.+v_n)+(-1-1\ldots.1)}{\alpha-1}$$

$$H_n = \frac{S_n-1(n+1)}{\alpha-1}$$

ومنه $H_n = \frac{\frac{1}{2-\alpha}\times\frac{\alpha^{n+1}-1}{\alpha-1}-(n+1)}{\alpha-1}$

93. متتالية مقترحة رقم:19

الإسم على اليوتيوب: مواضيع مقترحة في الرياضيات في المتتاليات لبكالوريا 2019(عت+ر+تر) رقم 10

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = 4$

ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3u_n}{2+u_n}$

1-عين العددين الحقيقيين α و β بحيث يكون من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \alpha + \frac{\beta}{2+u_n}$

2-أ-برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$1 < u_n \leq 4$

2-ب-أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

ثم استنتج أنها متقاربة ، أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3-أ-بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1} - 1 = \frac{2(u_n - 1)}{2 + u_n}$$

3-ب-عين عددا حقيقيا k من المجال $]0;1[$ بحيث:

$0 < u_{n+1} - 1 < k(u_n - 1)$

3-جـ-استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$0 < u_n - 1 < 3k^n$

ثم استنتج مرة أخرى $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

الحل

1-تعيين العددين الحقيقيين a و b بحيث:

$$u_{n+1} = \alpha + \frac{\beta}{2 + u_n}$$

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{2 + u_n}$$
$$= \frac{(3u_n + 6 - 6)}{2 + u_n}$$
$$= \frac{3(u_n + 2)}{2 + u_n} - \frac{6}{2 + u_n}$$
$$= 3 - \frac{6}{2 + u_n}$$

بالمطابقة نجد $\alpha = 3$ و $\beta = -6$

2-أ-البرهان بالتراجع أن $1 < u_n \leq 4$

نسمي $p(n)$ الخاصية "$1 < u_n \leq 4$"

من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = 4$ و $1 < 4 \leq 4$

ومنه $1 < u_0 \leq 4$ إذن $p(0)$ محققة

نفرض أن $p(n)$ محققة من أجل كل n من $\mathbb{N}$

أي $1 < u_n \leq 4$ ونبرهن أن $p(n+1)$ صحيحة

أي $1 < u_{n+1} \leq 4$

لدينا من الفرضية $1 < u_n \leq 4$

$3 < 2+u_n \leq 6$

ومنه

$\frac{1}{6} \leq \frac{1}{2+u_n} < \frac{1}{3}$

$-\frac{6}{3} < -\frac{6}{2+u_n} \leq -\frac{6}{6}$

$3 - \frac{6}{3} < 3 - \frac{6}{2+u_n} \leq 3 - \frac{6}{6}$

$1 < u_{n+1} \leq 2 \leq 4$

ومنه $p(n+1)$ محققة

إذن $1 < u_n \leq 4$ مهما يكن $n \in \mathbb{N}$

2-ب-دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n)

ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n}{2 + u_n} - u_n$$
$$= \frac{3u_n - 2u_n - u_n^2}{2 + u_n}$$
$$= \frac{-u_n^2 + u_n}{2 + u_n}$$
$$= \frac{u_n(-u_n + 1)}{2 + u_n}$$

لدينا

$0 < 1 < u_n$

$-u_n + 1 < 0$

و

$0 < 3 < 2 + u_n$

ومنه

$\frac{u_n(-u_n+1)}{2+u_n} < 0$

معناه $u_{n+1} - u_n < 0$ أي المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

استنتاج أن (u_n) متقاربة

بما أن (u_n) متتالية متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد 1 لأن: $1 < u_n \leq 4$

فهي متقاربة نحو نهايتها l

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

بما أن (u_n) متتالية متقاربة نحو نهايتها l فإن

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$

أي نحل المعادلة

$$l = \frac{3l}{2 + l}$$
$$\frac{3l}{2 + l} - l = 0$$
$$\frac{3l - 2l - l^2}{2 + l} = 0$$
$$\frac{l - l^2}{l + 2} = 0$$

ومنه

$$l(1 - l) = 0$$

مرفوض $l = 0 < 1$

$$1 - l = 0$$

مقبول $l = 1$

لأن $1 < u_n \leq 4$

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

3-أ-البرهان أن $u_{n+1} - 1 = \frac{2(u_n-1)}{2+u_n}$

$$u_{n+1} - 1 = \frac{3u_n}{2+u_n} - 1$$
$$= \frac{3u_n - 2 - u_n}{2+u_n}$$
$$= \frac{2u_n - 2}{u_n+2}$$
$$= \frac{2(u_n-1)}{u_n+2}$$

3-ب-تعيين عدد حقيقي k من المجال $]0;1[$ بحيث:
$$0 < u_{n+1} - 1 < k(u_n - 1)$$

لدينا مما سبق $u_{n+1} - 1 = \frac{2(u_n-1)}{2+u_n}$

ولدينا من البرهان بالتراجع $1 < u_{n+1} \leq 4$

$u_{n+1} - 1 > 0$ ....(1)

لدينا $1 + 2 \leq 2 + u_n \leq 4 + 2$

$$\frac{1}{6} \leq \frac{1}{2+u_n} \leq \frac{1}{3}$$
$$\frac{2}{6} \leq \frac{2}{2+u_n} \leq \frac{2}{3}$$

ومن البرهان بالتراجع $1 < u_n$ ومنه $u_n - 1 > 0$

نضرب في $(u_n - 1)$ نجد

$$\frac{2}{6}(u_n - 1) \leq \frac{2(u_n-1)}{2+u_n} < \frac{2}{3}(u_n - 1)$$
$$0 < u_{n+1} - 1 < \frac{2}{3}(u_n - 1)$$

ومنه $k = \frac{2}{3}$ حيث $0 < \frac{2}{3} < 1$

3-جـ-استنتاج أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$:
$$0 < u_n - 1 < 3k^n$$

أي
$$0 < u_n - 1 < 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

لدينا مما سبق $0 < u_{n+1} - 1 < \frac{2}{3}(u_n - 1)$

من أجل $n = 0$ $\quad 0 < u_0 - 1 < \frac{2}{3}(u_0 - 1)$

من أجل $n = 1$ $\quad 0 < u_1 - 1 < \frac{2}{3}(u_1 - 1)$

.

.

من أجل $n = n - 1$ $\quad 0 < u_n - 1 < \frac{2}{3}(u_{n-1} - 1)$

بالضرب طرفا لطرف نجد

$$0 < u_n - 1 < \left(\frac{2}{3}\right)^n (u_0 - 1)$$
$$0 < u_n - 1 < \left(\frac{2}{3}\right)^n (4 - 1)$$

حيث $k = \frac{2}{3}$ ومنه $0 < u_n - 1 < 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$

استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ مرة أخرى

لدينا مما سبق $0 < u_n - 1 < 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$

و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ لأن: $-1 < \frac{2}{3} < 1$

ومنه

$$0 < \lim_{n\to+\infty}(u_n - 1) < \lim_{n\to+\infty} 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

حسب مبرهنة الحصر فإن

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n - 1) = 0$$

أي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

.94 متتالية مقترحة رقم:20

الإسم على اليوتيوب: مواضيع مقترحة في الرياضيات في المتتاليات لبكالوريا 2017(ع ت+ر+ ت ر)رقم6

(u_n) متتالية عددية معرفة بـ: $u_0 = \alpha$ حيث α عدد حقيقي و من أجل كل عدد طبيعي n،

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 2$$

I-عين قيمة العدد الحقيقي α بحيث تكون (u_n) متتالية ثابتة

II-في ما يلي نفرض أن $u_0 = 3$

1-احسب u_3, u_2, u_1 خمن اتجاه تغير المتتالية (u_n)

2-برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فان: $u_n \geq -4$، ثم ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

3-هل (u_n) متقاربة ؟ حدد نهايتها

4-لتكن (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n + 4$

أ-برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب-أحسب عبارة v_n بدلالة n

جـ- أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n - 4$، أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

د-احسب بدلالة n المجموع:

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

الحل

1-تعيين قيمة α:

حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة يجب أن:

$u_{n+1} = u_n = u_0 = \alpha$

ومنه $\frac{u_n}{2} - 2 = u_n = \alpha$

أي $\frac{\alpha}{2} - 2 = \alpha$

ومنه $\alpha = -4$

1-حساب u_1 ، u_2 ، u_3

لدينا $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 2$

$u_{0+1} = u_1 = \frac{1}{2}u_0 - 2 = \frac{3}{2} - 2$

ومنه $u_1 = -\frac{1}{2}$

من أجل $n = 1$

$u_{1+1} = u_2 = \frac{1}{2}u_1 - 2 = \frac{1}{2} \times \frac{-1}{2} - 2 = -\frac{9}{4}$

من أجل $n = 2$

$u_{2+1} = u_3 = \frac{1}{2}u_2 - 2 = \frac{1}{2} \times \frac{-9}{4} - 2$

$= -\frac{25}{8}$

تخمين اتجاه تغير (u_n)

لدينا $u_0 > u_1 > u_2$

يبدو أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما

2-البرهان بالتراجع أن: $u_n \geq -4$

نسمي $p(n)$ الخاصية $u_n \geq -4$

من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = 3$ و $3 \geq -4$ ومنه $p(0)$ محققة

ونفرض صحة $p(n)$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي $u_{n+1} \geq -4$

لدينا $u_n \geq -4$

ومنه $\frac{1}{2}u_n \geq -2$

أي $\frac{1}{2}u_n - 2 \geq -4$

أي $u_{n+1} \geq -4$

ومنه $p(n+1)$ محققة

إذن $u_n \geq -4$ مهما يكن n من $\mathbb{N}$

دراسة اتجاه تغير (u_n)

لدينا $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n - 2 - u_n$

$= \frac{-u_n - 4}{2} = -\frac{1}{2}(u_n + 4)$

لدينا $u_n \geq -4$

ومنه $u_n + 4 \geq 0$

أي $-\frac{1}{2}(u_n + 4) \leq 0$

ومنه (u_n) متناقصة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

3-دراسة تقارب (u_n)

بما أن (u_n) متتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد -4 فهي متقاربة

تحديد $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

بما أن (u_n) متقاربة فإن:

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$

ومنه $l = \frac{1}{2}l - 2$

$l - \frac{1}{2}l = -2$

ومنه $l = -4$

أي $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -4$

4-أ-البرهان أن (v_n) هندسية:

(v_n) هندسية أي: $v_{n+1} = v_n q$

لدينا $v_{n+1} = u_{n+1} + 4 = \frac{1}{2}u_n - 2 + 4$

ومنه $= \frac{1}{2}u_n + 2$

أي $= \frac{1}{2}(u_n + 4)$

ومنه $= \frac{1}{2}v_n$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$

حساب v_0

لدينا $v_n = u_n + 4$

ومنه $v_0 = u_0 + 4$

أي $v_0 = 3 + 4 = 7$

4-ب-كتابة عبارة v_n بدلالة n:

(v_n) متتالية هندسية ومنه $v_n = v_0 q^n$

أي $v_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n$

4-جـ-البرهان أن $u_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n - 4$

لدينا $v_n = u_n + 4$

ومنه $u_n = v_n - 4$

أي $u_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n - 4$

حساب: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty}\left(7\left(\frac{1}{2}\right)^n - 4\right)$$

لدينا $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

لأن $0 < \frac{1}{2} < 1$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -4$$

حساب S_n

لدينا $v_n = u_n + 4$

ومنه $u_n = v_n - 4$

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

$$S_n = v_0 - 4 + v_1 - 4 + v_2 - 4 + \cdots + v_n - 4$$

بما أن (v_n) هندسية فإن:

$$S_n = v_0\left(\frac{(1-q^{n+1})}{1-q}\right) - 4(n+1)$$

ومنه $S_n = 7\left(\frac{\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}{1-\frac{1}{2}}\right) - 4(n+1)$

ومنه $S_n = 14\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) - 4(n+1)$

.95 متتالية مقترحة رقم 21

الاسم على اليوتيوب: المتتاليات و البرهان بالتراجع رقم 23

(u_n) متتالية عددية معرفة بما يلي: $u_0 = 6$

ومن أجل كل عدد طبيعي n حيث:

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$$

1) أحسب u_1, u_3, u_2. ثم بيّن أنّ المتتالية (u_n) ليست حسابية و ليست هندسية.

2) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن:

$$u_n \geq 3$$

ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

ج) استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة ثم أحسب نهايتها.

3) نعرف من أجل كل عدد طبيعي n المتتالية العددية (v_n) بـ: $v_n = \ln(u_n + a)$ حيث a عدد حقيقي.

أ) عيّن قيمة العدد a بحيث تكون المتتالية (v_n) حسابية أساسها $r = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$.

ب) نضع $a = -3$.

أحسب v_0 ثم أكتب عبارة الحد العام لـ v_n بدلالة n.

ج) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n

$$u_n = \frac{1}{(3)^{n-1}} + 3$$

د) أحسب نهاية المتتالية (u_n).

هـ) أحسب بدلالة n المجموع S_n:

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

الحل

1-حساب $u_1 . u_2 . u_3$:

لدينا: $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2,\ u_0 = 6$

ومنه: $u_1 = u_{0+1} = \frac{1}{3}u_0 + 2 = \frac{1}{3}(6) + 2$

$$u_1 = 4$$

$$u_2 = u_{1+1} = \frac{1}{3}u_1 + 2 = \frac{1}{3}(4) + 2 = \frac{4}{3} + 2$$

ومنه: $u_2 = \frac{10}{3}$

$$u_3 = u_{2+1} = \frac{1}{3}u_2 + 2 = \frac{1}{3}\left(\frac{10}{3}\right) + 2$$

$$= \frac{10}{9} + 2$$

$$u_3 = \frac{28}{9}$$

$$u_4 = u_{3+1} = \frac{1}{3}(u_3) + 2 = \frac{1}{3}\left(\frac{28}{9}\right) + 2$$

$$u_4 = \frac{82}{27}$$

تبيان أن المتتالية (u_n) ليست حسابية:

حتى تكون المتتالية (u_n) ليست حسابية يكفي أن نجد

$$u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$$

$$u_1 - u_0 = 4 - 6 = -2$$

$$u_2 - u_1 = \frac{10}{3} - 4 = \frac{-2}{3}$$

$-2 \neq \frac{-2}{3}$ ومنه (u_n) ليست متتالية حسابية

-تبيان أن المتتالية (u_n) ليست هندسية:

حتى تكون (u_n) ليست هندسية يكفي أن نبين أن:

$$\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$$

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{10}{3}}{4} = \frac{10}{3}.\frac{1}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

ومنه بما أن: $\frac{2}{3} \neq \frac{5}{6}$ فإن (u_n) ليست هندسية

2-أ-البرهان بالتراجع:

نسمي $P(n)$ الخاصية "$u_n \geq 3$" من أجل كل عدد $n \in \mathbb{N}$

من أجل $n = 0$، لدينا $u_0 = 6$ و $6 \geq 3$ ومنه $P(0)$ محققة

- نفرض أن $P(n)$ محققة من أجل كل n من $\mathbb{N}$

أي $u_n \geq 3$

ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $u_{n+1} \geq 3$

لدينا: $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$

و من الفرضية لدينا $u_n \geq 3$

ومنه $\frac{u_n}{3} \geq \frac{3}{3}$

$$\frac{u_n}{3} + 2 \geq 1 + 2$$

أي $u_{n+1} \geq 3$ ومنه $P(n+1)$ محققة

إذن $u_n \geq 3$ من أجل كل عدد طبيعي n

2-ب-دراسة اتجاه تغير (u_n):

لدينا:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}u_n + 2 - u_n$$

$$= \frac{-2u_n+6}{3}$$

$$= \frac{-2(u_n-3)}{3} = -\frac{2}{3}(u_n - 3) \leq 0$$

لدينا $u_n \geq 3$ (من البرهان بالتراجع)

ومنه: $u_{n+1} - u_n \leq 0$

أي (u_n) متناقصة تماما

2-جـ-تبيان أن (u_n) متقاربة:

بما أن (u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل بالعدد 3 ($u_n \leq 3$) فهي متقاربة نحو نهاية ℓ

-حساب نهاية (u_n):

بما أن (u_n) متقاربة فإن:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$$

$$\frac{1}{3}\ell + 2 = l$$

$$\ell = \frac{6}{2}$$

$$\ell = 3$$

ومنه: $\lim_{n\to+\infty} u_n = 3$

3-أ- تعيين قيمة α حتى تكون (v_n) حسابية أساسها $r = \ln\frac{1}{3}$

طريقة1:

(v_n)حسابية أي: $v_{n+1} = v_n + r$

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1} + \alpha) = \ln\left(\frac{1}{3}u_n + 2 + \alpha\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{3}(u_n + 6 + 3\alpha)\right)$$

$$v_{n+1} = \ln\frac{1}{3} + \ln(u_n + 6 + 3\alpha)$$

ولدينا: $v_n = \ln(u_n + \alpha)$

ومنه يجب أن تكون $6 + 3\alpha = \alpha$

أي $2\alpha = -6$

$$\alpha = -\frac{6}{2}$$

$$\alpha = -3$$

ومنه حتى تكون (v_n) متتالية حسابية يجب أن تكون

$$\alpha = -3$$

طريقة2:

(v_n) حسابية أي: $v_{n+1} = v_n + r$

لدينا: $v_n = \ln(u_n + \alpha)$

ومنه $e^{v_n} = u_n + \alpha$

$$u_n = e^{v_n} - \alpha$$

$$v_{n+1} = \ln\left(\frac{1}{3}u_n + 2 + \alpha\right)$$

ومنه ومن (1):

$$v_{n+1} = \ln\frac{1}{3}\left((e^{v_n} - \alpha + 6 + 3\alpha)\right)$$

$$= \ln\frac{1}{3} + \ln e^{v_n}\left(1 + \frac{6}{e^{v_n}} + \frac{2\alpha}{e^{v_n}}\right)$$

$$= \ln\frac{1}{3} + v_n + \ln\left(1 + \frac{6}{e^{v_n}} + \frac{2\alpha}{e^{v_n}}\right)$$

ومنه تكون (v_n) متتالية حسابية إذا و فقط:

$$\ln\left(1 + \frac{6}{e^{v_n}} + \frac{2\alpha}{e^{v_n}}\right) = 0$$

باستعمال الأسية: $1 + \frac{6+2\alpha}{e^{v_n}} = 1 \Rightarrow \frac{6+2\alpha}{e^{v_n}} = 0$

أي: $6 + 2\alpha = 0$ ومنه: $\alpha = -3$

4-أ-حساب v_0:

لدينا: $u_0 = 6\,,\quad v_n = \ln(u_n - 3)$

ومنه: $v_0 = \ln 3$

عبارة الحد العام:

نعلم أن: $v_n = v_p + (n-p)r$ مع $n \geq p$

ومنه $v_n = v_0 + nr$

أي $v_n = ln3 + nln\left(\frac{1}{3}\right)$

$$v_n = (1-n)ln3$$

4-ب-البرهان أن $u_n = \frac{1}{3^{n-1}} + 3$

لدينا: $e^{v_n} = e^{\ln(u_n - 3)}$

$$e^{ln3^{1-n}} = u_n - 3$$

$$u_n = \frac{1}{3^{-(1-n)}} + 3$$

4-جـ-حساب نهاية (u_n):

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3^{-(1-n)}} + 3 = 3$$

لأن: $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 0$

حساب S_n:

$$S_2 = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

لدينا: $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 3$

ومنه من أجل $n = 0$: $u_0 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + 3$

من أجل $n = 1$ $u_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^{0} + 3$

من أجل $n = 2$: $u_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^{1} + 3$

.

.

من أجل $n = n$: $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 3$

بالجمع نجد:

$$S_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + 3 + \left(\frac{1}{3}\right)^{0} + 3 + \left(\frac{1}{3}\right)^{1} + 3 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 3$$

$$S_n = 3 + 3 + 3 + \cdots + 3 + \left(+\frac{1}{3}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{0} + \left(\frac{1}{3}\right)^{1} + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

لدينا: $\left[\left(+\frac{1}{3}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{0} + \left(\frac{1}{3}\right)^{1} + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]$

مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية $W_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

أساسها $q = \frac{1}{3}$ وحدها الأول $W_0 = 3$

ومنه: $S_n = 3(n+1) + 3\left[\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1+1+1} - 1}{\frac{1}{3} - 1}\right]$

$$S_n = 3(n+1) - \frac{9}{2}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1\right]$$

96. متتالية مقترحة رقم:22

الإسم على اليوتيوب: مواضيع مقترحة في الرياضيات في المتتاليات لبكالوريا 2017(ع ت+ر+ت ر)رقم26

لتكن (u_n), (v_n) متتاليتان عدديتان معرفتين بما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \text{ و } \begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5} \end{cases}$$

نضع: $w_n = u_n - v_n$

1-بين أن (w_n) متتالية هندسية ثم أوجد w_n بدلالة n

و $\lim w_n$

2-ادرس رتابة كل من: (u_n) و (v_n).

3-بين أن: $1 \le v_n \le u_n \le 2$

استنتج تقارب (u_n) و (v_n) وأن لهما نفس النهاية؟

4-لتكن (t_n) متتالية حيث: $t_n = 2u_n + 5v_n$

بين أن (t_n) ثابتة محددا قيمتها ثم استنتج قيمة العدد؟

الحل

1-تبيان أن (w_n) متتالية هندسية:

تكون (w_n) هندسية إذا كان $w_{n+1} = q\, w_n$

لدينا

$$w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1}$$
$$= \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{u_n + 4v_n}{5}$$
$$= \frac{5u_n + 5v_n - 2u_n - 8v_n}{10}$$
$$= \frac{3u_n - 3v_n}{10}$$
$$= \frac{3}{10}(u_n - v_n)$$
$$= \frac{3}{10} w_n$$

إذن (w_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{3}{10}$

حساب حدها الأول w_0:

$$w_0 = u_0 - v_0$$
$$= 2 - 1 = 1$$

إيجاد w_n بدلالة n:

$$w_n = w_0\, q^n = \left(\frac{3}{10}\right)^n$$

حساب $\lim_{n\to+\infty} w_n$

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{10}\right)^n = 0$$

لأن $\left(-1 < \frac{3}{10} < 1\right)$

2-دراسة رتابة كل من (u_n) و (v_n):

دراسة رتابة (u_n)

ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{-u_n + v_n}{2}$$
$$= -\frac{w_n}{2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{10}\right)^n \le 0$$

ومنه (u_n) متناقصة تماما

دراسة رتابة (v_n)

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 4v_n}{5} - v_n$$
$$= \frac{u_n - v_n}{5} = \frac{1}{5}(w_n)$$
$$= \frac{1}{5}\left(\frac{3}{10}\right)^n \ge 0$$

ومنه: (v_n) متزايدة تماما

3-تبيان أن $1 \le v_n \le u_n \le 2$

3-1)-نبرهن بالتراجع ان $u_n \le 2$ من أجل كل n

نسمي $p(n)$ الخاصية $u_n \le 2$

من أجل $n = 0$ لدينا: $u_0 = 2 \le 2$ أي

$p(0)$محققة

ونفرض أن $p(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n

أي $u_n \le 2$ ونبرهن صحة $p(n+1)$

أي $u_{n+1} \le 2$

لدينا من الفرض: $u_n \le 2$

ولدينا: (u_n) لأنّ $u_{n+1} - u_n \le 0$ متناقصة

$u_{n+1} \le u_n \le 2$ ومنه $u_{n+1} \le 2$ أي $p(n+1)$ محققة

إذن $u_n \le 2$ مهما يكن $n \in \mathbb{N}$

2-3)-نبرهن بالتراجع أن: $1 \le v_n$

نسمي $p(n)$ الخاصية : $1 \le v_n$

من أجل $n = 0$ فإن $1 \le v_0 = 1$ أي $p(0)$ محققة

نفرض أن $p(n)$ محققة مهما يكن $n \in \mathbb{N}$

أي $1 \le v_n$

ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي: $1 \le v_{n+1}$

لدينا من الفرضية $1 \le v_n$

ولدينا $v_{n+1} - v_n \ge 0$ أي $1 \le v_n \le v_{n+1}$

ومنه نجد أن: $1 \le v_{n+1}$

إذن $p(n+1)$ محققة

وأخيرا $1 \le v_n$ مهما يكن $n \in \mathbb{N}$

3-3)-نبرهن أن $1 \le v_n \le u_n \le 2$

لدينا $w_n = u_n - v_n$

و $w_n - v_n = \left(\frac{3}{10}\right)^n \ge 0$

ومنه $u_n - v_n \ge 0$

أي $u_n \ge v_n$

من (1) و(2) و (3) نجد: $1 \le v_n \le u_n \le 2$

4- استنتاج تقارب (u_n) و (v_n) وأن لهما نفس النهاية l

بما أن (u_n) متناقصة تماما و (v_n) متزايدة تماما

ولدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$

إذن: المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان

ومنه: (u_n) و (v_n) متقاربتان ولهما نفس النهاية l

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$

5-لتكن (t_n) متتالية حيث $t_n = 2u_n + 5v_n$

تبيان أن (t_n) ثابتة مع تحديد قيمتها:

$$t_{n+1} = 2u_{n+1} + 5v_{n+1}$$
$$= 2\frac{u_n+v_n}{2} + 5\frac{u_n+4v_n}{5}$$
$$= u_n + v_n + u_n + 4v_n$$
$$= 2u_n + 5v_n$$
$$= t_n$$

ومنه: (t_n) متتالية ثابتة و: $t_n = t_0$

$t_n = t_0 = 2u_0 + 5v_0 = 2(2) + 5(1) = 9$

استنتاج قيمة l

بما أن: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$

ومنه
$$2l + 5l = 9$$
$$7l = 9$$
$$l = \frac{9}{7}$$

97. متتالية مقترحة رقم:23

الإسم على اليوتيوب: مواضيع مقترحة في الرياضيات في المتتاليات لبكالوريا 2017(ع ت+ر +ت ر)رقم13

a و b عددان حقيقيان بحيث: $0 < a < b$ ، (u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}$

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \end{cases} \text{ و } \begin{cases} v_0 = b \\ v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} \end{cases}$$

1-بين أنه من أجل كل n تكون:(u_n) و (v_n) موجبتين تماما.

2- بين أنه من أجل كل n تكون:$u_n \le v_n$

3-أ- بين أنه من أجل كل n تكون:

$$v_{n+1} - u_{n+1} \le \frac{1}{2}(v_n - u_n)$$

3-ب-استنتج أن:$0 \le v_n - u_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^n (b-a)$

4-أ-بيّن أنّ المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان.

4-ب-إذا كانت $a = 2$ و $b = 5$:استعمل نتائج السؤال (3) لإيجاد القيمة التقريبية للنهاية المشتركة لـ(u_n) و (v_n) بتقريب 10^{-3}.

الحل

1-تبيان أنه من أجل كل n تكون: (u_n) و (v_n) موجبتان تماما

البرهان أن $u_n > 0$ و $v_n > 0$

للبرهان على ذلك نستعمل البرهان بالتراجع

نسمي $p(n)$ الخاصية $u_n > 0$ و $v_n > 0$

من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = a > 0$

و لدينا $n = 0$ لدينا $v_0 = b > 0$

ومنه: $p(0)$ محققة من أجل $n = 0$

نفرض أن $p(n)$ محققة مهما يكن $n \in \mathbb{N}$

أي $u_n > 0$ و $v_n > 0$ ونبرهن صحة $p(n+1)$

أي $u_{n+1} > 0$ و $v_{n+1} > 0$

لدينا من الفرضية $u_n > 0$ و $v_n > 0$ بالضرب

نجد $u_n v_n > 0$

ومنه $\sqrt{u_n v_n} > 0$ إذن: $u_{n+1} > 0$

لدينا من الفرضية: $u_n > 0$ و $v_n > 0$

ومنه $u_n + v_n > 0$

أي: $\frac{1}{2}(u_n + v_n) > 0$

إذن: $v_{n+1} > 0$

ومنه: الخاصية $p(n+1)$ محققة

وأخيرا $u_n > 0$ و $v_n > 0$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

إذن: المتتاليتان (u_n) و (v_n) موجبتان تماما

2-البرهان أنه مهما كان $n \in \mathbb{N}$ فإن $u_n \leq v_n$

نبرهن على ذلك باستعمال البرهان بالتراجع

نسمي $p(n)$ الخاصية "$u_n \leq v_n$"

من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = a$ و $v_0 = b$

ولدينا $a < b$ إذن: $u_0 < v_0$

ومنه الخاصية $p(0)$ محققة

نفرض أن الخاصية محققة أي أن $u_n \leq v_n$

أي: $u_n - v_n \leq 0$

ونبرهن صحة الخاصية $p(n+1)$ محققة أي:

$u_{n+1} \leq v_{n+1}$ أي $u_{n+1} - v_{n+1} \leq 0$

لدينا $u_{n+1} - v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} - \frac{u_n + v_n}{2}$

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{\left(\sqrt{u_n v_n} - \frac{u_n+v_n}{2}\right)\left(\sqrt{u_n v_n} + \frac{u_n+v_n}{2}\right)}{\sqrt{u_n v_n} + \frac{u_n+v_n}{2}}$$

$$= \frac{u_n v_n - \frac{1}{4}(u_n+v_n)^2}{\sqrt{u_n v_n} + \frac{u_n+v_n}{2}}$$

$$= \frac{v_n u_n - \frac{1}{4}(u_n^2+v_n^2+2u_n v_n)}{\sqrt{u_n v_n} + \frac{u_n+v_n}{2}}$$

$$= \frac{u_n v_n - \frac{1}{4}u_n^2 - \frac{1}{4}v_n^2 - \frac{2}{4}u_n v_n}{\sqrt{u_n v_n} + \frac{u_n+v_n}{2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}(2u_n v_n - u_n^2 - v_n^2)}{\sqrt{u_n v_n} + \frac{u_n+v_n}{2}}$$

$$= -\frac{u_n^2+v_n^2-2u_n v_n}{4\left(\sqrt{u_n v_n} + \frac{u_n+v_n}{2}\right)}$$

$$= \frac{-(u_n-v_n)^2}{4\left(\sqrt{u_n v_n} + \frac{u_n+v_n}{2}\right)}$$

لدينا من الفرضية: $u_n \leq v_n$ أي $u_n - v_n \leq 0$

ومنه $(u_n - v_n)^2 \geq 0$

إذن: $-\frac{(u_n-v_n)^2}{4\left(\sqrt{u_n v_n} + \frac{u_n+v_n}{2}\right)} \leq 0$

ومنه: $u_{n+1} - v_{n+1} \leq 0$

أي: $p(n+1)$ محققة

وأخيرا $u_n \leq v_n$ صحيحة مهما يكن $n \in \mathbb{N}$

3-أ-تبيان أنه من أجل كل n تكون:

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$$

يكفي أن نبرهن أن:

$$v_{n+1} - u_{n+1} - \frac{1}{2}(v_n - u_n) \leq 0$$

$$v_{n+1} - u_{n+1} - \frac{1}{2}(v_n - u_n) = \frac{u_n+v_n}{2} - \sqrt{u_n v_n} - \frac{1}{2}(v_n - u_n)$$

$$= \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}v_n - \sqrt{u_n v_n} - \frac{1}{2}v_n + \frac{1}{2}u_n$$

$$= u_n - \sqrt{u_n v_n}$$

نستعمل المرافق:

$$= \frac{(u_n - \sqrt{u_n v_n})(u_n + \sqrt{u_n v_n})}{u_n + \sqrt{u_n v_n}}$$

$$= \frac{u_n^2 - u_n v_n}{u_n + \sqrt{u_n v_n}} = \frac{u_n(u_n - v_n)}{u_n + \sqrt{u_n v_n}}$$

لدينا $u_n > 0$ و $v_n > 0$

إذن: $\sqrt{u_n v_n} > 0$ ومنه $\frac{u_n}{u_n + \sqrt{u_n v_n}} > 0$

ولدينا $u_n \leq v_n$ (تم البرهان عليها من قبل)

ومنه $u_n - v_n \leq 0$

إذن $\frac{u_n(u_n - v_n)}{u_n + \sqrt{u_n v_n}} \leq 0$

ومنه المتراجحة صحيحة أي:

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$$

3-ب-استنتاج أن: $0 \leq v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (b-a)$

نبرهن على ذلك باستعمال البرهان بالتراجع

لتكن الخاصية $p(n)$:

$$0 \leq v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (b-a)$$

من أجل $n = 0$ لدينا: $u_0 = a$ و $v_0 = b$

ولدينا: $0 < a < b$ ومنه: $b - a > 0$

بالتعويض في المتراجحة نجد:

$$0 \leq b - a \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 (b-a)$$

أي $0 \leq b - a \leq b - a$

ومنه: الخاصية $p(0)$ محققة

نفرض أن الخاصية $p(n)$ محققة أي

$$0 \leq v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (b-a)$$

ونبرهن صحة $p(n+1)$

أي $0 \leq v_{n+1} - u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (b-a)$

من الفرضية لدينا: $0 \leq v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (b-a)$

نضرب أطراف المتباينة في $\left(\frac{1}{2}\right)$

$$0 \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n (b-a)$$

$$0 \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (b-a)$$

لدينا مما سبق:

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$$

إذن:

$$0 \leq v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (b-a)$$

إذن $0 \leq v_{n+1} - u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (b-a)$

ومنه الخاصية $p(n+1)$ محققة

أي $0 \leq v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (b-a)$ صحيحة

مهما يكن $n \in \mathbb{N}$

4-أ-البرهان أن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان

تكون متتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان إذا وفقط إذا كانت احداهما متزايدة والأخرى متناقصة و

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$$

ندرس رتابة (u_n)

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n v_n} - u_n$$

$$= \frac{(\sqrt{u_n v_n} - u_n)(\sqrt{u_n v_n} + u_n)}{\sqrt{u_n v_n} + u_n}$$

$$= \frac{u_n v_n - u_n^2}{\sqrt{u_n v_n} + u_n}$$

$$= \frac{u_n(v_n - u_n)}{\sqrt{u_n v_n} + u_n}$$

لدينا: $u_n \leq v_n$ أي $v_n - u_n \geq 0$

ومنه: $\frac{u_n(v_n-u_n)}{\sqrt{u_n v_n}+u_n} \geq 0$

إذن: $u_{n+1} - u_n \geq 0$

إذن: (u_n) متزايدة

ندرس رتابة (v_n)

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + v_n}{2} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2}$$

$u_n \leq v_n$ إذن $u_n - v_n \leq 0$

إذن: $v_{n+1} - v_n \leq 0$

ومنه (v_n) متناقصة

حـ... ة الفرق:

لد...

نسـ... $0 \leq v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (b-a)$

لدينا $-1 < \frac{1}{2} < 1$ إذن: $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

إذن: $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n (b-a) = 0$

إذن حسب مبرهنة الحصر فإن:

$$\lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$$

لدينا المتتالية (u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة

$$\lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$$

إذن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان أي لهما نفس النهاية

4-ب- استعمال نتائج السؤال (3) لإيجاد القيمة التقريبية للنهاية المشتركة لـ (u_n) و (v_n) بتقريب 10^{-3}

لتكن النهاية المشتركة بين (u_n) و (v_n) هي l

لدينا: $0 \leq v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (b-a)$

ندخل القيمة المطلقة على أطراف المتباينة فنحصل على $0 \leq |v_n - u_n| \leq \left|\left(\frac{1}{2}\right)^n (b-a)\right|$

بالتعويض بقيمتي a و b نجد:

$$0 \leq |v_n - u_n| \leq 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

لدينا من المعطيات: $|u_n - l| < 10^{-3}$

$|v_n - l| < 10^{-3}$

خواص القيمة المطلقة: (الخاصية المثلثية)

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

ومنه $|x + (-y)| \leq |x| + |y|$

إذن $|v_n - u_n| \leq |v_n| + |u_n|$

ومنه $|v_n - u_n| \leq |v_n - l| + |u_n - l|$

أي $|v_n - u_n| \leq |10^{-3}| + |10^{-3}|$

ومنه: $|v_n - u_n| \leq 2.10^{-3}$ .... (2)

حتى تكون (2) محققة يجب أن يكون:

$$3\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 2.10^{-3}$$

أي $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{2}{3}.10^{-3}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 66.10^{-5}$

ومنه $\ln\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \ln(66 . 10^{-5})$

أي $n\ln\left(\frac{1}{2}\right) \leq \ln(66 . 10^{-5})$

$-n\ln 2 \leq \ln(66 . 10^{-5})$

$$n \geq -\frac{\ln(66 . 10^{-5})}{\ln 2}$$

$$n \geq 10.56$$

إذن: $n = 11$

98. متتالية مقترحة رقم:24

الإسم على اليوتيوب: مواضيع مقترحة في الرياضيات في المتتاليات باك 2018 (ع ت+ر+ت ر) رقم 12

نعتبر المتتاليتين العدديتين (u_n) و (v_n) المعرفتان كما يلي:

$(u_0) = 1$ و $v_0 = 2$ ومنه أجل كل عدد طبيعي n:

$u_{n+1} = \alpha u_n + (1-\alpha)v_n$

و $v_{n+1} = (1-\alpha)u_n + \alpha v_n$

حيث α عدد حقيقي مع $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

1-لتكن (w_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بــ:

$w_n = v_n - u_n$

1-أ- احسب w_0 و w_1

1-ب- برهن ان المتتالية (w_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها

1-جـ- اكتب w_n بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$

2-أ-اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي n: $u_n \leq v_n$

2-ب-برهن ان المتتالية (u_n) متزايدة وان المتتالية (v_n) متناقصة

2-جـ- استنتج أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متقاربتان نحو نفس النهاية l

2-د-اثبت أنه من اجل كل عدد طبيعي n: $u_n + v_n = 3$ واستنتج قيمة النهاية l

الحل

1-أ-حساب w_0 و w_1

$$w_n = v_n - u_n$$
$$w_0 = v_0 - u_0 = 2 - 1 = 1$$
$$w_1 = v_1 - u_1$$
$$v_1 = (1-\alpha)u_0 + \alpha v_0 = 1 - \alpha + 2\alpha$$
$$= 1 + \alpha$$
$$u_1 = \alpha(1) + 1(1-\alpha)2 = \alpha + 2 - 2\alpha$$
$$= 2 - \alpha$$

ومنه

$$w_1 = v_1 - u_1 = 1 + \alpha - (2 - \alpha)$$
$$= 2\alpha - 1$$

1-ب-البرهان ان (w_n) متتالية هندسية مع تعيين أساسها:

أي

$$w_{n+1} = w_n q$$

ومنه

$$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1}$$
$$= (1-\alpha)u_n + \alpha v_n - (\alpha u_n + (1-\alpha)v_n)$$
$$w_{n+1} = (1-\alpha)u_n + \alpha v_n - \alpha u_n - (1-\alpha)v_n$$
$$= (1-\alpha-\alpha)u_n + (\alpha - 1 + \alpha)v_n$$
$$= (1-2\alpha)u_n + (2\alpha-1)v_n$$
$$= -(2\alpha-1)u_n + (2\alpha-1)v_n$$
$$= (2\alpha-1)(v_n - u_n)$$
$$= w_n(2\alpha-1)$$

إذن (w_n) هندسية أساسها $q = 2\alpha - 1$

1-جـ- كتابة w_n بدلالة n

$$w_n = w_0 q^n$$

ومنه $w_n = 1(2\alpha-1)^n$

أي $w_n = (2\alpha-1)^n$

استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} (2\alpha-1)^n$$

لدينا $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ لأن: $0 < 2\alpha - 1 < 1$

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} (2\alpha-1)^n = 0$

2-أ-اثبات من أجل كل عدد طبيعي n أن: $u_n \leq v_n$

لدينا $w_n = v_n - u_n$ و $w_n = (2\alpha-1)^n$

ومنه $v_n - u_n \geq 0$

أي $v_n \geq u_n$

2-ب-البرهان على أن المتتالية (u_n) متزايدة:

لدينا: $u_{n+1} - u_n = \alpha u_n + (1-\alpha)v_n - u_n$
$$= -(1-\alpha)u_n + (1-\alpha)v_n$$
$$= (1-\alpha)(v_n - u_n)$$
$$= (1-\alpha)w_n$$

بما أن: $w_n \geq 0$ و $0 < 1 - \alpha < \frac{1}{2}$

ومنه $u_{n+1} - u_n \geq 0$

أي المتتالية (u_n) متزايدة

البرهان على أن (v_n) متتالية متناقصة:

لدينا: $v_{n+1} - v_n = (1-\alpha)u_n + \alpha v_n - v_n$
$$= (1-\alpha)u_n + (\alpha-1)v_n$$
$$= (1-\alpha)(u_n - v_n)$$
$$= (1-\alpha)(-w_n)$$

ومنه $= -(1-\alpha)w_n$

لدينا: $-(1-\alpha)w_n \leq 0$

ومنه $v_{n+1} - v_n \leq 0$

إذن (v_n) متتالية متناقصة

2-جـ-إستنتاج أن (u_n) و (v_n) متقاربتان نحو نفس النهاية l

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$$

المتتالية (u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة فإنهما متجاورتان معناه أنهما تتقاربان نحو نفس النهاية l

أي: $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = l$

2-د-إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n
$u_n + v_n = 3$

البرهان بالتراجع: نسمي $p(n)$ الخاصية:
$u_n + v_n = 3$ من أجل $n = 0$ لدينا
$u_0 + v_0 = 3$ ومنه $p(0)$ محققة
نفرض صحة $p(n)$ من أجل $n \geq 0$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي $u_{n+1} + v_{n+1} = 3$

$$u_{n+1} + v_{n+1} = \alpha u_n + (1-\alpha)v_n + (1-\alpha)u_n + \alpha v_n$$
$$= \alpha u_n + v_n - \alpha v_n + u_n - \alpha u_n + \alpha v_n$$
$$u_{n+1} + v_{n+1} = v_n + u_n$$
$$u_{n+1} + v_{n+1} = 3$$

ومنه $p(n+1)$ محققة
إذن $u_n + v_n = 3$ مهما يكن $n \in \mathbb{N}$

استنتاج قيمة النهاية l

لدينا $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = l$
و $u_n + v_n = 3$
ومنه $l + l = 3 \Rightarrow l = \frac{3}{2}$
ومنه $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{3}{2}$

99. متتالية مقترحة رقم:25

الإسم على اليوتيوب: مواضيع مقترحة في الرياضيات في المتتاليات لبكالوريا2017(ع ت+ ر+ ت ر)رقم19

(u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي:

$$v_n = \frac{3^n - 4n + 8}{4} \quad , \quad u_n = \frac{3^n + 4n - 8}{4}$$

1-أحسب الحدود الثلاثة الأولى من كل متتالية.
2-لتكن (t_n) و (d_n) متتاليتان معرفتان كما يلي:
$t_n = u_n + v_n \quad , \quad d_n = u_n - v_n$. حيث n عدد طبيعي.
2-أ-عبر عن كل من t_n و d_n بدلالة n.
2-ب-برهن أن (t_n) متتالية هندسية و (d_n) متتالية حسابية , في كل حالة يطلب تعيين الأساس و الحد الأول.
2-جـ-نقبل أن: $n < 3^n$. أحسب نهاية $\frac{u_n}{v_n}$ عندما n يؤول إلى $+\infty$.
2-د-نضع من أجل كل عدد طبيعي n:
$\alpha_n = t_n + d_n$
-أحسب بدلالة n المجموع:
$S_n = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$.

الحل

1-حساب الحدود الثلاثة الأولى لـ (v_n) و (u_n)

1-أ- لدينا $u_n = \frac{3^n+4n-8}{4}$

حساب الحد الأول: نضع $n = 0$
$u_0 = \frac{3^0+4(0)-8}{4} = -\frac{7}{4}$
حساب الحد الثاني: نضع $n = 1$
$u_1 = \frac{3^1+4(1)-8}{4} = -\frac{1}{4}$
حساب الحد الثالث: نضع $n = 2$
$u_2 = \frac{3^2+4(2)-8}{4} = \frac{9}{4}$

1-ب- لدينا $v_n = \frac{3^n-4n+8}{4}$

حساب الحد الأول: نضع $n = 0$
$v_0 = \frac{3^0-4(0)+8}{4} = \frac{9}{4}$
حساب الحد الثاني نضع $n = 1$
$v_1 = \frac{3^1-4(1)+8}{4} = \frac{7}{4}$
حساب الحد الثالث: نضع $n = 2$
$v_2 = \frac{3^2-4(2)+8}{4} = \frac{9}{4}$

2-أ-التعبير عن t_n و d_n بدلالة n

-عبارة (t_n):
لدينا $t_n = u_n + v_n = \frac{3^n+4n-8}{4} + \frac{3^n-4n+8}{4}$
ومنه $t_n = \frac{3^n+4n-8+3^n-4n+8}{4}$
أي $t_n = \frac{2(3)^n}{4}$
ومنه $t_n = \frac{3^n}{2}$

عبارة d_n بدلالة n
لدينا $d_n = u_n - v_n$
ومنه $d_n = \frac{3^n+4n-8-(3^n-4n+8)}{4}$
ومنه $d_n = u_n - u_n = \frac{8n-16}{4}$
أي $d_n = 2n - 4$

2-ب-البرهان أن (t_n) متتالية هندسية:
لدينا: $t_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{2} = \frac{3^n}{2} 3$
$t_{n+1} = t_n 3$
ومنه (t_n) متتالية هندسية أساسها $q = 3$ وحدها الأول $t_0 = u_0 + v_0 = \frac{1}{2}$

تبيان أن (d_n) متتالية حسابية:
لدينا: $d_{n+1} = 2(n+1) - 4$

$d_{n+1} = 2n - 4 + 2$

$d_{n+1} = d_n + 2$

ومنه (d_n) م حسابية أساسها $r = 2$ وحدها الأول

$d_0 = -4$

2-جـ-حساب نهاية $\frac{u_n}{v_n}$

بما أن $n < 3^n$

فإن $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{3^n} = 0$

ومنه $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{3^n+4n-8}{4}}{\frac{3^n-4n+8}{4}}$

ومنه $= \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n\left(1+\frac{4}{3^n}-\frac{8}{3^n}\right)}{3^n\left(1-\frac{4}{3^n}+\frac{8}{3^n}\right)}$

$= 1$

2-د-حساب S_n بدلالة n

بما أن $\alpha_n = t_n + d_n$

ومنه $S_n = S_{t_n} + S_{d_n}$

نحسب S_{t_n} : $S_{t_n} = t_0 + t_1 + \cdots + t_n$

$S_{t_n} = t_0 \frac{(q^{n+1} - 1)}{q - 1}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1}\right)$

$= \frac{1}{4}(3^{n+1} - 1)$

نحسب S_{d_n}:

$S_{d_n} = d_0 + d_1 \ldots + d_n = \frac{n+1}{2}(d_0 + d_n)$

ومنه $S_{d_n} = \frac{n+1}{2}(2n - 4 - 4)$

$= \frac{n+1}{2}[-8 + 2n]$

$= (n+1)(n-4)$

$S_{d_n} = (n+1)(n-4)$

ومنه $S_n = S_{t_n} + S_{d_n}$

أي $S_n = \frac{1}{4}(3^{n+1} - 1) + (n+1)(n-4)$

100. متتالية مقترحة رقم:26

الإسم على اليوتيوب: مواضيع مقترحة في الرياضيات في المتتاليات لبكالوريا 2019 (عت+ر+ تر) رقم 2

1-(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما وبحيث

$$\begin{cases} \ln(u_3) - \ln(u_4) = -1 \\ \ln(u_3) + \ln(u_4) = 5 \end{cases}$$

1-أ-أحسب u_3 و u_4 ثم عين أساس المتتالية (u_n) وحدها الأول u_1

1-ب-أكتب u_n بدلالة n ، ثم برهن أن العدد e^{2019} حدا من حدود المتتالية (u_n) وحدد رتبته

1-جـ-أحسب بدلالة n ما يلي:

$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

$S'_n = u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n{}^2$

$P_n = u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n$

$T_n = \ln u_1^3 + \ln u_2^3 + \cdots + \ln u_n^3$

2-(v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي:

$v_n = \ln(u_{n+1}) - 2\ln(u_n)$

2-أ-برهن أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

2-ب-احسب بدلالة n المجموع:

$H_n = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n$

2-جـ-عين قيم العدد الطبيعي n بحيث: $\ln(H_n) = 0$

الحل

1-أ-(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما

-حساب u_3 و u_4

لدينا

$$\begin{cases} \ln(u_3) - \ln(u_4) = -1 \\ \ln(u_3) + \ln(u_4) = 5 \end{cases}$$

-بالجمع طرفا لطرف نجد

$\ln(u_3) - \ln(u_4) + \ln(u_3) + \ln(u_4)$

$= -1 + 5$

ومنه

$2\ln(u_3) = 4$

ومنه

$u_3 = e^2$

-تعيين u_4

لدينا $\ln(u_3) + \ln(u_4) = 5$

ومنه $\ln(e^2) + \ln(u_4) = 5$

أي $2 + \ln(u_4) = 5$

ومنه $\ln(u_4) = 3$

أي $u_4 = e^3$

-تعيين أساس (u_n)

(u_n) متتالية هندسية ومنه $u_n = u_p q^{n-p}$ ، $n \geq p$

ولدينا $u_3 = e^2$ و $u_4 = e^3$

ومنه $e^3 = e^2 q^{4-3}$

و $q = \frac{e^3}{e^2} = e^{3-2}$

أي $q = e$

-تعيين الحد الأول u_1

$$u_3 = u_1 q^{3-1}$$

ومنه

$$u_1 = \frac{u_3}{q^2}$$

$$u_1 = \frac{e^2}{e^2} = 1$$

$$u_1 = 1$$

1-ب-كتابة u_n بدلالة n

لدينا $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

ومنه $u_n = 1 \times e^{n-1}$

إذن $u_n = e^{n-1}$

-البرهان أن e^{2019} حد من حدود المتتالية (u_n)

- نحل المعادلة $u_n = e^{2019}$

ومنه $e^{n-1} = e^{2019}$

ومنه $\ln e^{n-1} = \ln e^{2019}$

أي $n - 1 = 2019$

ومنه $n\epsilon\mathbb{N}^*$ $n = 2020$

أي e^{2019} حد من حدود (u_n)

ورتبته هي 2020 ، $(2020 = 2020 - 1 + 1)$

ملاحظة

رتبة الحد k = دليل الحد k − دليل الحد الأول +1

1-جـ- حساب S_n

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

S_n مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها $q = e$ وحدها الأول $u_1 = 1$

ومنه

$$S_n = u_1 \frac{(q^{\text{عدد الحدود}} - 1)}{q - 1}$$

ومنه

$$S_n = 1\left(\frac{e^{n-1+1} - 1}{e - 1}\right)$$

أي

$$S_n = \frac{e^n - 1}{e - 1}$$

-حساب S'_n

$$S'_n = u_1^2 + u_2^2 + \cdots + {u_n}^2$$

لدينا

$$u_n = u_1 q^{n-1}$$

ومنه:

$$\begin{cases} u_1^2 = u_1^2 \\ u_2^2 = (u_1\, q)^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n^2 = (u_1\, q^{n-1})^2 \end{cases}$$

ومنه بالجمع

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \cdots + u_n^2$$
$$= u_1^2 + (u_1 q)^2 + (u_1 q^2)^2 + \cdots + (u_1 q^{n-1})^2$$
$$= u_1^2 [1 + q^2 + q^4 + \cdots + (q^{n-1})^2]$$

حيث $[1 + q^2 + q^4 + \cdots + (q^{n-1})^2]$ مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها $q' = q^2$

$$S'_n = \left[1 \frac{(q^2)^{n+1-1} - 1}{q^2 - 1}\right] = \frac{e^{2n} - 1}{e^2 - 1}$$

-حساب p_n

لدينا $u_n = u_1 q^{n-1}$ و

$$\begin{cases} u_1 = u_1 \\ u_2 = u_1 q \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n = u_1 q^{n-1} \end{cases}$$

ومنه $p_n = u_1 \times u_1 q \times u_1 q^2 \times \ldots \times u_n q^{n-1}$

ومنه $p_n = (u_1)^{\text{عدد الحدود}} [q^{1+2+3+\cdots+(n-1)}]$

$$p_n = (1)^n q^{1+2+3+\cdots+(n-1)}$$
$$= q^{1+2+3+\cdots+(n-1)}$$

حيث $1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)$ مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية أساسها $r = 1$ وحدها الأول 1 وحدها الأخير $n - 1$

ومنه $p_n = e^{\frac{n-1}{2}(n)}$

-حساب T_n

$$T_n = \ln u_1^3 + \ln u_2^3 + \cdots + \ln u_n^3$$
$$T_n = 3 \ln u_1 + 3 \ln u_2 + \cdots + 3 \ln u_n$$
$$T_n = 3[\ln u_1 + \ln u_2 + \cdots + \ln u_n]$$
$$T_n = 3 \ln(u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n)$$
$$T_n = 3 \ln(p_n)$$
$$T_n = 3\ln\left(e^{\frac{(n-1)n}{2}}\right) = 3\,\frac{(n-1)n}{2}$$
$$T_n = \frac{3}{2}(n^2 - n)$$

2- (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي

$$v_n = \ln(u_{n+1}) - 2\ln(u_n)$$

2-أ- اثبات أن (v_n) حسابية

لدينا $u_n = e^{n-1}$ ومنه

$$v_n = \ln(u_{n+1}) - 2\ln(u_n)$$

$$v_n = \ln e^{(n+1)+1} - 2\ln e^{n-1}$$

ومنه

$$v_n = -n + 2$$

$$v_{n+1} = -(n+1) + 2 = -n + 2 - 1$$

$$= v_n - 1$$

ومنه (v_n) م حسابية أساسها $r = -1$ وحدها الأول $v_1 = 1$

2-ب-حساب H_n بدلالة n

$$H_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$$

$$H_n = \frac{n-1+1}{2}[v_1 + v_n]$$

$$H_n = \frac{n}{2}[3-n]$$

2-ج- تعيين قيم n بحيث $\ln H_n = 0$

$$\ln H_n = 0$$

$$H_n = 1$$

$$\frac{n}{2}[3-n] = 1$$

$$n[3-n] = 2$$

$$-n^2 + 3n - 2 = 0$$

بحل المعادلة من الدرجة الثانية نجد

$$n_1 = 1 \in \mathbb{N}^*$$

$$n_2 = 2 \in \mathbb{N}^*$$

ومنه قيم n هي: $n \in \{1,2\}$

101. متتالية مقترحة رقم:27

الإسم على اليوتيوب: مواضيع مقترحة ففي المتتاليات لبكالوريا 2017 (ع ت+ ر+ ت ر)رقم 4

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية حدودها موجبة حيث:

$u_0 = 1$ و $\ln u_1 + \ln u_2 = -3\pi$

1-أ-عين أساس هذه المتتالية، وأحسب u_n بدلالة n

1-ب- نسمي p_{n+1} المجموع: $u_0 + u_1 + \cdots + u_n$، احسب p_{n+1} بدلالة n ، ثم جد $\lim\limits_{n\to+\infty}(p_{n+1})$

2- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة كما يلي:

$$v_n = \ln(u_n)$$

2-أ-بيّن أنّ $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها

ب-نسمي S_{n+1} المجموع: $v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ احسب S_{n+1} بدلالة n ، ثم بيّن أنّ $\sin(S_{n+1}) = 0$

3-أ-نسمي π_{n+1} الجداء: $u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n$ ، أحسب π_{n+1} بدلالة n

3-ب-عين الحد u_p بحيث يكون $\pi_{p+1} = e^{-6\pi}$

الحل ✍

1-أ-تعيين أساس (u_n) وعبارة حدها العام

لدينا (u_n) هندسية ومنه $u_n = u_p q^{n-p}$

مع: $n \geq p$

$$u_n = u_p q^{n-p}$$

$$u_1 = u_0 q^1$$

$$u_2 = u_0 q^2$$

نعوض u_1 و u_2 في $\ln u_1 + \ln u_2 = -3\pi$

ومنه $\ln u_0 + \ln q + \ln u_0 + 2\ln q = -3\pi$

$$2\ln u_0 + 3\ln q = -3\pi$$

$$3\ln q = -3\pi - 2\ln u_0$$

$$u_0 = 1$$

ومنه $\ln q = -\frac{3\pi}{3}$

أي $q = e^{-\pi}$

حساب u_n بدلالة n

$$u_n = u_0 q^n$$

ومنه $u_n = e^{-n\pi}$

1-ب-حساب p_{n+1}

لدينا: $p_{n+1} = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

ومنه $p_{n+1} = u_0\left[\frac{(e^{-\pi})^{n+1}-1}{e^{-\pi}-1}\right]$

ومنه $p_{n+1} = \frac{((e^{-\pi})^{n+1}-1)}{e^{-\pi}-1}$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} p_{n+1}$

$$\lim_{n\to+\infty} p_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{((e^{-\pi})^{n+1}-1)}{e^{-\pi}-1}$$

لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}(e^{-\pi})^{n+1} = 0$

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} p_{n+1} = -\frac{1}{e^{-\pi}-1}$

2-أ-تبيان أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية مع تعيين أساسها:

نبرهن أن $v_{n+1} = v_n + r$

لدينا $v_{n+1} = \ln(u_{n+1})$

$= \ln(u_n e^{-\pi})$

$= \ln u_n + \ln e^{-\pi}$

ومنه $v_{n+1} = \ln u_n - \pi$

(v_n) متتالية حسابية أساسها $r = -\pi$

وحدها الأول $v_0 = \ln u_0 = 0$

$v_n = v_0 + (n-0)r$

$v_n = v_0 + r$

$v_n = -\pi n$

2-ب-حساب S_{n+1} بدلالة n:

$S_{n+1} = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$

(v_n) متتالية حسابية ومنه:

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)}{2}[v_0 + v_n]$$

$$S_{n+1} = \frac{n+1}{2}(-\pi n)$$

$$S_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2}(-\pi)$$

البرهان أن $\sin(S_{n+1}) = 0$

لدينا: $\sin(S_{n+1}) = \sin\left(n(n+1)\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

نضع: $n = n(n+1) = 2k$

(لأن فردي × زوجي = زوجي)

ومنه

$$\sin(S_{n+1}) = \sin\left(2k\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$= \sin(-k\pi)$$

ومنه $\sin(-k\pi) = 0$

3-أ-حساب π_{n+1} بدلالة n

لدينا $u_n = e^{-n\pi}$

$\pi_{n+1} = 1e^{-\pi}e^{-2\pi}e^{-3\pi}e^{-4\pi}\ldots\ldots e^{-n\pi}$

أي $\pi_{n+1} = e^{-\pi-2\pi-3\pi-4\pi\ldots\ldots-n\pi}$

ومنه $\pi_{n+1} = e^{S_{n+1}}$

$\pi_{n+1} = e^{n(n+1)(-\frac{\pi}{2})}$

3-ب-تعيين الحد u_p بحيث يكون $\pi_{p+1} = e^{-6\pi}$

لدينا $\pi_{n+1} = e^{n(n+1)\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = e^{-6\pi}$

ومنه $n(n+1)\left(\frac{\pi}{2}\right) = 6\pi$

$n(n+1) = 12$

أي $n^2 + n - 12 = 0$

$\Delta = 1 - 4(-12) = 49$

$p_1 = \frac{-1-7}{2} = -4$ مرفوض $-4 \notin \mathbb{N}$

$p_2 = \frac{-1+7}{2} = 3$ محقق $3 \in \mathbb{N}$

ومنه $\pi_{3+1} = e^{-6\pi}$

ومنه الحد u_p هو u_3 بحيث: $\pi_4 = e^{-6\pi}$

.102 متتالية مقترحة رقم:28

الإسم على اليوتيوب: مواضيع مقترحة في الرياضيات في المتتاليات لبكالوريا2017(ع ت+ ر.ت ر)رقم30

1-بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ومن أجل كل عدد حقيقي x من $[0;1]$:

$$\frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} \le \frac{1}{x+n} \le \frac{1}{n}$$

2-أ-أحسب: $\int_0^1 \frac{1}{x+n}\,dx$.

2-ب-إستنتج أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \le \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \le \frac{1}{n}$$

3-نسمي (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ:

$$u_n = \sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k} - \ln n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة (يمكن استعمال السؤال 2.ب).

4-نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بـ:

$$v_n = \sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k} - \ln(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)$$

بيّن أنّ (v_n) متتالية متزايدة.

5-بيّن أنّ المتتاليتين (u_n) و (v_n) تتقاربان نحو نفس النهاية ℓ.(لايطلب حسابها).

الحل

1-تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ومن أجل كل عدد حقيقي x من $[0;1]$

$$\frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} \le \frac{1}{x+n} \le \frac{1}{n}$$

يكفي أن نبرهن أن: $\frac{1}{x+n} \le \frac{1}{n} \ldots (1)$

و $\frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} \le \frac{1}{x+n} \ldots (2)$

اثبات أن: $\frac{1}{x+n} \le \frac{1}{n}$

أي $\frac{1}{x+n} - \frac{1}{n} \le 0$

$$\frac{1}{x+n} - \frac{1}{n} = \frac{n-(x+n)}{n(x+n)} = -\frac{x}{n(x+n)} \le 0 \ldots (1)$$

التبرير لأن: $x \in [0;1]$ و $n \in \mathbb{N}^*$

إثبات أن: $\frac{1}{n}-\frac{x}{n^2}\le\frac{1}{x+n}$ أي $\frac{1}{n}-\frac{x}{n^2}-\frac{1}{x+n}\le 0$

$$\frac{1}{n}-\frac{x}{n^2}-\frac{1}{x+n}=\frac{n(x+n)-x(x+n)-n^2}{n^2(x+n)}$$
$$=\frac{nx+n^2-x^2-nx-n^2}{n^2(x+n)}$$
$$=-\frac{x^2}{n^2(x+n)}\le 0\ \ldots.(2)$$

من (1) و (2) نجد أن: $\frac{1}{n}-\frac{x}{n^2}\le\frac{1}{x+n}\le\frac{1}{n}$

2-أ-حساب $\int_0^1\frac{1}{x+n}dx$

الدالة الأصلية لـ $\frac{1}{x+n}$ هي: $\ln(x+n)+c$ حيث $c\in\mathbb{R}$

ومنه: $\int_0^1\frac{1}{x+n}dx=[\ln(x+n)]_0^1$
$$=\ln(1+n)-\ln n=\ln\left(\frac{1+n}{n}\right)$$

2-ب-استنتاج أنه من أجل $n\in\mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}\le\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\le\frac{1}{n}$$

لدينا مما سبق: $\frac{1}{n}-\frac{x}{n^2}\le\frac{1}{x+n}\le\frac{1}{n}$
$$\int_0^1\left(\frac{1}{n}-\frac{x}{n^2}\right)dx\le\int_0^1\frac{1}{x+n}\le\int_0^1\frac{1}{n}dx$$
ومنه
$$\int_0^1\frac{1}{n}dx-\int_0^1\frac{x}{n^2}dx\le\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\le\int_0^1\frac{1}{n}dx$$
$$\frac{1}{n}[x]_0^1-\frac{1}{2n^2}[x^2]_0^1\le\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\le\frac{1}{n}[x]_0^1$$
إذن: $\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}\le\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\le\frac{1}{n}$

3-تبيان أن المتتالية (u_n) متناقصة:

يكفي أن تبرهن أن: $u_{n+1}-u_n\le 0$
$$u_{n+1}=\sum_{k=1}^{k=n+1}\frac{1}{k}-\ln(n+1)$$
$$=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)$$
ومنه
$$u_{n+1}-u_n=\left[1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)\right]-\left[1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right]$$
$$=\frac{1}{n+1}+\ln n-\ln(n+1)$$
$$=\frac{1}{n+1}+\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{n+1}-\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$
لدينا مما سبق: $\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}\le\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\le\frac{1}{n}$

بضرب أطراف المتباينة في (-1)
$$-\frac{1}{n}\le-\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\le-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}$$
$$\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\le\frac{1}{n+1}-\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\le\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}$$
$$-\frac{1}{n(n+1)}\le u_{n+1}-u_n\le\frac{-n+1}{2n^2(n+1)}$$
بما أن: $n\in\mathbb{N}^*$ فان: $1-n\le 0$

و $2n^2(n+1)\ge 0$

ومنه $\frac{-n+1}{2n^2(n+1)}\le 0$ أي: $u_{n+1}-u_n\le 0$

ومنه المتتالية (u_n) متناقصة

4-تبيان أن (v_n) متتالية متزايدة:

يكفي إثبات أن: $v_{n+1}-v_n\ge 0$
$$v_{n+1}-v_n=\left[1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\ln(n+2)\right]-\left[1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n+1)\right]$$
$$=\frac{1}{n+1}-\ln(n+2)+\ln(n+1)$$
$$=\frac{1}{n+1}-\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$$
نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بالعبارة:
$$h(x)=\frac{1}{x+1}-\ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$$
دراسة تغيرات $h(x)$:
$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x+1}-\ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)\right]=0$$
لأن: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)=1$ و $\ln 1=0$

و $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0$

حساب $h'(x)$

الدالة h قابلة للاشتقاق على $]1,+\infty[$ ودالتها المشتقة:
$$h'(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{\frac{(x+1)-(x+2)}{(x+1)^2}}{\frac{x+2}{x+1}}$$
$$=-\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{-\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{x+2}{x+1}}$$
$$=-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}$$

$$= \frac{-(x+2)+(x+1)}{(x+1)^2(x+2)}$$

$$= -\frac{1}{(x+1)^2(x+2)} < 0$$

التبرير: لأن: $x \in [1;+\infty[$ ، ومنه الدالة h متناقصة تماما على $[1;+\infty[$

جدول التغيرات:

x	1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$h'(x)$	$-$
$h(x)$	↘ 0

من جدول التغيرات نجد أن: $h(x) > 0$

أي أن: $\frac{1}{x+1} - \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right) > 0$

أي $v_{n+1} - v_n > 0$ ومنه (v_n) متزايدة

5-تبيان أن (u_n) و(v_n) تتقاربان نحو نفس النهاية l

يجب أن تكون المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان أي أن (u_n) متناقصة و (v_n) متزايدة و $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$

$$u_n - v_n = \left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right] - \left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)\right]$$

$$= -\ln n + \ln(n+1)$$

$$= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

حساب نهاية الفرق:

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$= \ln 1 = 0$$

ومنه: (u_n) و (v_n) متتاليتان متجاورتان

إذن: فهما متقاربتان نحو نفس النهاية l

103. متتالية مقترحة رقم:29

الإسم على اليوتيوب: مواضيع مقترحة في الرياضيات في المتتاليات لبكالوريا 2017(ع ت+ ر.ت ر)رقم28

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + \frac{1}{n} \end{cases} \text{من أجل } n \geq 2$$

و $v_n = u_n - \ln n$ من أجل $n \geq 1$.

1-أ-أحسب u_2, u_3 و u_4.

1-ب-بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

2-أ-بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم k:

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \leq \frac{1}{k}$$

2-ب-إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$:

$u_n - 1 \leq \ln n \leq u_n - \frac{1}{n}$ و $0 \leq v_n \leq 1$

3-أ-بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx$$

3-ب-إستنتج اتجاه تغير المتتالية (v_n).

4-بيّن أنّ المتتالية (v_n) متقاربة.نرمز بـγ إلى نهاية المتتالية (v_n) (لانريد حساب γ).

-ماهي نهاية المتتالية (u_n)؟

الحل

1-أ-حساب u_2 ، u_3 ، u_4

لدينا $u_1 = 1$ و $u_n = u_{n-1} + \frac{1}{n}$ ،

ومنه $u_2 = u_{2-1} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$u_3 = u_{3-1} + \frac{1}{3} = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$

$u_4 = u_{4-1} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6} + \frac{1}{4} = \frac{50}{24}$

1-ب- تبيان أن $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$

البرهان بالتراجع: نسمي $p(n)$ الخاصية:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

من أجل $n = 1$ لدينا: $u_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1} = 1$

ومنه $p(1)$ محققة من أجل $n = 1$

نفرض صحة $p(n)$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$

أي $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ ونبرهن صحة $p(n+1)$

أي $u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$

لكن لدينا من الفرضية $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

ولدينا $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1}$

ومنه $u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1}$

أي $u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$ محققة $p(n+1)$

إذن $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$

2-أ-تبيان أنه من أجل $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$$

لدينا $k \in \mathbb{N}^*$

ومنه $k \leq x \leq k+1$

و $0 < \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$

إذن $\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx$

ومنه

$$\frac{1}{k+1} \int_k^{k+1} 1dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k} \int_k^{k+1} 1dx$$

بعد التكامل نجد

$$\frac{1}{k+1} [x]_k^{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k} [x]_k^{k+1}$$

أي

$$\frac{1}{k+1} [k+1-k] \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k} [k+1-k]$$

ومنه

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$$

2-ب-استنتاج أنه $n \geq 2$:

$$u_n - 1 \leq \ln n \leq u_n - \frac{1}{n}$$

لدينا $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$

لدينا الدالة الأصلية لـ $x \to \frac{1}{x}$ هي $x \to \ln x$

ومنه: $\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_k^{k+1}$

$= \ln(k+1) - \ln k$

ومنه $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$

نكتب هذه المتباينة $(n-1)$ مرة

(من أجل $k = 1$ ، $k = 2$ .... $k = n-1$)

ومنه من أجل $k = 1$ $\frac{1}{2} < \ln 2 - \ln 1 \leq 1$

ومنه من أجل $k = 2$ $\frac{1}{3} < \ln 3 - \ln 2 \leq \frac{1}{2}$

ومنه من أجل $k = 3$ $\frac{1}{4} < \ln 4 - \ln 3 \leq \frac{1}{3}$

ومنه من أجل $k = n-1$

$$\frac{1}{n-1+1} < \ln(n-1+1) - \ln(n-1) \leq \frac{1}{n-1}$$

$$\frac{1}{n} < \ln n - \ln(n-1) \leq \frac{1}{(n-1)}$$

بالجمع طرف لطرف نجد:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \leq \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \cdots + \ln n - \ln(n-1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}$$

ومنه نجد:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \leq \ln n \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}$$

لدينا $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$

ولدينا $u_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$

ولدينا $u_n = u_{n-1} + \frac{1}{n}$

ومنه $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = u_n - \frac{1}{n}$

ومنه $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n} \leq \ln n \leq u_n - \frac{1}{n}$

ولدينا $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$

من أجل $n \geq 2$

لدينا $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$

أي $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = u_n - 1$

ومنه $u_n - 1 \leq \ln n \leq u_n - \frac{1}{n}$

استنتاج أن $n \geq 2$: $0 \leq v_n \leq 1$

لدينا $v_n = u_n - \ln n$

و $u_n - 1 \leq \ln n \leq u_n - \frac{1}{n}$

ومنه $1 - u_n \geq -\ln n \geq -u_n + \frac{1}{n}$

و $1 - u_n + u_n \geq u_n - \ln n \geq -u_n + \frac{1}{n} + u_n$

و منه نجد: $1 \geq u_n - \ln n \geq \frac{1}{n}$

أي $0 \leq \frac{1}{n} \leq v_n \leq 1$

ومنه $0 \leq v_n \leq 1$

3-أ-تبيان من أجل $n \in \mathbb{N}^*$ أن:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx$$

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - \ln(n+1) - u_n + \ln n$$

$$v_{n+1} - v_n = u_n + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) - u_n + \ln n$$

$$= \frac{1}{n+1} - [\ln(n+1) - \ln n]$$

بوضع $k = n$

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_n^{n+1} = \ln(n+1) - \ln n$$

ومنه $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx$

3-ب-استنتاج اتجاه تغير (v_n)

ندرس إشارة الفرق $v_{n+1} - v_n$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx$$

بوضع $k = n$ نجد من السؤال (2-أ-) أن:

$$-\frac{1}{n+1} \geq -\int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \geq -\frac{1}{n}$$

ومنه:

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \geq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

ومنه $0 \geq v_{n+1} - v_n \geq -\frac{1}{n(n+1)}$

ومنه $v_{n+1} - v_n \leq 0$

أي: المتتالية (v_n) متناقصة

4-تبيان أن (v_n) متقاربة

بما أن (v_n) متتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 0 فهي متقاربة نحو نهاية γ

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = \gamma$$

حساب $\lim_{n \to +\infty} u_n$

لدينا $v_n = u_n - \ln n$

ومنه $u_n = v_n + \ln n$

ومنه $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n + \ln n$

ولدينا $\lim_{n \to +} v_n = \gamma$

و $\lim_{n \to +\infty} \ln n = +\infty$

ومنه $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

104. متتالية مقترحة رقم:30

الإسم على اليوتيوب: مواضيع مقترحة في الرياضيات في المتتاليات لبكالوريا 2017 (ع ت+ ر + ت ر)رقم 33

1-لتكن المتتالية الحسابية (v_n) المعرفة في $\mathbb{N}^*$ بالحدين:

$$v_8 = 15 \,, v_2 = 3$$

1-أ-عين أساس المتتالية (v_n) وحدها الأول v_1 ثم عبارة الحد العام v_n بدلالة n.حدد إتجاه تغيراتها.

1-ب-بين وجود ستة حدود متعاقبة من المتتالية (v_n) مجموعها يساوي 2016,عين الحد الأول منها.

2-لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة في $\mathbb{N}^*$ بحدها العام u_n: $u_n = 2n - 1 - \ln\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)$

2-أ-تحقق أن:. $u_n = v_n - \ln\left(\frac{v_n}{v_{n+1}}\right)$

2-ب-نضع: $w_n = \ln\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)$ بين أن:

$$w_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_n = -\ln(2n+1)$$

3-باستعمال النتائج السابقة أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$

الحل

1-أ-تعيين الأساس r للمتتالية (v_n)

$v_n = v_p + (n-p)r$ مع $n \geq p$

$$v_8 = v_2 + (8-2)r$$

$$15 = 3 + 6r$$

ومنه $r = 2$

حساب الحد الأول

$$v_2 = v_1 + 1$$

ومنه $v_1 = v_2 - 1 = 3 - 2$

ومنه $v_1 = 1$

تحديد عبارة الحد العام

لدينا

$$v_n = v_1 + (n-1)r$$

$$v_n = 1 + (n-1)2$$

ومنه $v_n = 2n - 2 + 1$

ومنه $v_n = 2n - 1$

-تحديد اتجاه تغير المتتالية (v_n)

بما أن (v_n) متتالية حسابية وأساسها $r = 2 > 0$ فإنها متزايدة تماما على $\mathbb{N}^*$

1-ب-تبيان وجود ستة حدود متعاقبة من (v_n) مجموعها يساوي 2016

بما أن (v_n) متتالية حسابية وليكن الحد الأول من الستة a

$$a+(a+r)+(a+2r)+(a+3r)+(a+4r)+(a+5r)=2016$$

ومنه $6a+15r=2016$

ومنه $6a=2016-15(2)$

ومنه $a=\frac{2016-30}{6}$

$a=331$

يمكن التحقق بتعويض قيمة a

$$331+(331+2)+(331+4)+(331+6)+(331+8)+(331+10)$$
$$=331+331+336+337+339+341=2016$$

ومنه يوجد 6 حدود متتابعة للمتتالية (v_n) مجموعها يساوي 2016 حيث الحد الأول منها هو $a=331$

2-أ-التحقق أن: $u_n=v_n-\ln\left(\frac{v_n}{v_{n+1}}\right)$

لدينا: $v_n=2n-1$

و $u_n=2n-1-\ln\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)$

$v_{n+1}=2n+1$

ومنه نجد أن $u_n=v_n-\ln\left(\frac{v_n}{v_{n+1}}\right)$

2-ب-تبيان أن:
$$w_1+w_2+w_3+\cdots+w_n=-\ln(2n+1)$$

لدينا $w_n=\ln\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)$

ونلاحظ أن: $w_n=\left(\frac{v_n}{v_{n+1}}\right)$

ومنه $w_1=\ln\left(\frac{v_1}{v_2}\right)$

$w_2=\ln\left(\frac{v_2}{v_3}\right)$

$w_3=\ln\left(\frac{v_3}{v_4}\right)$

.

.

$w_n=\ln\left(\frac{v_n}{v_{n+1}}\right)$

بالجمع نجد:

$$w_1+w_2+w_3+\cdots+w_n=\ln\left(\frac{v_1}{v_2}\right)+\ln\left(\frac{v_2}{v_3}\right)+\cdots+\ln\left(\frac{v_n}{v_{n+1}}\right)$$

ومنه:

$$=(\ln v_1-\ln v_2)+(\ln v_2-\ln v_3)+\cdots+(\ln v_n-\ln v_{n+1})$$

$$\ln v_1-\ln(v_{n+1})=\ln\left(\frac{v_1}{v_{n+1}}\right)$$

ومنه $\ln\left(\frac{1}{2n+1}\right)=\ln 1-\ln(2n+1)$

$$w_1+w_2+\cdots+w_n=-\ln(2n+1)$$

3-حساب S_n: $S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n$

لدينا $u_n=v_n-\ln\left(\frac{v_n}{v_{n+1}}\right)$

و $w_n=\ln\left(\frac{v_n}{v_{n+1}}\right)$

ومنه $u_n=v_n-w_n$

ومنه $u_1=v_1-w_1$

$u_2=v_2-w_2$

.

.

$u_n=v_n-w_n$

أي بالجمع نجد:

$$S_n=(v_1+w_1)+(v_2-w_2)+\cdots+(v_n-w_n)$$

أي

$$S_n=v_1+v_2+\cdots+v_n-(w_1+w_2+\cdots+w_n)$$

حيث S_1: مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية

$S_1=v_1+v_2+\cdots+v_n$

منه $S_1=\frac{n-1+1}{2}(v_1+v_n)$

$S_1=\frac{n}{2}[1+2n-1]=\frac{n}{2}(2n)=n^2$

$S_1=n^2$

ومنه نجد $S_n=n^2-[-\ln(2n+1)]$

أي $S_n=n^2+\ln(2n+1)$

حساب نهاية S_n

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}(n^2+\ln(2n+1))$$

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=+\infty$$

105. متتالية مقترحة رقم:31

الإسم على اليوتيوب: مواضيع مقترحة في الرياضيات في المتتاليات لبكالوريا 2017 (ع ت+ ر+ ت ر)رقم 7

-نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$$u_n=e^{2n}-e^{2(n-1)}$$

1-أ-ببيّن أنّ (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول u_0.

بـ-أكتب بدلالة n، S_n.حيث:

$$S_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$$

جـ-استنتج المجموع S'_n حيث:

$$S'_n = S_0 + S_1 + \dots + S_n$$

2-لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$$v_n = \sqrt{S_n + e^{-2}}$$

2-أ-أكتب v_n بدلالة n.

2-ب-أحسب بدلالة n، المجموع A_n حيث:

$$A_n = \frac{1}{v_0^3} + \frac{1}{v_1^3} + \dots + \frac{1}{v_n^3}$$

2-جـ-أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n$.

3-لتكن المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$$w_n = \ln(v_n)$$

3-أ-بيّن أنّ المتتالية (w_n) متتالية حسابية ثم أحسب B_n حيث: $B_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$

3-ب-استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن:

$$v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n = \sqrt{e^{n^2+n}}$$

الحل

1-أ-بيان أن (u_n) متتالية هندسية:

(u_n) متتالية هندسية إذا وفقط إذا كان

$$u_{n+1} = u_n . q$$

لدينا $u_n = e^{2n} - e^{2(n-1)}$

ومنه $u_{n+1} = e^{2(n+1)} - e^{2(n)}$

$$u_{n+1} = e^{2n+2} - e^{2n} = e^{2n}e^2 - e^{2n}$$

$$= e^2\left(e^{2n} - \frac{e^{2n}}{e^2}\right)$$

$$= e^2(e^{2n} - e^{2n-2})$$

$$= e^2\left[e^{2n} - e^{2(n-1)}\right]$$

ولدينا $u_n = e^{2n} - e^{2(n-1)}$

ومنه $u_{n+1} = e^2 u_n$

ومنه (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = e^2$

حساب الحد الأول u_0

$$u_0 = e^{2(0)} - e^{2(0-1)}$$

$$= e^0 - e^{-2}$$

$$u_0 = 1 - e^{-2}$$

1-ب-كتابة S_n بدلالة n:

بما أن S_n عبارة عن مجموع لحدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها $q = e^2$

وحدها الأول $u_0 = 1 - e^{-2}$

ومنه

$$S_n = \frac{u_0(q^{n+1}-1)}{q-1}$$

$$S_n = (1 - e^{-2})\frac{(e^2)^{n+1} - 1}{e^2 - 1}$$

$$S_n = (1 - e^{-2})\frac{e^{2n+2} - 1}{e^2 - 1}$$

$$= \left(\frac{e^2}{e^2} - \frac{1}{e^2}\right)\frac{(e^{2n+2} - 1)}{e^2 - 1}$$

$$S_n = \frac{e^{2n+2} - 1}{e^2}$$

1-جـ-استنتاج المجموع S_n':

لدينا:

$$S_n = \frac{e^{2n+2}-1}{e^2} = \frac{e^{2n+2}}{e^2} - \frac{1}{e^2}$$

$$S_n = \frac{(e^{2n}e^2)}{e^2} - \frac{1}{e^2} = e^{2n} - \frac{1}{e^2}$$

ومنه لدينا

$$S_0 = e^{2(0)} - \frac{1}{e^2}$$

$$S_1 = e^{2(1)} - \frac{1}{e^2}$$

$$S_2 = e^{2(2)} - \frac{1}{e^2}$$

.

.

$$S_n = e^{2(n)} - \frac{1}{e^2}$$

بالجمع طرفا لطرف نجد:

$$S_n = S_0 + S_1 \dots + S_1$$

$$= e^{2(0)} + e^{2(1)} \dots + e^{2(n)} - \frac{1}{e^2} - \frac{1}{e^2} \dots - \frac{1}{e^2}$$

بأخذ: $S''_n = e^{2(0)} + e^{2(1)} \dots + e^{2(n)}$

فإن S''_n هي مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية (T_n) أساسها

$$q = e^2$$

حدها الأول $T_0 = 1$

ومنه

$$S''_n = \frac{T_0(q^{n+1} - 1)}{q - 1} = \frac{1((e^2)^{n+1} - 1)}{e^2 - 1}$$

$$= \frac{e^{2n+2} - 1}{e^2 - 1}$$

$$S' = S''_n + (n+1)\left(-\frac{1}{e^2}\right)$$

$$S'_n = \frac{e^{2n+2} - 1}{e^2 - 1} - \frac{n+1}{e^2}$$

2-أ-كتابة v_n بدلالة n:

$$v_n = \sqrt{S_n + e^{-2}}$$

$$v_n = \sqrt{\frac{(e^{2n}e^2)}{e^2} - \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^2}}$$

$$v_n = \sqrt{e^{2n}} = e^n$$

2-ب-حساب بدلالة n المجموع A_n:

لدينا $v_n = e^n$

$$(v_n)^3 = (e^n)^3 = e^{3n}$$

$$\frac{1}{v_n^3} = \frac{1}{e^{3n}} = e^{-3n}$$

$$A_n = e^{3(0)} + e^{-3(1)} + e^{-3(2)} + \dots + e^{-3(n)}$$

بأخذ $H_n = e^{-3n}$

ومنه A_n عبارة عن مجموع لحدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها $q'' = e^{-3}$ وحدها الأول $A_0 = 1$

ومنه $A_n = \dfrac{H_0\left((q'')^{n+1} - 1\right)}{q'' - 1} = 1\dfrac{\left((e^{-3})^{n+1} - 1\right)}{e^{-3} - 1}$

$$A_n = \frac{e^{-3n-3} - 1}{e^{-3} - 1}$$

2-جـ-حساب $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n$

$$\lim_{n \to +\infty} A_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{e^{-3n-3} - 1}{e^{-3} - 1}$$

لدينا $\lim\limits_{n \to +\infty} (e^{-3})^{n+1} = 0$ لأن: $-1 < e^{-3} < 1$

ومنه $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n = \dfrac{0-1}{e^{-3}-1} = \dfrac{-1}{e^{-3}-1}$

3-أ-بيان أن المتتالية (w_n) حسابية

حتى تكون w_n متتالية حسابية يجب أن يكون:

$$w_{n+1} - w_n = r$$

حيث r هو الأساس

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \ln v_{n+1} - \ln v_n \\ &= \ln e^{n+1} - \ln e^n \\ &= (n+1)\ln e - n \ln e \\ &= n + 1 - n \\ &= 1 \end{aligned}$$

ومنه $w_{n+1} - w_n = 1$

ومنه w_n متتالية حسابية أساسها r

وحدها الأول $w_0 = 0$

و $w_0 = \ln v_0 = \ln 1 = 0$

• حساب B_n

B_n مجموع لحدود متتابعة لمتتالية حسابية أساسها $r = 1$ وحدها الأول $w_0 = 0$

$$B_1 = \frac{n+1}{2}(0 + n)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}$$

3-ب-استنتاج من أجل كل عدد طبيعي n أن:

$$p_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n = \sqrt{e^{n^2+n}}$$

لدينا $v_n = e^n$

ومنه $v_0 = e^0$

$v_1 = e^1$

$v_2 = e^2$

.

.

$v_n = e^n$

بالضرب طرفا لطرف نجد

$$v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n = e^{0+1+2+\dots+n}$$

لدينا $0 + 1 + 2 + 3 + \dots + n$ هو مجموع متتالية حسابية وهو B_n

ومنه

$$v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n = e^{B_n} = e^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$= e^{\frac{(n^2+n)}{2}}$$

$$= \left(e^{n^2+n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

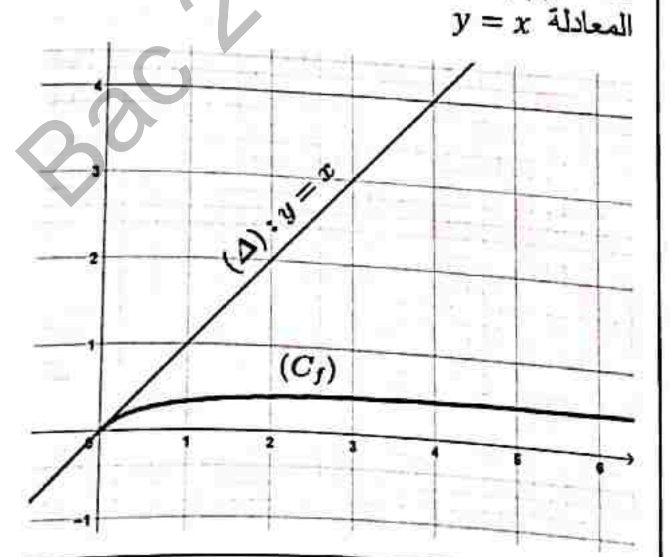
ومنه $P_n = \sqrt{e^{n^2+n}}$

106. متتالية مقترحة رقم:32

الإسم على اليوتيوب: مواضيع مقترحة في الرياضيات في المتتاليات لبكالوريا(عت+ر + تر)2019 رقم 1

المستوي منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \dfrac{x}{2x+1}$

وليكن (C_f) المنحنى الممثل لها (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$



1-بيّن أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ ثم استنتج أنه إذا كان $0 \le x \le 1$ فإن $0 \le f(x) \le 1$

2-نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{u_n}{2u_n+1}$

-على الوثيقة المرفقة ، مثل على محور الفواصل الحدود u_3, u_2, u_1, u_0 دون حسابها مع إظهار خطوط التمثيل

-ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها

3-برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n . $0 \le u_n \le 1$

-بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة . استنتج أنها متقاربة

4-لتكن المتتالية (w_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $w_n = \frac{1}{u_n}$

4-أ-أثبت أن المتتالية (w_n) متتالية حسابية يطلب إيجاد أساسها r وحدها الأول w_0

4-ب-اكتب عبارة w_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

5-أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

الحل

1- تبيان أن الدالة f متزايدة تماما على $[0,+\infty[$

-لدينا الدالة f معرفة ومستمرة وقابلة للاشتقاق على المجال $[0,+\infty[$

حيث: $f'(x) = \frac{1(2x+1)-2(x)}{(2x+1)^2} = \frac{2x+1-2x}{(2x+1)^2}$

$$f'(x) = \frac{1}{(2x+1)^2} > 0$$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0,+\infty[$

-استنتاج أنه إذا كان $0 \le x \le 1$ فإن $0 \le f(x) \le 1$

لدينا $0 \le x \le 1$ والدالة f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$

ومنه $f(0) \le f(x) \le f(1)$

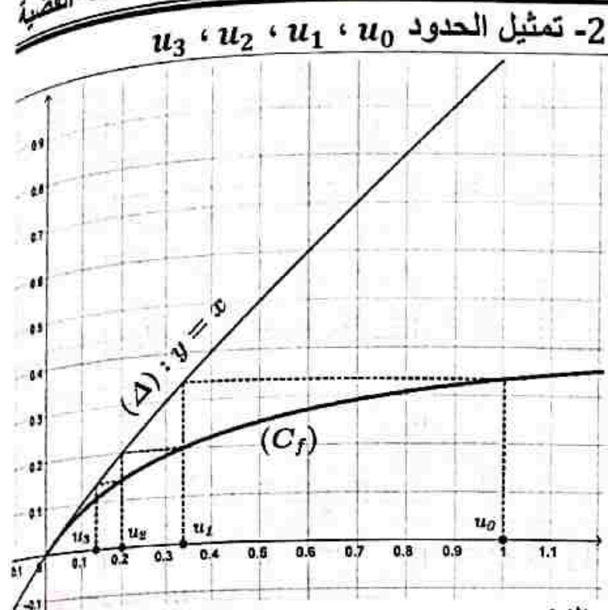
حيث $f(0) = \frac{0}{2(0)+1} = 0$

و $f(1) = \frac{1}{2(1)+1} = \frac{1}{3}$

ومنه $0 \le f(x) \le \frac{1}{3} \le 1$

أي $0 \le f(x) \le 1$

2- تمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3



-التخمين

نلاحظ أن: $u_3 < u_2 < u_1 < u_0$

ومنه المتتالية (u_n) تبدو متناقصة تماما ومتقاربة نحو فاصلة نقطة تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ)

3- البرهان أن: $0 \le u_n \le 1$

ط1:

-نسمي $p(n)$ الخاصية " $0 \le u_n \le 1$" من أجل كل عدد طبيعي n

من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = 1$ و $0 \le 1 \le 1$

أي $0 \le u_0 \le 1$

ومنه $p(0)$ محققة

- نفرض أن $p(n)$ محققة من أجل $n \ge 0$

أي $0 \le u_n \le 1$

- نبرهن صحة $p(n+1)$ أي $0 \le u_{n+1} \le 1$

- لدينا من فرضية التراجع $0 \le u_n \le 1$

والدالة f متزايدة تماما ومستمرة على $[0;1]$

ومنه $f(0) \le f(u_n) \le f(1)$

حيث $f(0) = 0$ و $f(1) = \frac{1}{3} \le 1$

وبالتالي $0 \le f(u_n) \le 1$

ولدينا $u_{n+1} = f(u_n)$

أي $0 \le u_{n+1} \le 1$

وبالتالي $p(n+1)$ محققة

إذن $0 \le u_n \le 1$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

ط2-

- نسمي $p(n)$ الخاصية $0 \le u_n \le 1$

من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = 1$ ، أي $0 \le 1 \le 1$

ومنه $p(0)$ محققة

- نفرض أن $p(n)$ محققة من أجل $n \ge 0$

أي $0 \le u_n \le 1$

نبرهن صحة $p(n+1)$ أي $0 \le u_{n+1} \le 1$

لدينا $u_{n+1} = \frac{u_n}{2u_n+1}$

باستعمال القسمة الاقليدية:

$$\begin{array}{r|l} u_n & 2u_n+1 \\ -\left(u_n+\frac{1}{2}\right) & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{1}{2} & \end{array}$$

ومنه $u_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{-\frac{1}{2}}{2u_n+1}$

أي $u_{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4u_n+2}$

لدينا من فرضية التراجع

$$0 \le u_n \le 1$$
$$0 \le 4u_n \le 4$$
$$2 \le 4u_n + 2 \le 6$$

بقلب المتراجحة تتحصل على

$$\frac{1}{6} \le \frac{1}{4u_n+2} \le \frac{1}{2}$$

ومنه $-\frac{1}{2} \le \frac{-1}{4u_n+2} \le -\frac{1}{6}$

ومنه $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \le \frac{1}{2} - \frac{1}{4u_n+2} \le \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$

أي $0 \le u_{n+1} \le \frac{2}{6}$

ومنه $0 \le u_{n+1} \le \frac{1}{3} \le 1$

أي $0 \le u_{n+1} \le 1$ ومنه $p(n+1)$ محققة

إذن $0 \le u_n \le 1$ من أجل كل عدد طبيعي n

تبيان أن المتتالية (u_n) متناقصة

نعلم أن (u_n) متناقصة معناه $u_{n+1} - u_n \le 0$

لدينا

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{2u_n+1} - u_n = \frac{-2u_n^2 - u_n + u_n}{2u_n+1}$$

ومنه

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-2u_n^2}{2u_n+1}$$

لدينا مما سبق أن $0 \le u_n \le 1$

ومنه $2u_n + 1 > 0$

ولدينا $0 \le u_n$ ومنه $-2u_n^2 \le 0$

ومنه $u_{n+1} - u_n \le 0$

أي أن (u_n) متناقصة

استنتاج أن (u_n) متقاربة

بما أن (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 0 فهي متقاربة نحو نهاية l

4-أ- اثبات أن (w_n) متتالية حسابية مع تعيين أساسها r وحدها الأول w_0

لدينا $w_n = \frac{1}{u_n}$

(w_n) حسابية أي $w_{n+1} = w_n + r$

لدينا $w_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{\frac{u_n}{2u_n+1}}$

ومنه $w_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n} = \frac{2u_n}{u_n} + \frac{1}{u_n}$

ومنه $w_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n} = w_n + 2$

$$w_{n+1} = w_n + 2$$

ومنه (w_n) متتالية حسابية أساسها $r = 2$ وحدها الأول w_0

$$w_0 = \frac{1}{u_0} = \frac{1}{1} = 1$$

4-ب- كتابة عبارة w_n بدلالة n

لدينا: $w_n = w_p + (n-p)r$ مع $n \ge p$

و $w_0 = 1$

ومنه $w_n = w_0 + nr$

أي $w_n = 1 + 2n$

- استنتاج عبارة u_n

لدينا $w_n = \frac{1}{u_n}$

ومنه $u_n = \frac{1}{w_n}$

أي $u_n = \frac{1}{1+2n}$

5- حساب نهاية u_n

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1+2n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2n}\right)$$

ومنه $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

107. متتالية مقترحة رقم:33

الإسم على اليوتيوب: مواضيع مقترحة في الرياضيات في المتتاليات لبكالوريا 2019(عت+ر+تر) رقم 13

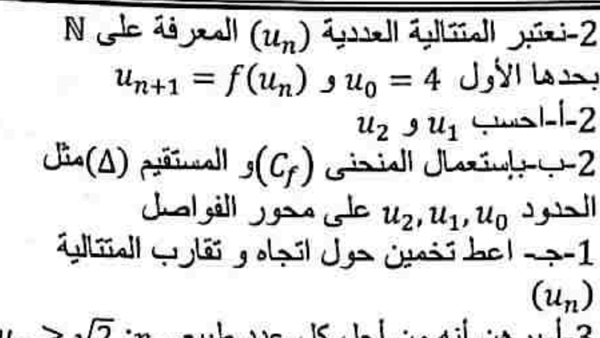
1-نعرف الدالة العددية f على المجال $[1;4]$ بالعبارة

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$

1-أ-ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[1;4]$ ثم شكل جدول تغيراتها

1-ب-أنشئ المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ في نفس المعلم


2-نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 4$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

2-أ-احسب u_1 و u_2

2-ب-بإستعمال المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) مثل الحدود u_2, u_1, u_0 على محور الفواصل

1-جـ- اعط تخمين حول اتجاه و تقارب المتتالية (u_n)

3-أ-برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n \geq \sqrt{2}$

3-ب-أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة ثم أحسب نهايتها

4-أ-برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{2}) + \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

4-ب-برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n،

$$0 \leq u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{2})$$

4-جـ-استنتج أن:

$$0 \leq u_n - \sqrt{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (4 - \sqrt{2})$$

4-د-احسب مرة أخرى نهاية المتتالية (u_n)

الحل

1-أ-دراسة اتجاه تغير الدالة f على المجال $[1;4]$

-الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $[1;4]$ ودالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{x^2}\right)$$

ندرس إشارة $f'(x)$

$f'(x) = 0$ معناه: $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{x^2}\right) = 0$

أي $1 - \frac{2}{x^2} = 0$

ومنه $\frac{x^2-2}{x^2} = 0$

أي $x^2 - 2 = 0$

أي $x^2 = 2$

إذن: $\begin{cases} x = \sqrt{2} \\ \text{أو} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}$

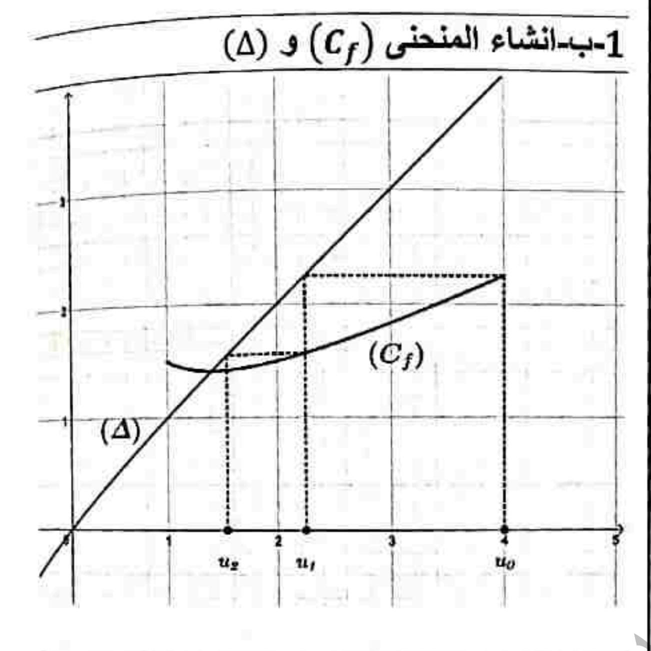
x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		1		$\sqrt{2}$		4	$+\infty$
x^2-2	+	0	−		−	0	+		+
$f'(x)$					−	0	+		

ومنه الدالة f متناقصة على المجال $[1;\sqrt{2}]$ ومتزايدة على المجال $[\sqrt{2};4]$

جدول تغيرات الدالة f

x	1		$\sqrt{2}$		4
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	↘	$\sqrt{2}$	↗	$\frac{9}{4}$

1-ب-انشاء المنحنى (C_f) و (Δ)



2-أ-حساب u_1 و u_2

$$u_1 = f(u_0) = f(4) = \frac{9}{4}$$

$$u_2 = f(u_1) = f\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{113}{72}$$

2-ب-باستعمال المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ):

تمثيل الحدود u_2, u_1, u_0 على محور الفواصل حيث $u_0 = 4$

2-جـ-إعطاء تخمين حول اتجاه وتقارب المتتالية (u_n)

التخمين:

بما أن $u_2 < u_1 < u_0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة تماما وتتقارب نحو فاصلة نقطة تقاطع (C_f) مع (Δ) أي نحو $\sqrt{2}$

3-أ-البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n:
$$u_n \geq \sqrt{2}$$

يتم البرهان على ذلك باستعمال البرهان بالتراجع:

نسمي $p(n)$ الخاصية $u_n \geq \sqrt{2}$

من أجل $n = 0$ لدينا: $u_0 = 4 \geq \sqrt{2}$ ومنه $p(0)$ محققة

نفرض أن $p(n)$ محققة أي $u_n \geq \sqrt{2}$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي $u_{n+1} \geq \sqrt{2}$

يكفي أن نبرهن أن: $u_{n+1} - \sqrt{2} \geq 0$

ومنه
$$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) - \sqrt{2}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{u_n^2 + 2}{u_n}\right) - \sqrt{2}$$
$$= \frac{u_n^2 - 2\sqrt{2}u_n + 2}{2u_n}$$
$$= \frac{\left(u_n - \sqrt{2}\right)^2}{2u_n}$$

لأن $\left(u_n - \sqrt{2}\right)^2 = u_n^2 - 2\sqrt{2}\,u_n + 2$

ومنه $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{\left(u_n - \sqrt{2}\right)^2}{2u_n}$

لدينا من الفرضية $u_n \geq \sqrt{2}$

أي $u_n > 0$

ومنه $\frac{\left(u_n - \sqrt{2}\right)^2}{2u_n} \geq 0$

إذن: $u_{n+1} - \sqrt{2} \geq 0$

ومنه $u_{n+1} \geq \sqrt{2}$

أي $p(n+1)$ محققة

ومنه الخاصية $p(n)$ صحيحة

3-ب-دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n)

ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) - u_n$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{u_n^2 + 2}{u_n}\right) - u_n$$
$$= \frac{u_n^2 + 2 - 2u_n^2}{2u_n}$$
$$= \frac{2 - u_n^2}{2u_n}$$
$$= \frac{(\sqrt{2} + u_n)(\sqrt{2} - u_n)}{2u_n}$$

ولدينا $u_n \geq \sqrt{2}$

اذن $\sqrt{2} - u_n \leq 0$

إذن: $\frac{(\sqrt{2} + u_n)(\sqrt{2} - u_n)}{2u_n} \leq 0$

ومنه $u_{n+1} - u_n \leq 0$

أي: المتتالية (u_n) متناقصة

استنتاج أن (u_n) متقاربة:

بما أن (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد $\sqrt{2}$ (لأن $\sqrt{2} \leq u_n$) فهي متقاربة نحو نهايتها l

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

بما أن (u_n) متتالية متقاربة فإن:
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$$

ومنه $l = \frac{1}{2}\left(l + \frac{2}{l}\right)$

نضرب في (2) نجد:
$$2l = l + \frac{2}{l}$$

ومنه $\frac{l^2 - 2}{l} = 0$

ومنه $l^2 - 2 = 0$

أي $l^2 = 2$

اذن
$$\begin{cases} l = \sqrt{2} \\ \text{أو} \\ l = -\sqrt{2} \end{cases}$$

$l = -\sqrt{2}$ مرفوض لأن $u_n \geq \sqrt{2}$

إذن: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}$

4-أ-البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n:
$$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right) + \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

يكفي أن نبرهن أن:
$$u_{n+1} - \sqrt{2} - \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right) - \frac{1}{u_n} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

ومنه
$$\frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) - \sqrt{2} - \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right) - \frac{1}{u_n} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{u_n} - \sqrt{2} - \frac{1}{2}u_n + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{u_n} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$= 0$$

ومنه $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right) + \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\sqrt{2}}$

4-ب-البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$0 \le u_{n+1} - \sqrt{2} \le \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right)$$

إثبات أن: $0 \le u_{n+1} - \sqrt{2}$

لدينا: من البرهان بالتراجع السابق:

$u_{n+1} \ge \sqrt{2}$ ومنه $u_{n+1} - \sqrt{2} \ge 0$

إثبات أن: $u_{n+1} - \sqrt{2} \le \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right)$

$$u_{n+1} - \sqrt{2} - \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) - \sqrt{2} - \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right)$$
$$= \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(من نتائج سؤال (4-أ))

لكن لدينا: $u_n \ge \sqrt{2}$ ومنه: $\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\sqrt{2}} \le 0$

ومنه $u_{n+1} - \sqrt{2} \le \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right)$

إذن في الأخير نستنتج أن:

$$0 \le u_{n+1} - \sqrt{2} \le \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right)$$

4-جـ استنتاج أن:

$$0 \le u_n - \sqrt{2} \le \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(4 - \sqrt{2}\right)$$

لدينا مما سبق: $0 \le u_{n+1} - \sqrt{2} \le \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right)$

ومنه

$n = 0$ $\quad 0 \le u_1 - \sqrt{2} \le \frac{1}{2}\left(u_0 - \sqrt{2}\right)$

$n = 1$ $\quad 0 \le u_2 - \sqrt{2} \le \frac{1}{2}\left(u_1 - \sqrt{2}\right)$

.

$n = n - 1$ $\quad 0 \le u_n - \sqrt{2} \le \frac{1}{2}\left(u_{n-1} - \sqrt{2}\right)$

بالضرب العمودي طرفا لطرف مع الاختزال نجد:

$$0 \le u_n - \sqrt{2} \le \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(4 - \sqrt{2}\right)$$

5-حساب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

لدينا مما سبق

$$0 \le u_n - \sqrt{2} \le \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(4 - \sqrt{2}\right)$$

ولدينا $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ (لأن $-1 < \frac{1}{2} < 1$)

ومنه حسب مبرهنة الحصر نجد أن:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(u_n - \sqrt{2}\right) = 0$$

ومنه $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{2}$

108. متتالية مقترحة رقم:34

الإسم على اليوتيوب: مواضيع مقترحة في الرياضيات في المتتاليات باك 2018 (ع ت+ر+ت ر) رقم 11

f دالة عددية معرفة على المجال $[0; +\infty[$ بالعبارة:

$$f(x) = \sqrt{x + 12}$$

(C_f) منحناها البياني الممثل في معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$

1-أ-ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

1-ب-ارسم (C_f) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ في المعلم السابق

2-لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_o = 3$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

2-أ-أنشئ على محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 دون حسابها

2-ب-ضع تخمينا لاتجاه تغير وتقارب المتتالية (u_n)

2-جـ-برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n فإن: $0 \le u_n \le 4$

2-د-بيّن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة ماذا تستنتج ؟

3-أ-بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن:

$$|u_{n+1} - 4| \le \frac{1}{4}|u_n - 4|$$

3-ب-استنتج انه من أجل كل عدد طبيعي n فإن:

$$|u_n - 4| \le \frac{1}{4^n}$$

3-جـ-استنتج نهاية المتتالية (u_n)

الحل

1-أ-دراسة اتجاه التغير

الدالة f قابلة للاشتقاق على $[0; +\infty[$ ودالتها المشتقة: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+12}}$

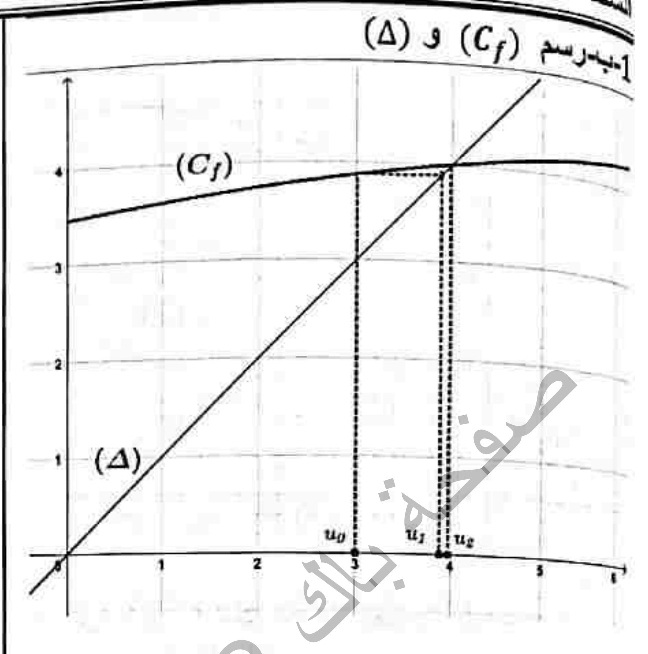
لدينا $f'(x) > 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على $[0; +\infty[$

جدول تغيرات f:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$2\sqrt{3}$ ↗	$+\infty$

$$f(0) = 2\sqrt{3}$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

1-ب-رسم (C_f) و (Δ)



2-أ-إنشاء الحدود u_2, u_1, u_0

في المعلم السابق

2-ب-وضع تخمين

نلاحظ أن $u_0 < u_1 < u_2$ أي المتتالية (u_n) تبدو متزايدة تماما وتتقارب نحو فاصلة نقطة تقاطع (C_f) و(Δ)

2-جـ-البرهان بالتراجع أن $0 \le u_n \le 4$

نسمي $p(n)$ الخاصية $0 \le u_n \le 4$

من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = 3$ و $0 \le 3 \le 4$

ومنه $p(0)$ محققة

نفرض أن $p(n)$ محققة من أجل $n \ge 0$

أي $0 \le u_n \le 4$

ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي $0 \le u_{n+1} \le 4$

لدينا من الفرضية $0 \le u_n \le 4$

ولدينا الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $[0,4]$

ومنه $f(0) \le f(u_n) \le f(4)$

ومنه $2\sqrt{2} \le u_{n+1} \le 4$

ومنه $0 \le u_{n+1} \le 4$

أي $p(n+1)$ محققة

ومنه $0 \le u_n \le 4$ من أجل كل عدد طبيعي n

2-د-تبيان أن المتتالية (u_n) متزايدة

(u_n) متزايدة معناه $u_{n+1} - u_n \ge 0$

أي

$u_{n+1} \ge u_n$

طريقة 1: نبرهن على ذلك بالتراجع:

نسمي $p(n)$ الخاصية $u_{n+1} \ge u_n$

من اجل $n = 0$ لدينا $u_0 = 3$ و $u_1 = \sqrt{u_0 + 12}$

و $\sqrt{15} \ge 3$ أي $u_1 \ge u_0$ ومعناه $p(0)$ محققة

نفرض أن $p(n)$ محققة أي $u_{n+1} \ge u_n$ من أجل $n \ge 0$

ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي $u_{n+2} \ge u_{n+1}$

لدينا من الفرضية $u_{n+1} \ge u_n$

والدالة f متزايدة تماما فإنه

$$f(u_{n+1}) \ge f(u_n)$$

ولدينا $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$

و $f(u_n) = u_{n+1}$

ومنه $u_{n+2} \ge u_{n+1}$

ومنه $p(n+1)$ محققة

ومنه نستنتج ان $u_{n+1} \ge u_n$

معناه $u_{n+1} - u_n \ge 0$

أي (u_n) متتالية متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

طريقة 2: للبرهان على أن (u_n) متزايدة يكفي أن نبرهن $u_{n+1} - u_n \ge 0$

بالضرب في بالمرافق

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(\sqrt{u_n + 12} - u_n)(\sqrt{u_n + 12} + u_n)}{\sqrt{u_n + 12} + u_n}$$

ومنه $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-u_n^2 + u_n + 12}{\sqrt{u_n + 12} + u_n}$

لدينا $0 \le u_n \le 4$

ومنه $2\sqrt{3} \le \sqrt{u_n + 12} \le 4$

و $0 \le u_n \le 4$

بالجمع نجد $0 \le u_n + \sqrt{u_n + 12}$

ندرس إشارة البسط أي إشارة $-u_n^2 + u_n + 12$

$\Delta = 49$

$u_{n_1} = \dfrac{-1-7}{2(-1)} = 4$ $\quad$ $u_{n_2} = \dfrac{-1+7}{2(-1)} = -3$

u_n	$-\infty$		-3		0		4		$+\infty$
$-u_n^2 + u_n + 12$		$-$	0		$+$		0	$-$	

ومنه $-u_n^2 + u_n + 12 \ge 0$ على المجال $[0;4]$

ومنه (u_n) متتالية متزايدة على $[0;4]$

الاستنتاج: بما أن المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 4 فهي متقاربة نحو نهايتها l

3-أ-تبيان أن $|u_{n+1} - 4| \le \frac{1}{4}|u_n - 4|$

لدينا:

$$u_{n+1} - 4 = \sqrt{u_n + 12} - 4 \times \frac{\sqrt{u_n + 12} + 4}{\sqrt{u_n + 12} + 4}$$

ومنه: $|u_{n+1} - 4| = \left|\dfrac{u_n - 4}{\sqrt{u_n + 12} + 4}\right|$

$$u_{n+1} - 4 = \frac{|u_n - 4|}{\sqrt{u_n + 12} + 4}$$

ولدينا $0 \le u_{n+1} \le 4$ من البرهان بالتراجع

فان $4 < \sqrt{u_n + 12} + 4 \le 8$

ومنه $\frac{1}{8} \le \frac{1}{\sqrt{u_n+12+4}} \le \frac{1}{4}$

ولدينا $|u_n - 4| \ge 0$

ومنه نجد: $\frac{|u_n-4|}{\sqrt{u_n+12+4}} \le \frac{1}{4}|u_n - 4|$

3-ب-استنتاج أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$ $|u_n - 4| \le \frac{1}{4^n}$

لدينا $|u_{n+1} - 4| \le \frac{1}{4}|u_n - 4|$

ومنه

$n = 0$ $|u_1 - 4| \le \frac{1}{4}|u_0 - 4|$

$n = 1$ $|u_2 - 4| \le \frac{1}{4}|u_1 - 4|$

.

.

$n = n - 1$ $|u_n - 4| \le \frac{1}{4}|u_{n-1} - 4|$

بضرب طرف لطرف مع الاختزال نجد:

$$|u_n - 4| \le \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1+1} |u_0 - 4|$$

$$|u_n - 4| \le \frac{1}{4^n}$$

3-ج-إستنتاج نهاية المتتالية (u_n)

لدينا: من نتائج السؤال (3-أ) نجد :

$$|u_n - 4| \le \frac{1}{4^n}$$

إذن $-\left(\frac{1}{4}\right)^n \le u_n - 4 \le \left(\frac{1}{4}\right)^n$

ولدينا $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ لأن $-1 < \frac{1}{4} < 1$

ومنه حسب مبرهنة الحصر فإنه

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n - 4| = 0$$

ومنه $|l - 4| = 0$ أي $l = 4$

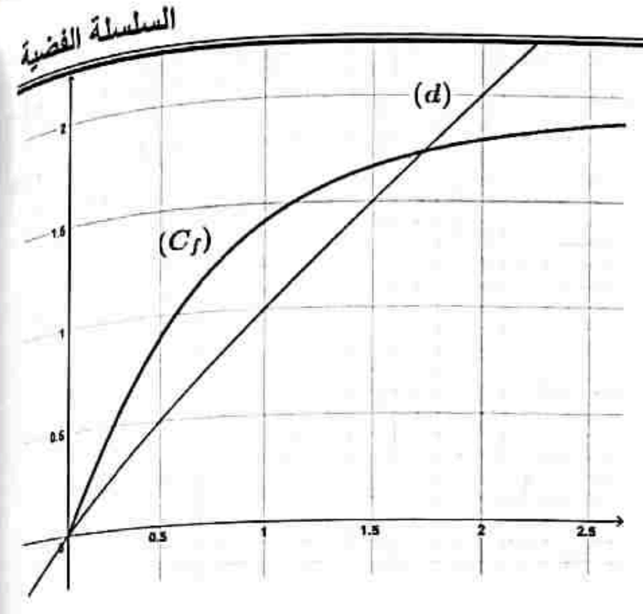
إذن: $\lim_{n\to+\infty} u_n = 4$

109. متتالية مقترحة رقم:35

الإسم على اليوتيوب: مواضيع مقترحة في الرياضيات في المتتاليات لبكالوريا 2017 (ع ت+ ر+ ت ر)رقم 5

(C_f) المقابل هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$

في المستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$ و (d) مستقيم ذو المعادلة $y = x$



1-بقراءة بيانية شكل جدول تغيرات الدالة f

2-بين أنه إذا كان $x \in [1; \sqrt{3}]$ فإن $f(x) \in [1; \sqrt{3}]$

3-(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = f(u_n)$

3- أ-باستعمال المنحنى (C_f) والمستقيم (d) مثل الحدود u_2, u_1, u_0 على محور الفواصل دون حسابيا مبرزا خطوط التمثيل

3-ب-ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها

3-ج-برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n $1 \le u_n \le \sqrt{3}$

3-د-بين أنه من اجل كل عدد طبيعي n:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n\left(2-\sqrt{1+u_n^2}\right)}{\sqrt{1+u_n^2}}$$ ،

-ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

4-(v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$v_n = \frac{u_n^2}{3 - u_n^2}$$

أ-برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب-أكتب كل من v_n و u_n بدلالة n

جـ-أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$ ، ماذا تستنتج ؟

الحل

1-جدول تغيرات الدالة f على $[0;+\infty[$

x	0 $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	0 ↗ 2

2-البرهان أن إذا كان $1 \le x \le \sqrt{3}$ فإن:

$$1 \le f(x) \le \sqrt{3}$$

لدينا $1 \le x \le \sqrt{3}$ والدالة f مستمرة ومتزايدة على المجال $[1;\sqrt{3}]$

ومنه: $f(1) \le f(x) \le f(\sqrt{3})$

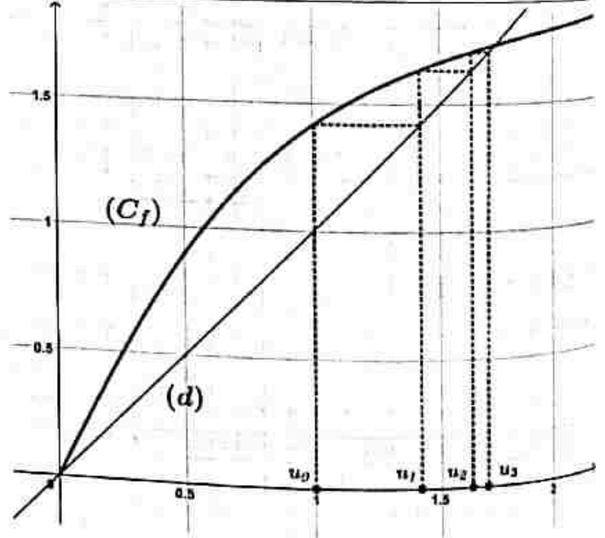
حساب $f(1)$: $f(1) = \frac{2(1)}{\sqrt{1+(1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

حساب $f(\sqrt{3})$:

$$f(\sqrt{3}) = \frac{2(\sqrt{3})}{\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}} = 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

ومنه $1 \le f(x) \le \sqrt{3}$

3-أ-تمثيل الحدود



3-ب-تخمين حول اتجاه تغير (u_n) وتقاربها

المتتالية (u_n) تبدو متزايدة ومتقاربة نحو فاصلة نقط تقاطع (C_f) مع (d)

3-جـ-البرهان بالتراجع

نسمي الخاصية (p_n): $1 \le u_n \le \sqrt{3}$

من أجل $n=0$ لدينا $u_0 = 1$ و $1 \le 1 \le \sqrt{3}$

ومنه

$$1 \le u_0 \le \sqrt{3}$$

أي $p(0)$ محققة

نفرض صحة الخاصية $p(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n ونبرهن صحة $p(n+1)$

أي نبرهن $1 \le u_{n+1} \le \sqrt{3}$

لدينا $1 \le u_n \le \sqrt{3}$

وبما أن الدالة f متزايدة على المجال $[1;\sqrt{3}]$

فإنه: $f(1) \le f(u_n) \le f(\sqrt{3})$

لدينا $u_{n+1} = f(u_n)$

ومنه $1 \le u_{n+1} \le \sqrt{3}$

أي $p(n+1)$ محققة

إذن $1 \le u_n \le \sqrt{3}$ من أجل كل عدد طبيعي n

3-د-تبيان أن: $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n\left(2-\sqrt{1+u_n^2}\right)}{\sqrt{1+u_n^2}}$

لدينا $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{\sqrt{1+u_n^2}} - u_n$

منه $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n\left(2-\sqrt{1+u_n^2}\right)}{\sqrt{1+u_n^2}}$

استنتاج اتجاه تغير (u_n)

لدينا $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n\left(2-\sqrt{1+u_n^2}\right)}{\sqrt{1+u_n^2}}$

ندرس إشارة $\frac{u_n\left(2-\sqrt{1+u_n^2}\right)}{\sqrt{1+u_n^2}}$

لاحظ أن المقام موجب يكفي دراسة إشارة البسط

لدينا $(1)\ldots\ldots\sqrt{1+u_n} > 0$

و $1 \le u_n \le \sqrt{3}$

ومنه $\sqrt{2} \le \sqrt{1+u_n^2} \le 2$

ومنه $2-\sqrt{2} \ge 2-\sqrt{1+u_n^2} \ge -2+2$

ومنه $(2)\ldots\ldots 2-\sqrt{2} \ge 2-\sqrt{1+u_n^2} \ge 0$

ومنه من (1) و (2) نجد أن: $u_{n+1} - u_n \ge 0$

أي (u_n) متتالية متزايدة على $\mathbb{N}$

4-أ-البرهان أن (v_n) هندسية مع تحديد أساسها و v_0

(v_n) متتالية هندسية يعني $v_{n+1} = v_n q$

لدينا $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}^2}{3-u_{n+1}^2}$

ومنه:

$$v_{n+1} = \frac{\frac{4u_n^2}{1+u_n^2}}{3-\left(\frac{4u_n^2}{1+u_n^2}\right)}$$

$$= \frac{4u_n^2}{3-u_n^2}$$

$$= 4\left(\frac{u_n^2}{3-u_n^2}\right)$$

$$= 4u_n$$

ومنه (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = 4$

حساب v_0:

$$v_0 = \frac{u_0^2}{3-u_0^2} = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}$$

4-ب-كتابة كل من u_n و v_n بدلالة n

كتابة v_n

لدينا (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 4$ و $v_0 = \frac{1}{2}$

ومنه $v_n = v_0 q^n$

أي $v_n = \frac{1}{2}4^n$

عبارة u_n:

لدينا $v_n = \frac{u_n^2}{3-u_n^2}$

ومنه $3v_n - u_n^2(v_n+1) = 0$

ومنه $u_n^2 = \frac{3v_n}{(v_n+1)}$

أي $u_n = \sqrt{\frac{3v_n}{v_n+1}}$

ومنه $u_n = \sqrt{\frac{3\left(\frac{1}{2}\right)4^n}{\frac{1}{2}4^n+1}}$

4-ج-حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{\frac{3}{2}4^n}{\frac{1}{2}4^n+1}} = \sqrt{3}$$

لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3\left(\frac{1}{2}\right)4^n}{1+\frac{1}{2}4^n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3\left(\frac{1}{2}\right)4^n}{\frac{1}{2}4^n} = 3$

(يكفي ان نضع $4^n = X$)

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{3}$

الاستنتاج: (u_n) متقاربة نحو $\sqrt{3}$

110. متتالية مقترحة رقم:36

الإسم على اليوتيوب: مواضيع مقترحة في الرياضيات في المتتاليات باك 2018 (ع ت+ر+ت ر) رقم 1

I- f دالة عددية معرفة على: $[2;+\infty[$

$$f(x) = 2+\sqrt{x-2}$$

1-عين اتجاه تغير الدالة f

2-ادرس إشارة $f(x)-x$ وفسر النتيجة بيانيا

3-انطلاقا من التمثيل البياني للدالة الجذر التربيعي ارسم (C_f).

II- لتكن المتتالية (u_n) و (v_n) معرفتين من أجل كل عدد طبيعي n بـــ:

$$\begin{cases} u_0 = \frac{5}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \text{ و } \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$$

1- مثل الحدود الثلاثة الأولى لكل متتالية على محور الفواصل

2- ضع تخمين حول اتجاه تغير المتتاليتين (u_n) و (v_n) وتقاربهما

3-برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n أن:

$$\frac{5}{2} \le u_n \le 3 \text{ و } 3 \le v_n \le 5$$

4- استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) و (v_n)

5- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن:

$$v_{n+1}-u_{n+1} \le \frac{2}{3}(v_n-u_n)$$

6- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن:

$$0 \le v_n-u_n \le \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

7- احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)$ ثم استنتج أن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان

8-عين $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

الحل

I-1-تعيين اتجاه تغير الدالة f

الدالة f تقبل الاشتقاق على المجال $]2;+\infty[$

ملاحظة (أخذنا المجال مفتوح في هذه الحالة لأن المجال متعلق بالمشتقة)

$$\left(\sqrt{f}\right)' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$$

بما أن الجذر موجب إذن: $f'(x) > 0$ على المجال $]2;+\infty[$ ومنه f متزايدة تماما على المجال $[2;+\infty[$

I-2-دراسة إشارة $f(x)-x$ وتفسير النتيجة هندسيا

-إشارة $f(x)-x$ على المجال $]2;+\infty[$

$$f(x)-x=2+\sqrt{x-2}-x$$
$$=\sqrt{x-2}-x+2$$
$$=\sqrt{x-2}-(x-2)$$

باستخدام المرافق نجد:

$$f(x)-x=\frac{[\sqrt{x-2}-(x-2)][\sqrt{x-2}+(x-2)]}{[\sqrt{x-2}+(x-2)]}$$

نعلم أن: $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

ومنه $f(x)-x=\frac{(x-2)-(x-2)^2}{[\sqrt{x-2}+(x-2)]}$

$\sqrt{x-2}+(x-2)>0$ على المجال $]2;+\infty[$

بما أن المقام موجب إذن: إشارة الفرق $f(x)-x$ من إشارة البسط

إذن: نحل المعادلة: $(x-2)-(x-2)^2=0$

$$(x-2)[1-(x-2)]=0$$
$$(x-2)(3-x)=0$$

ومنه

$$\begin{cases}x-2=0\\ \text{او}\\ 3-x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ \text{أو}\\ x=3\end{cases}$$

إذن حلول المعادلة هي: $S=\{2,3\}$

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$		$+$	
$3-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)-x$				$+$	0	$-$	

-نستنتج بيانيا: وضعية (C_f) بالنسبة الى المنصف الأول $y=x$ أي:

x	2		3		$+\infty$
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	
الوضعية		يقع (C_f) فوق المنصف الأول	(C_f) يقطع المنصف الأول	يقع (C_f) تحت المنصف الأول	

I-3-انطلاقا من التمثيل البياني للدالة جذر التربيعي ، رسم (C_f)

$$f(x)=2+\sqrt{x-2}$$

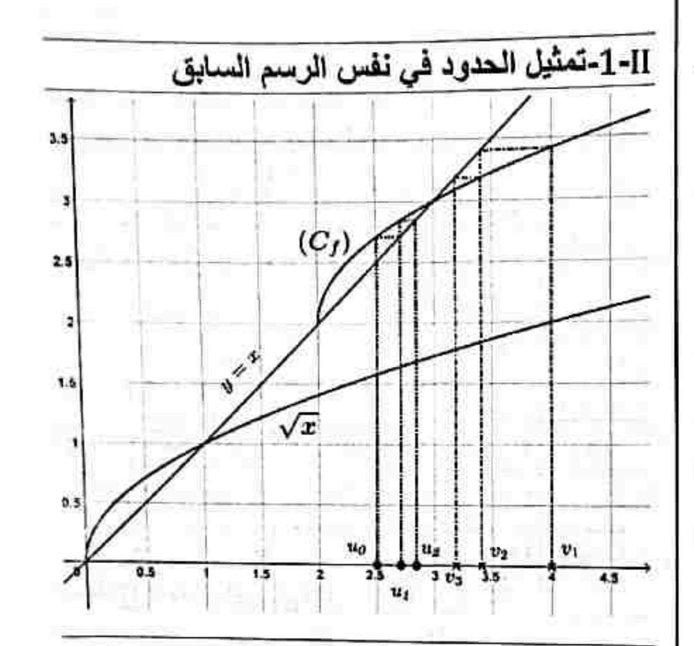
تقول القاعدة في حالة دالة مكتوبة من الشكل:

$$g(x)=f(x-a)+b$$

يتم رسم (C_f) انطلاقا من منحنى الدالة الجذرية بانسحاب شعاعه $\vec{v}\binom{a}{b}$

إذن: نقوم برسم منحنى (C_f) انطلاقا من منحنى الدالة جذر $x\to\sqrt{x}$ بانسحاب شعاعه $\vec{v}\binom{2}{2}$

II-1-تمثيل الحدود في نفس الرسم السابق



II-2-التخمين:

نلاحظ أن $u_0<u_1<u_2$

تبدو المتتالية (u_n) متزايدة ومتقاربة نحو فاصلة نقطة تقاطع (C_f) والمنصف الأول

نلاحظ أن $v_0>v_1>v_2$

تبدو المتتالية (v_n) متناقصة ومتقاربة نحو فاصلة نقطة تقاطع (C_f) والمنصف الأول

II-3-البرهان بالتراجع: $\frac{5}{2}\le u_n\le 3$

نسمي $p(n)$ الخاصية $\frac{5}{2}\le u_n\le 3$

من اجل $n=0$ لدينا $u_0=\frac{5}{2}$

و: $\frac{5}{2}\le u_0=\frac{5}{2}\le 3$ أي $p(0)$ محققة

ونفرض أن $p(n)$ محققة أي: $\frac{5}{2}\le u_n\le 3$

ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي:

$$\frac{5}{2}\le u_{n+1}\le 3$$

لدينا في الافتراض أن: $\frac{5}{2}\le u_n\le 3$

والدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $\left[\frac{5}{2};3\right]$

إذن

$$f\left(\frac{5}{2}\right)\le f(u_n)\le f(3)$$

$$\frac{5}{2}\le 2+\frac{\sqrt{2}}{2}\le u_{n+1}\le 3$$

ومنه $p(n+1)$ محققة

إذن: $\frac{5}{2}\le u_n\le 3$

البرهان بالتراجع أن: $3 \le v_n \le 5$

نسمي $p(n)$: $3 \le v_n \le 5$

من أجل $n = 0$ لدينا: $v_0 = 4$

و $3 \le 4 \le 5$ ومنه $p(0)$ محققة

نفرض أن: $p(n)$ محققة أي $3 \le v_n \le 5$

ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي: $3 \le v_{n+1} \le 5$

لدينا من الفرض $3 \le v_n \le 5$

والدالة f متزايدة تماما على $[3;5]$

$f(3) \le f(v_n) \le f(5)$

$3 \le v_{n+1} \le 2+\sqrt{3} \le 5$

ومنه $p(n+1)$ محققة $3 \le v_n \le 5$

II-4-استنتج اتجاه تغير المتتاليتان (u_n) و (v_n)

x	2	$\frac{5}{2}$	3	$+\infty$
$f(x)-x$		$+$	0	$-$

استنتج اتجاه تغير (u_n)

ندرس إشارة الفرق: $u_{n+1} - u_n$

$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$

ولدينا من الجزء الأول: $f(x) - x$ على $\left[\frac{5}{2};3\right]$

أي $u_{n+1} - u_n \ge 0$

ومنه: (u_n) متتالية متزايدة

استنتاج اتجاه تغير المتتالية (v_n)

$3 \le v_n \le 5$

ندرس إشارة الفرق: $v_{n+1} - v_n$

$v_{n+1} - v_n = f(v_n) - v_n$

ولدينا $f(x) - x \le 0$ على المجال $[3;5]$

أي: $v_{n+1} - v_n \le 0$ ومنه: (v_n) متتالية متناقصة

II-5-تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن:

$$v_{n+1} - u_{n+1} \le \frac{2}{3}(v_n - u_n)$$

$$v_{n+1} - u_{n+1} = 2 + \sqrt{v_n - 2} - (2 + \sqrt{u_n - 2})$$
$$= \sqrt{v_n - 2} - \sqrt{u_n - 2}$$
$$= \frac{\left(\sqrt{v_n-2} - (\sqrt{u_n-2})\right)\left(\sqrt{v_n-2} + (\sqrt{u_n-2})\right)}{\sqrt{v_n-2} + (\sqrt{u_n-2})}$$
$$= \frac{v_n - u_n}{\sqrt{v_n-2} + (\sqrt{u_n-2})}$$

لدينا: $3 \le v_n \le 5$ إذن: $1 \le \sqrt{v_n - 2} \le \sqrt{3}$

و: $\frac{5}{2} \le u_n \le 3$ إذن: $\frac{1}{2} \le \sqrt{u_n - 2} \le 1$

بالجمع نجد:

$$\frac{2+\sqrt{2}}{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \le \sqrt{v_n - 2} + (\sqrt{u_n - 2}) \le 1 + \sqrt{3}$$

ومنه:

$$\frac{1}{1+\sqrt{3}} \le \frac{1}{\sqrt{v_n - 2} + (\sqrt{u_n} - 2)} \le \frac{2}{2+\sqrt{3}} \le \frac{2}{3}$$

لدينا من المعطيات: $3 \le v_n \le 5$

$\frac{5}{2} \le u_n \le 3$

ومنه $v_n \ge u_n$

$v_n - u_n \ge 0$

لدينا $0 \le \frac{1}{\sqrt{v_n-2} + (\sqrt{u_n-2})} \le \frac{2}{3}$

و $v_n - u_n \ge 0$

بالضرب:

ومنه $0 \le \frac{v_n - u_n}{\sqrt{v_n-2} + \sqrt{u_n-2}} \le \frac{2}{3}(v_n - u_n)$

ومنه: $0 \le v_{n+1} - u_{n+1} \le \frac{2}{3}(v_n - u_n)$

إذن: $v_{n+1} - u_{n+1} \le \frac{2}{3}(v_n - u_n)$

II-6-إستنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن:

$$0 \le v_n - u_n \le \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

ط 1: نستعمل البرهان بالتراجع:

نسمي الخاصية $p(n)$ $0 \le v_n - u_n \le \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

من أجل $n = 0$ لدينا $v_0 - u_0 = \frac{3}{2}$

و $0 \le \frac{3}{2} \le \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$

أي $0 \le v_0 - u_0 \le \frac{3}{2}$ ومنه $p(0)$ محققة

نفرض أن: $p(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n

أي $0 \le v_n - u_n \le \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ ونبرهن صحة: $p(n+1)$

أي $0 \le v_{n+1} - u_{n+1} \le \left(\frac{2}{3}\right)^{n}$

نضرب أطراف المتباينة في $\left(\frac{2}{3}\right)$ فنجد:

$$0 \le \frac{2}{3}(v_n - u_n) \le \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

أي: $0 \le \frac{2}{3}(v_n - u_n) \le \left(\frac{2}{3}\right)^{n}$

ولدينا: $0 \le v_{n+1} - u_{n+1} \le \frac{2}{3}(v_n - u_n)$

إذن: $0 \le v_{n+1} - u_{n+1} \le \left(\frac{2}{3}\right)^{n}$

ومنه $p(n+1)$ محققة

إذن $0 \le v_n - u_n \le \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ من أجل كل عدد طبيعي n

ط2- للبرهان أن: $0 \le v_n - u_n \le \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

لدينا: $0 \le v_{n+1} - u_{n+1} \le \frac{2}{3}(v_n - u_n)$

من أجل قيم n نجد:

$$0 \leq v_{0+1} - u_{0+1} \leq \frac{2}{3}(v_0 - u_0)$$

$$0 \leq v_1 - u_1 \leq \frac{2}{3}(v_0 - u_0)$$

$$0 \leq v_2 - u_2 \leq \frac{2}{3}(v_1 - u_1)$$

.

.

$$0 \leq v_n - u_n \leq \frac{2}{3}(v_{n-1} - u_{n-1})$$

بضرب أطراف المتراجحة طرفا الى طرف ثم الاختزال نجد:

نجد $0 \leq v_n - u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n (v_0 - u_0)$

$$0 \leq v_n - u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(4 - \frac{5}{2}\right)$$

$$0 \leq v_n - u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

II-7-حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n)$ ثم استنتاج أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان:

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n)$

لدينا $0 \leq v_n - u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

و $-1 < \frac{2}{3} < 1$

ومنه: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 0$

إذن (حسب نظرية الحصر): $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$

استنتاج أن: (u_n) و (v_n) متجاورتان

بما أن: (u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة

و $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$

إذن: المتتاليتان (v_n) و (u_n) متجاورتان

ومنه فهما متقاربتان

II-8- تعيين: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

بما أن (u_n) و (v_n) متجاورتان إذن: تتقاربان نحو نفس النهاية l يعني: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$

نحل المعادلة: $2 + \sqrt{l-2} = l$

$l \geq 2$: $\sqrt{l-2} = l - 2$

$$\sqrt{l-2} = \left(\sqrt{l-2}\right)^2$$

ومنه $1 = \sqrt{l-2}$

أي $l - 2 = 1$

إذن $l = 3$

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 3$

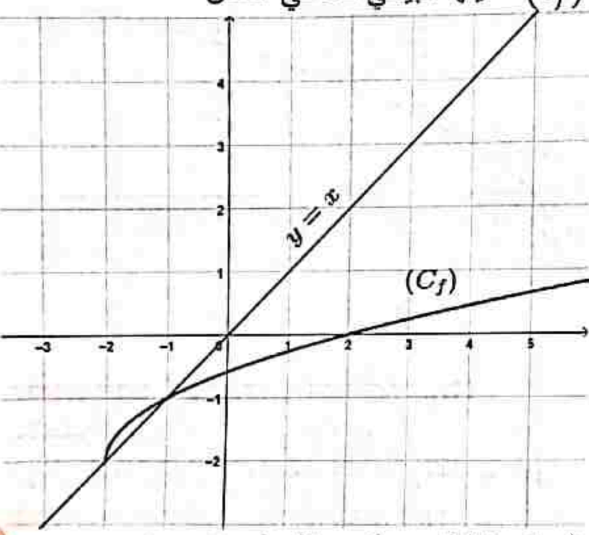
111. متتالية مقترحة رقم:37

الإسم على اليوتيوب: مواضيع مقترحة في الرياضيات في المتتاليات لبكالوريا 2019(عت+ر+تر) رقم 8

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-2; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = -2 + \sqrt{x+2}$$

(C_f) تمثيلها البياني كما في الشكل



(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = f(u_n)$

1-أنقل الشكل على ورقة الإجابة ومثل الحدود u_3, u_2, u_1, u_0 على حامل محور الفواصل دون حسابها مبينا خطوط الرسم ثم ضع تخمينا حول اتجاه تقارب المتتالية (u_n)

2-برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$-1 < u_n \leq 2$$

3-أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)، ثم أستنتج انها متقاربة

4-عين عددا حقيقا k من المجال $]0;1[$ بحيث

$$0 < u_{n+1} + 1 < k(u_n + 1)$$

5-استنتج أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$:

$$0 < u_n + 1 < 3 \times k^n$$

وعين $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

6-لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة بـ: $n \in \mathbb{N}$

$$v_n = 3\ln(u_n + 2)$$

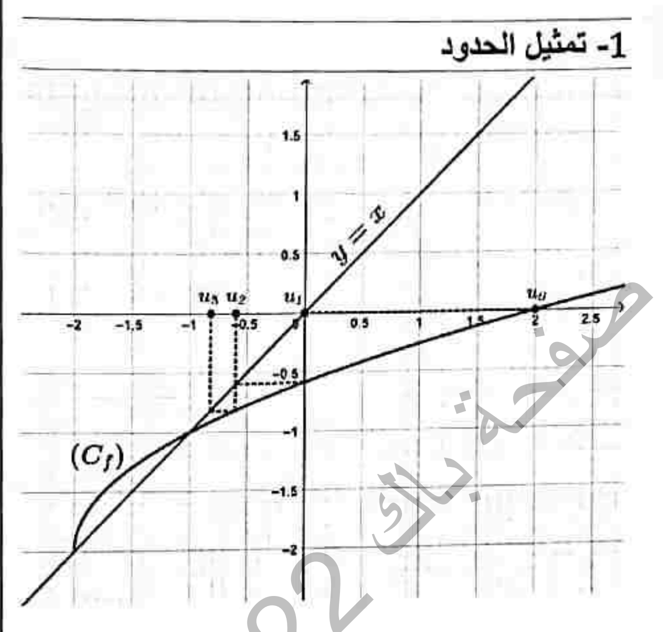
برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

عين v_n بدلالة n ثم احسب بدلالة n الجداء p_n

$$p_n = \frac{1}{u_0 + 2} \times \frac{1}{(u_1 + 2)} \times \ldots \times \frac{1}{u_n + 2}$$

الحل

1- تمثيل الحدود



تخمين اتجاه تغير وتقارب المتتالية (u_n)

نلاحظ أن $u_3 < u_2 < u_1 < u_0$

أي أن المتتالية (v_n) متناقصة تماما وتتقارب نحو فاصلة نقطة تقاطع (C_f) والمستقيم (D)

2-البرهان بالتراجع من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ أن $-1 < u_n \leq 2$

نسمي $p(n)$ الخاصية $-1 < u_n \leq 2$

من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = 2$ أي $1 < 2 \leq 2$

ومنه $p(0)$ محققة

نفرض أن $p(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n

أي $-1 < u_n \leq 2$ ونبرهن أن $p(n+1)$ صحيحة

أي $-1 < u_{n+1} \leq 2$

لدينا من الفرض $-1 < u_n \leq 2$

$$1 < u_n + 2 \leq 4$$

$$1 < \sqrt{u_n + 2} \leq 2$$

$$-1 < -2 + \sqrt{u_n + 1} \leq 0 \leq 2$$

ومنه $p(n+1)$ محققة

إذن $-1 < u_n < 2$ من أجل كل عدد طبيعي n

3-دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n)

ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = -2 + \sqrt{u_n + 2} - u_n$$

$$= \sqrt{u_n + 2} - u_n - 2$$

$$= \sqrt{u_n + 2} - (u_n + 2)$$

$$= \frac{[\sqrt{u_n + 2} - (u_n + 2)][\sqrt{u_n + 2} + (u_n + 2)]}{[\sqrt{u_n + 2} + (u_n + 2)]}$$

$$= \frac{u_n + 2 - (u_n + 2)^2}{\sqrt{u_n + 2} + (u_n + 2)}$$

$$= \frac{u_n + 2 - u_n^2 - 4 - 4u_n}{\sqrt{u_n + 2} + (u_n + 2)}$$

$$= \frac{-u_n^2 - 3u_n - 2}{\sqrt{u_n + 2} + (u_n + 2)}$$

تحليل $-u_n^2 - 3u_n - 2$

$$\Delta = 9 - 4(-1)(-2) = 1$$

$u_{n_2} = \frac{3+1}{2(-1)} = -2$ أو $u_{n_1} = \frac{3-1}{2(-1)} = -1$

ومنه $-u_n^2 - 3u_n - 2 = -(u_n + 1)(u_n + 2)$

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n + 1)(u_n + 2)}{\sqrt{u_n + 2} + (u_n + 2)}$$

لدينا من البرهان بالتراجع أن $-1 < u_n \leq 2$

أي $2 - 1 < u_n + 2$

$$0 < 1 < u_n + 2$$

وكذلك $-1 < u_n$

$$u_n + 1 > 0$$

ومنه $u_{n+1} - u_n < 0$

أي المتتالية (u_n) متناقصة تماما

استنتاج أنها متقاربة

بما أن (u_n) متتالية متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد -1 لأن: $-1 < u_n \leq 2$

ومنه هي متقاربة نحو نهايتها l

4-تعيين k حيث $0 < u_{n+1} + 1 < k(u_n + 1)$

لدينا من البرهان بالتراجع أن $-1 < u_{n+1} \leq 2$

ومنه $0 < u_{n+1} + 1$

ولدينا $u_{n+1} + 1 = -2 + \sqrt{u_n + 1} + 1$

$$= \frac{(\sqrt{u_n + 2} - 1)(\sqrt{u_n + 2} + 1)}{\sqrt{u_n + 2} + 1}$$

$$= \frac{u_n + 2 - 1}{\sqrt{u_n + 2} + 1}$$

$$= \frac{(u_n + 1)}{\sqrt{u_n + 2} + 1}$$

ولدينا $-1 < u_n \leq 2$

$$\sqrt{2 - 1} < \sqrt{u_n + 2} \leq \sqrt{2 + 2}$$

$$2 < \sqrt{u_n + 2} + 1 \leq 3$$

$$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{\sqrt{u_n + 2} + 1} < \frac{1}{2} \ldots\ldots (1)$$

ولدينا $(2) \ldots\ldots u_n + 1 > 0$

بضرب (1) في (2) نجد

$$0<\frac{1}{3}(u_n+1)\le\frac{(u_n+1)}{\sqrt{u_n+2}+1}<\frac{1}{2}(u_n+1)$$

$$0<u_{n+1}+1<\frac{1}{2}(u_n+1)$$

ومنه $k=\frac{1}{2}$ حيث $0<\frac{1}{2}<1$

5-استنتاج أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$:

$$0<u_n+1<3k^n$$

لدينا مما سبق: $0<u_{n+1}+1<\frac{1}{2}(u_n+1)$

حيث $k=\frac{1}{2}$

$n=0$ $\quad 0<u_1+1<\frac{1}{2}(u_0+1)$

$n=1$ $\quad 0<u_2+1<\frac{1}{2}(u_1+1)$

.

.

$n=n-1$ $\quad 0<u_n+1<\frac{1}{2}(u_{n-1}+1)$

بالضرب طرفا لطرف نجد

$$0<u_n+1<\left(\frac{1}{2}\right)^n(u_0+1)$$

$$0<u_n+1<\left(\frac{1}{2}\right)^n(2+1)$$

$$0<u_n+1<\left(\frac{1}{2}\right)^n\times 3$$

أي حيث $k=\frac{1}{2}$

تعيين $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ لأن $-1<\frac{1}{2}<1$

ومنه حسب مبرهنة الحصر نجد

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n+1)=0$$

أي

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=-1$$

6-البرهان أن (v_n) متتالية هندسية

تكون (v_n) متتالية هندسية إذا وفقط إذا كان:

$$v_{n+1}=v_nq$$

$$v_n=3\ln(u_n+2)$$

$$v_{n+1}=3\ln(u_{n+1}+2)\ ...(1)$$

$$u_{n+1}=-2+\sqrt{u_n+2}\ ...(2)$$

بتعويض (2) في (1) نجد:

$$v_{n+1}=3\ln(-2+\sqrt{u_n+2}+2)$$

$$=3\ln(\sqrt{u_n+2})$$

$$=\frac{1}{2}\times 3\ln(u_n+2)$$

$$=\frac{1}{2}v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول

$$v_0=3\ln(u_0+2)$$

$$v_0=3\ln(2+2)$$

$$=3\ln 4$$

$$=3\ln 2^2$$

$$=6\ln 2$$

تعيين عبارة v_n بدلالة n

$$v_n=v_0q^n$$

$$v_n=(6\ln 2)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

حساب p_n بدلالة n

$$p_n=\frac{1}{u_0+2}\times\frac{1}{u_1+2}\times\ldots\times\frac{1}{u_n+2}$$

$$v_n=3\ln(u_n+2)$$

$$\ln(u_n+2)=\frac{1}{3}v_n$$

$$u_n+2=e^{\frac{1}{3}v_n}$$

$$\frac{1}{u_n+2}=\frac{1}{e^{\frac{1}{3}v_n}}=e^{-\frac{1}{3}v_n}$$

$$\frac{1}{u_n+2}=e^{-\frac{1}{3}v_n}$$

ومنه من أجل قيمة n

$n=0$ $\quad \frac{1}{u_0+2}=e^{-\frac{v_0}{3}}$

$n=1$ $\quad \frac{1}{u_1+2}=e^{-\frac{v_1}{3}}$

.

.

$n=n$ $\quad \frac{1}{u_n+2}=e^{-\frac{v_n}{3}}$

بالضرب طرفا لطرف نجد:

$$p_n=e^{-\frac{v_0}{3}}\times e^{-\frac{v_1}{3}}\times\ldots\times e^{-\frac{v_n}{3}}$$

$$=e^{-\frac{v_0}{3}-\frac{v_1}{3}-\frac{v_2}{3}\cdots-\frac{v_n}{3}}$$

$$=e^{-\frac{1}{3}(v_0+v_1+\cdots+v_n)}$$

لدينا بأخذ T_n حيث $T_n=v_0+v_1+\cdots+v_n$

ينتج T_n هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية (v_n) ومنه

$$T_n=v_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$T_n=6\ln 2\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right)$$

$$=6\ln 2\ \frac{\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}{\frac{1}{2}}$$

$$= 12\ln 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

ومنه:

$$p_n = e^{-\frac{1}{3}\left(12\ln 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)\right)}$$

$$p_n = e^{-4\ln 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}$$

.112 متتالية مقترحة رقم: 38

الإسم على اليوتيوب: مواضيع مقترحة في الرياضيات في المتتاليات لبكالوريا 2019(عت+ر+تر) رقم 3

I-g الدالة العددية المعرفة على $]-\infty;2[$ بـ:

$$g(x)=\ln\left(\frac{1}{2-x}\right)$$

ادرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]-\infty;2[$

II-(u_n) و (v_n) المتتاليتان العدديتان المعرفتان على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0=-2 \\ u_{n+1}=g(u_n) \end{cases} \text{ و } \begin{cases} v_0=0 \\ v_{n+1}=g(v_n) \end{cases}$$

1-برهن أنه من اجل كل عدد طبيعي n:

$$-2\le u_n\le u_{n+1}\le v_{n+1}\le v_n\le 0$$

2-استنتج اتجاه تغير كل من (u_n) و (v_n)، ثم بين أنهما متقاربتان

3-أ-بين أنه من اجل كل عدد طبيعي n:

$$v_{n+1}-u_{n+1}\le\frac{v_n-u_n}{2-v_n}\le\frac{1}{2}(v_n-u_n)$$

ارشاد: من اجل كل x من $]0;+\infty[$: $\ln(x)\le x-1$

3-ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$0\le v_n-u_n\le\frac{1}{2^n}(v_0-u_0)$$

4-بيّن أنّ (u_n) و (v_n) متجاورتان

5-نعتبر الدالة h المعرفة والمتناقصة تماما على $]-\infty;0[$ كما يلي: $h(x)=e^{-x}+x-2$

5-أ-بيّن أنّ المعادلة $h(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث: $-1,15<\alpha<-1,14$

5-ب-استنتج نهاية لكل من (u_n) و (v_n)

الحل

I- دراسة اتجاه تغير الدالة g على المجال $]-\infty;2[$

- g المعرفة والقابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty;2[$

ومنه

$$g'(x)=\frac{\left(\frac{1}{2-x}\right)'}{\frac{1}{2-x}}=\frac{\frac{1}{(2-x)^2}}{\frac{1}{2-x}}$$

ومنه

$$g'(x)=\frac{1}{(2-x)^2}\times\frac{2-x}{1}$$

أي

$$g'(x)=\frac{1}{2-x}>0$$

بما أن $g'(x)>0$ على المجال $]-\infty;2[$

فإن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-\infty;2[$

II-1- البرهان أن $n\in\mathbb{N}$:

$$-2\le u_n\le u_{n+1}\le v_{n+1}\le v_n\le 0$$

-البرهان بالتراجع

نسمي الخاصية $p(n)$

$-2\le u_n\le u_{n+1}\le v_{n+1}\le v_n\le 0$ من أجل $n\in\mathbb{N}$

لدينا من أجل $n=0$

$$-2\le u_0\le u_1\le v_1\le v_0\le 0$$

لأن: $v_0=0$ و $v_1=\ln\left(\frac{1}{2-v_0}\right)=\ln\frac{1}{2}$

$u_0=-2$ و $u_1=\ln\left(\frac{1}{2+2}\right)=\ln\frac{1}{4}$

و

$$-2\le -2\le\ln\frac{1}{4}\le\ln\frac{1}{2}\le 0$$

أي $p(0)$ محققة

-نفرض أن $p(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n

أي $-2\le u_n\le u_{n+1}\le v_{n+1}\le v_n\le 0$

ونبرهن صحة $p(n+1)$ من أجل $n+1$ أي

$$-2\le u_{n+1}\le u_{n+2}\le v_{n+2}\le v_{n+1}\le 0$$

لدينا من الفرضية:

$$-2\le u_n\le u_{n+1}\le v_{n+1}\le v_n\le 0$$

و g دالة مستمرة ومتزايدة تماما على $]-\infty;2[$ إذن

$$g(-2)\le g(u_n)\le g(u_{n+1})\le g(v_{n+1})\le g(v_n)\le g(0)$$

ومنه

$$g(-2)\le u_{n+1}\le u_{n+2}\le v_{n+2}\le v_{n+1}\le g(0)$$

وبالتالي

$$-2\le -2\ln 2\le u_{n+1}\le u_{n+2}\le v_{n+2}\le v_{n+1}\le -\ln 2\le 0$$

ومنه $p(n+1)$ محققة

إذن الخاصية $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

2- استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n) و (v_n)

لدينا مما سبق: $u_n \le u_{n+1}$

ومنه (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

ولدينا $v_{n+1} \le v_n$

أي $v_{n+1} - v_n \le 0$

ومنه المتتالية (v_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

- البرهان أن (u_n) و (v_n) متقاربتان

بما أن (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 0 فهي متقاربة

وبما أن (v_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد 2- فهي متقاربة

3- تبيان أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$

$$v_{n+1} - u_{n+1} \le \frac{v_n - u_n}{2 - v_n} \le \frac{1}{2}(v_n - u_n)$$

لدينا

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \ln\left(\frac{1}{2 - v_n}\right) - \ln\left(\frac{1}{2 - u_n}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\frac{1}{2 - v_n}}{\frac{1}{2 - u_n}}\right) = \ln\left(\frac{1}{2 - v_n} \times \frac{2 - u_n}{1}\right)$$

ومنه

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \ln\left(\frac{2 - u_n}{2 - v_n}\right)$$

ولدينا $\ln(x) \le x - 1$ (من الارشاد)

بوضع $x = \frac{2-u_n}{2-v_n}$

نجد

$$\ln\left(\frac{2 - u_n}{2 - v_n}\right) \le \frac{2 - u_n}{2 - v_n} - 1$$

ومنه

$$\ln\left(\frac{2 - u_n}{2 - v_n}\right) \le \frac{2 - u_n - 2 + v_n}{2 - v_n}$$

وبالتالي

$$\ln\left(\frac{2 - u_n}{2 - v_n}\right) \le \frac{v_n - u_n}{2 - v_n} \dots\dots (1)$$

نثبت الآن أن $\frac{v_n-u_n}{2-v_n} \le \frac{1}{2}(v_n - u_n)$

لدينا:

$$-2 \le u_n \le u_{n+1} \le v_{n+1} \le v_n \le 0$$

ومنه

$$-2 \le v_n \le 0$$

أي

$$0 \le -v_n \le 2$$
$$2 \le -v_n + 2 \le 4$$

ومنه

$$\frac{1}{4} \le \frac{1}{2 - v_n} \le \frac{1}{2} \dots\dots (1)$$

ولدينا

$$u_n \le v_n$$

أي

$$v_n - u_n \ge 0$$

من(1) لدينا $\frac{1}{2-v_n} \le \frac{1}{2}$ وبالضرب في $v_n - u_n$ نجد

$$\frac{v_n - u_n}{2 - v_n} \le \frac{1}{2}(v_n - u_n) \dots\dots (2)$$

ومنه من (1) و (2) نجد

$$\ln\left(\frac{2 - u_n}{2 - v_n}\right) \le \frac{v_n - u_n}{2 - v_n} \le \frac{1}{2}(v_n - u_n)$$

أي

$$v_{n+1} - u_{n+1} \le \frac{v_n - u_n}{2 - v_n} \le \frac{1}{2}(v_n - u_n)$$

ب-استنتاج أن $0 \le v_n - u_n \le \frac{1}{2}(v_0 - u_0)$

ط1: لدينا $v_n - u_n \ge 0$

$$v_{n+1} - u_{n+1} \le \frac{v_n - u_n}{2 - v_n}$$
$$\le \frac{1}{2}(v_n - u_n)$$

من أجل قيمة n

$$\begin{cases} n = 0 & v_1 - u_1 \le \frac{1}{2}(v_0 - u_0) \\ n = 1 & v_2 - u_2 \le \frac{1}{2}(v_1 - u_1) \\ n = 2 & v_3 - u_3 \le \frac{1}{2}(v_2 - u_2) \\ \vdots & \\ n - 1 & v_n - u_n \le \frac{1}{2}(v_{n-1} - u_{n-1}) \end{cases}$$

بالضرب طرفا لطرف نجد

$$(v_1 - u_1)(v_2 - u_2) \dots (v_n - u_n)$$
$$\le \left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0)(v_1 - u_1) \dots (v_{n-1} - u_{n-1})$$

ومنه

$$0 \le v_n - u_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0)$$

ط2 باستعمال البرهان بالتراجع

نسمي $p(n)$ الخاصية

$$0 \le v_n - u_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0)$$

من أجل $n = 0$ لدينا

$$0 \le v_0 - u_0 \le 1(v_0 - u_0)$$

حيث $u_0 = -2$ و $v_0 = 0$

و $0 \leq 2 \leq 2$

ومنه $p(0)$ محققة

نفرض أن $p(n)$ محققة من اجل كل عدد طبيعي n

ونبرهن صحة $p(n+1)$ لدينا من الفرضية

$$0 \leq v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0) \ldots\ldots\ldots (1)$$

بضرب العبارة (1) في العدد $\left(\frac{1}{2}\right)$ نجد

$$0 \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n) \leq \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0) \ldots. (2)$$

ولدينا من نتائج السؤال (3-أ-)

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n) \ldots\ldots (3)$$

من (2)و(3)نجد أن

$$0 \leq v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (v_0 - u_0)$$

ومنه نجد

$$0 \leq v_{n+1} - u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (v_0 - u_0)$$

ومنه $p(n+1)$ محققة

ومنه $p(n)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n

4-اثبات أن (u_n) و (v_n) متجاورتان

لدينا $0 \leq v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0)$

و $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right) = 0$ لأن $-1 < \frac{1}{2} < 1$

أي $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right)(v_0 - u_0) = 0$

ومنه حسب مبرهنة الحصر فإن:

$$\lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$$

ولدينا كذلك (u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة ومنه (v_n) و (u_n) متجاورتان

5-أ- تبيان أن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

بما أن الدالة h مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty; 0[$ فهي كذلك على المجال

$$]-1.15; -1.14[$$

و $h(-1.15) = 0.1$

و $h(-1.14) = -0.01$

و $0 \in]-1.15; -1.14[$ فانه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا α في المجال $]-1.15; -1.14[$

5-ب- استنتاج نهاية (u_n) و (v_n)

بما أن (u_n) و (v_n) متجاورتان و متقاربتان فإن لهما نفس النهاية l أي:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} v_{n+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l$$

ولدينا

$$v_{n+1} = g(v_n)$$
$$u_{n+1} = g(u_n)$$

أي أن l هي حل للمعادلة $g(l) = l$

$$\ln\left(\frac{1}{2-l}\right) = l$$

$$\frac{1}{2-l} = e^l$$

أي $2 - l = \frac{1}{e^l}$

ومنه $e^{-l} + l - 2 = 0$

أي $h(l) = 0$

ومنه $h(\alpha) = 0$ لأن $l = \alpha$

ومنه

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \alpha$$

113. متتالية مقترحة رقم:39

الإسم على اليوتيوب: مواضيع مقترحة في الرياضيات في المتتاليات لبكالوريا 2017(ع ت+ ر+ ت ر)رقم17

f و g دالتان معرفتان على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = \ln(1+x) - x$$

و $$g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$$

- الجزء I:

1-أدرس تغيرات كل من الدالتين f و g على $[0; +\infty[$.

2-استنتج أنه من أجل كل $x \geq 0$:

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$$

- الجزء II:

نريد دراسة المتتالية (u_n) للأعداد الحقيقية المعرفة كمايلي:

$$u_1 = \frac{3}{2} \text{ و } u_{n+1} = u_n\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

1-برهن بالتراجع أن $u_n > 0$ من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$

2-برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$

$$\ln u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$

3-نضع: $S_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}$

و $T_n = \frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots+\frac{1}{4^n}$

باستعمال الجزء I.بين أن:

$$S_n - \frac{1}{2}T_n \le \ln u_n \le S_n$$

4-أحسب S_n و T_n بدلالة n استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.

5-أبين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

5-ب-استنتج أن (u_n) متقاربة. لتكن ℓ نهايتها.

5-ج-نقبل النتيجة التالية: إذا كانت متتاليتان (v_n) و (w_n) متقاربتان حيث: $v_n \le w_n$ من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \le \lim\limits_{n\to+\infty} w_n$

بين أن: $\frac{5}{6} \le \ln \ell \le 1$ واستنتج حصرا لـ ℓ.

الحل

الجزء I

1-دراسة تغيرات كل من الدالتين f و g على المجال $[0;+\infty[$

-دراسة تغيرات الدالة f على $[0;+\infty[$

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ حيث:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x}$$

بما أن $x \in [0;+\infty[$ أي $0 < x$

إذن $-\frac{x}{1+x} < 0$ ومنه: $f'(x) < 0$ إذن: f دالة متناقصة تماما على المجال $[0;+\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln(1+x)}{x} - 1\right) = -\infty$$

$f(0) = 0$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	0 ↘ $-\infty$

دراسة تغيرات الدالة g على المجال $[0;+\infty[$

$$g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $[0;+\infty[$:

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1-1-x+x+x^2}{1+x} = \frac{x^2}{1+x}$$

بما أن: $x > 0$ إذن: $\frac{x^2}{1+x} > 0$

ومنه $g'(x) > 0$

إذن الدالة g متزايدة على المجال $[0;+\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln(1+x) + \frac{x(x-2)}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	0 ↗ $+\infty$

2-استنتاج أنه من أجل كل $x \ge 0$:

$$x - \frac{x^2}{2} \le \ln(1+x) \le x$$

لدينا $f(x) = \ln(1+x) - x$

من الجدول نجد: $f(x) \le 0$ أي:

$\ln(1+x) - x \le 0$

ومنه $\ln(1+x) \le x$

لدينا من الجدول:

$g(x) \ge 0$ أي $\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \ge 0$

ومنه $x - \frac{x^2}{2} \le \ln(1+x)$

إذن: $x - \frac{x^2}{2} \le \ln(1+x) \le x$

الجزء II-

1-برهان بالتراجع أن $u_n > 0$ من أجل كل عدد طبيعي $n \ge 1$

نسمي $p(n)$: $u_n > 0$

من أجل $n = 1$ لدينا: $u_1 = \frac{3}{2} > 0$ إذن $p(1)$ محققة

نفرض أن الخاصية $p(n)$ محققة من أجل $n \in \mathbb{N}^*$ أن $u_n > 0$

ونبرهن أن الخاصية $p(n+1)$ محققة من أجل $(n+1) \in \mathbb{N}$ أي $u_{n+1} > 0$

لدينا $u_n > 0$ (من الفرضية) و: $2^{n+1} > 0$

ومنه $u_n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right) > 0$

اذن $u_{n+1} > 0$

ومنه: $p(n+1)$ محققة

إذن $u_n > 0$ من أجل كل عدد طبيعي $n \ge 1$

2.البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \ge 1$

$$\ln u_n = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right) + \cdots + \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$$

نسمي $p(n)$ $\ln u_n = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right) + \ldots + \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$

من أجل $n = 1$ لدينا: $u_1 = \frac{3}{2} > 0$

$$\ln u_1 = \ln\frac{3}{2} = \ln\frac{2+1}{2} = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right)$$

$$\ln(u_1) = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right)$$

ومنه $p(1)$ محققة

نفرض أن $p(n)$ محقق من أجل $n \geq 1$ أي أن:

$$\ln u_n = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+..+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$$

ونبرهن صحة الخاصية $p(n+1)$ محققة

$$\ln(u_{n+1}) = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\cdots$$

$$+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^{(n+1)}}\right)$$

لدينا $u_{n+1} = u_n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$

بما أن $u_{n+1} > 0$

إذن $\ln(u_{n+1}) = \ln\left(u_n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right)$

ومنه: $\ln(u_{n+1}) = \ln u_n + \ln\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$

$$= \ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

ومنه $p(n+1)$ محققة

إذن $\ln(u_n) = \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$ من أجل $n \geq 1$

باستعمال الجزء I، نبين أن:

$$S_n - \frac{1}{2}T_n \leq \ln u_n \leq S_n$$

لدينا: من الجواب السابق للجزء الأول أن:

$$\ln(1+x) \leq x$$

حيث $x \in \left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\frac{2}{2^3},\dots,\frac{1}{2^n}\right\}$

$$\ln\left(1+\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{2}$$

$$\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right) \leq \frac{1}{2^2}$$

.

.

$$\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right) \leq \frac{1}{2^n}$$

بالجمع العمودي طرفا لطرف نجد:

$$\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right) \leq \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2}$$

$$\ln u_n \leq S_n \ldots\ldots\ldots(1)$$

لدينا $x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x)$

$$x \in \left\{\frac{1}{2};\frac{1}{2^2};\dots\dots\frac{1}{2^n}\right\}$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \leq \ln\left(1+\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^2}\right)^2 \leq \ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)$$

.

.

$$\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^n}\right)^2 \leq \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$$

بالجمع العمودي طرفا لطرف نجد:

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^n}\right)$$

$$\leq \ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$$

$$S_n - \frac{1}{2}T_n \leq \ln u_n \ldots\ldots\ldots(2)$$

من (1) و (2) نجد أن:

$$S_n - \frac{1}{2}T_n \leq \ln u_n \leq S_n$$

4-حساب S_n و T_n بدلالة n:

لدينا: $S_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots.+\frac{1}{2^n}$

S_n هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$

ومنه
$$S_n = \frac{1}{2}\,\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1+1}-1}{\frac{1}{2}-1}$$

$$= 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

لدينا $T_n = \frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^n}$

T_n هو مجموع لحدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{4}$

ومنه:
$$T_n = \frac{1}{4}\,\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1+1}-1}{\frac{1}{4}-1}$$

$$T_n = \frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$$

استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

بما أن: $-1 < \frac{1}{2} < 1$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

إذن: $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$

استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$

$$\lim_{n\to} T_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$$

بما أن: $-1 < \frac{1}{4} < 1$ إذن: $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$

إذن: $\lim_{n\to+\infty} T_n = \frac{1}{3}$

5-أ-تبيان أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما:

للبرهان أن (u_n) متتالية متزايدة يكفي أن نبرهن أن: $u_{n+1} - u_n > 0$

لدينا: $u_{n+1} - u_n = u_n\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) - u_n$

$= u_n\left[1 + \frac{1}{2^{n+1}} - 1\right]$

$= u_n\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)$

لدينا: $u_n > 0$ و $\frac{1}{2^{n+1}} > 0$ إذن: $\frac{u_n}{2^{n+1}} > 0$

ومنه $u_{n+1} - u_n > 0$

أي أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما

5-ب-استنتاج أن (u_n) متقاربة:

لدينا $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{2^{n+1}} > 0$

ومنه المتتالية S_n متزايدة ومنه

$\ln(u_n) \le S_n \le \lim_{n\to+\infty} S_n$

$\ln(u_n) \le 1$

$u_n \le e$

بما أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 1 فهي متقاربة نحو نهايتها l

5-ج- تبيان أن: $\frac{5}{6} \le \ln \ell \le 1$

نقبل النتيجة التالية:

إذا كانت المتتاليتان (v_n) و (w_n) متقاربتان حيث من أجل كل عدد طبيعي n $v_n \le w_n$ فإن: $\lim_{n\to+\infty} v_n \le \lim_{n\to+\infty} w_n$ (u_n) تتقارب نحو l

بما أن (u_n) متقاربة نحو l فإن: $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$

$$S_n - \frac{1}{2}T_n \le \ln u_n \le S_n$$

ومنه

$$\lim_{n\to+\infty}\left(S_n - \frac{1}{2}T_n\right) \le \lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) \le \lim_{n\to+\infty} S_n$$

إذن $\frac{5}{6} \le \ln l \le 1$

استنتاج حصر لـ l:

لدينا $\frac{5}{6} \le \ln l \le 1$

ومنه $e^{\frac{5}{6}} \le l \le e$ لأن الدالة e^x متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

114. متتالية مقترحة رقم:40

الإسم على اليوتيوب: مواضيع مقترحة في الرياضيات في المتتاليات لبكالوريا 2017(ع ت. ر + ت ر)رقم29

f دالة عددية معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

1-أدرس تغيرات الدالة f على $I =]0; +\infty[$

2-α عدد حقيقي موجب تماما , باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب: $\int_1^\alpha \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) dx$ ثم $\int_1^\alpha f(t)\, dt$

3-k عدد طبيعي غير معدوم.

3-أ-بيّن أنّ $\frac{1}{k+1} \le \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx \le \frac{1}{k}$

3-ب - بيّن أنّ $\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx = \frac{1}{k} - f(k)$

ثم استنتج أن $0 \le f(k) \le \frac{1}{k(k+1)}$

4-أ-تحقق من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1,0\}$ يكون:

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \ldots.(*)$$

4-ب-نضع من أجل كل $n \ge 1$:

$$S_n = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{2n(2n+1)}$$

باستعمال المساواة $(*)$ أعط عبارة مختصرة لـS_n ثم بيّن أنّ المتتالية (S_n) متقاربة نحو عدد يطلب تعيينه.

4-جـ-برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \ge 1$ يكون:

$$0 \le f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n) \le S_n$$

ثم استنتج أن:

$$\lim_{n\to+\infty} [f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n)].$$

5-نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$

5-أ-تحقق باستعمال السؤال (3) فرع "ب" أن:

$$f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n) = u_n - \ln(2) - \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$$

5-ب-إستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة و أحسب نهايتها.

الحل ✍

1-دراسة تغيرات الدالة f على I

لدينا $f(x) = \frac{1}{x} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

حساب النهايات

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \left[\frac{1}{x} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right]$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0}\left[\frac{1}{x} + \ln x - \ln(x+1)\right]$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{x}[1 + x\ln x - x\ln(x+1)]$$

تذكير: $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} x^n \ln x = 0$

ومنه $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

حساب $f'(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{\frac{1(x+1)-1(x)}{(x+1)^2}}{\frac{x}{x+1}}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{x}{x+1}} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x(x+1)}$$

$$f'(x) = \frac{-1(x+1)+x}{x^2(x+1)} = -\frac{1}{x^2(x+1)}$$

بما أن $x \in]0;+\infty[$ فإن $f'(x) = -\frac{1}{x^2(x+1)} \leq 0$

و منه الدالة f متناقصة تماما على $]0;+\infty[$

جدول تغيرات f

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty$ ↘ 0

2-حساب التكامل $\int_1^\alpha \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)dx$ باستعمال التكامل بالتجزئة

لدينا

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

$u(x)$	$\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$	$u'(x)$	$\frac{1}{x(x+1)}$
$v(x)$	x	$v'(x)$	1

$$\int_1^\alpha 1\times\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)dx = \left[x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right]_1^\alpha - \int_1^\alpha x\frac{1}{x(x+1)}dx$$

$$= \alpha\ln\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right) - \ln\frac{1}{2} - \int_1^\alpha \frac{1}{x+1}dx$$

$$= \alpha\ln\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right) - \ln\frac{1}{2} - [\ln(x+1)]_1^\alpha$$

$$= \alpha\ln\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right) - \ln\frac{1}{2} - \ln(\alpha+1) + \ln 2$$

$$= \alpha\ln\alpha - \alpha\ln(\alpha+1) + \ln 2 - \ln(\alpha+1) + \ln 2$$

$$= \alpha\ln\alpha - (\alpha+1)\ln(\alpha+1) + 2\ln 2$$

حساب التكامل $\int_1^\alpha f(x)dx$

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$\int_1^\alpha f(x) = \int_1^\alpha \left(\frac{1}{x} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right)dx$$

$$\int_1^\alpha f(x) = \int_1^\alpha \frac{1}{x}dx + \int_1^\alpha \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)dx$$

$$\int_1^\alpha \frac{1}{x}dx = [\ln x]_1^\alpha = \ln\alpha - \ln 1 = \ln\alpha$$

$$\int_1^\alpha f(x) = \ln\alpha + \alpha\ln\alpha - (\alpha+1)\ln(\alpha+1) + 2\ln 2$$

$$= (1+\alpha)\ln\alpha - (\alpha+1)\ln(\alpha+1) + 2\ln 2$$

$$= (1+\alpha)[\ln\alpha - \ln(\alpha+1)] + 2\ln 2$$

$$= (1+\alpha)\ln\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right) + 2\ln 2$$

3-أ-بيان العلاقة: $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx \leq \frac{1}{x}$

لدينا

$$k \leq x \leq k+1$$

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$$

$$\int_k^{k+1}\frac{1}{k+1}dx \leq \int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx \leq \int_k^{k+1}\frac{1}{k}dx$$

$$\frac{1}{k+1}\int_k^{k+1}1dx \leq \int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx \leq \frac{1}{k}\int_k^{k+1}1\,dx$$

$$\frac{1}{k+1}[x]_k^{k+1} \leq \int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx \leq \frac{1}{k}[x]_k^{k+1}$$

$$\frac{1}{k+1}(k+1-k) \leq \int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx \leq \frac{1}{k}(k+1-k)$$

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx \leq \frac{1}{k}$$

3-ب-البرهان أن $\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx = \frac{1}{k} - f(k)$

لدينا

$$\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx = [\ln x]_k^{k+1} = \ln(k+1) - \ln k \;.....(1)$$

لدينا

$$\frac{1}{k} - f(k) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k} - \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$$

$$= -\ln\left(\frac{k}{k+1}\right) = -\ln k + \ln(k+1)$$

$$= \ln(k+1) - \ln k \;....(2)$$

من (1) و (2) نجد أن

$$\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx = \frac{1}{k} - f(k)$$

استنتاج أن: $0 \le f(k) \le \frac{1}{k(k+1)}$

لدينا:

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{k} - f(k)$$

و

$$\frac{1}{k+1} \le \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \le \frac{1}{k}$$

ومنه

$$\frac{-1}{k+1} \ge -\frac{1}{k} + f(k) \ge -\frac{1}{k}$$

$$-\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k} \ge -\frac{1}{k} + \frac{1}{k} + f(k) \ge 0$$

$$-\frac{k}{k(k+1)} + \frac{k+1}{k(k+1)} \ge f(k) \ge 0$$

$$\frac{1}{k(k+1)} \ge f(k) \ge 0$$

ومنه

$$0 \le f(k) \le \frac{1}{k(k+1)}$$

4-أ-تحقق من العلاقة $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$

لدينا: $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-x}{x(x+1)}$

ومنه: $= \frac{1}{x(x+1)}$

4-ب-إعطاء عبارة مختصرة لـ S_n باستعمال المساواات

لدينا $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ .... (*)

معناه

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

$$\frac{1}{(n+2)(n+3)} = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}$$

.

.

$$\frac{1}{2n(2n+1)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}$$

بالجمع العمودي طرفا لطرف نجد

$$S_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n+1}$$

$$S_n = \frac{2n+1-n}{n(2n+1)} = \frac{n+1}{n(2n+1)}$$

البرهان أن (S_n) متقاربة نحو عدد

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n(2n+1)} = 0$$

ومنه المتتالية S_n متقاربة نحو العدد 0

4-جـ-البرهان أن

$$0 \le f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n) \le S_n$$

لدينا مما سبق $0 \le f(k) \le \frac{1}{k(k+1)}$

بوضع $k = n$

نجد $0 \le f(n) \le \frac{1}{n(n+1)}$

$$0 \le f(n+1) \le \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$0 \le f(n+2) \le \frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

.

.

$$0 \le f(2n) \le \frac{1}{2n(2n+1)}$$

بالجمع طرفا لطرف نجد أن

و هو المطلوب

$$0 \le f(n) + f(n+1) + f(n+2) + \cdots + f(2n) \le S_n$$

استنتاج النهاية

$$\lim_{n\to+\infty} [f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n)]$$

لدينا

$$0 \le f(n) + f(n+1) + f(n+2) + \cdots + f(2) \le S_n$$

ومما سبق نجد $\lim_{n\to+\infty} S_n = 0$

حسب البرهان بالحصر فان

$$\lim_{n\to+\infty} [f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n)] = 0$$

5-أ-التحقق أن:

$$f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n) = u_n - \ln 2 - \ln(1 + \frac{1}{2n})$$

لدينا: $\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{k} - f(k)$

ومنه $\int_n^{n+1} \frac{1}{n} dn = \frac{1}{n} - f(n)$

$$\int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{n} dn = \frac{1}{n+1} - f(n+1)$$

$$\int_{n+1}^{n+3} \frac{1}{n} dn = \frac{1}{n+2} - f(n+2)$$

.

.

$$\int_{2n}^{2n+1} \frac{1}{n} dn = \frac{1}{2n} - f(2n)$$

بالجمع طرفا لطرف نجد

$$\int_n^{2n+1} \frac{1}{n} dn = u_n - [f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n)] \;.....(1)$$

$$\int_n^{2n+1} \frac{1}{n} dn = [\ln(n)]_n^{2n+1} = \ln(2n+1) - \ln n$$

$$= \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{2n}{n} + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \ln(2 + \frac{1}{n})$$

$$= \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \;.....(2)$$

من (1) و (2) نجد

$$f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n) = u_n - \ln 2 - \ln(1 + \frac{1}{2n})$$

5-ب-استنتاج أن (u_n) متقاربة نحو نهاية l

لدينا

$$f(n)+f(n+1)+\dots+f(2n)=u_n-\ln 2-\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty}[f(n)+f(n+1)+\dots+f(2n)]=0$$

و $$\lim_{n\to+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right]=0$$

ومنه

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\left[f(n)+f(n+1)+\dots+f(2n)+\ln(2)+\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right]$$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=0+\ln 2+0$$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\ln 2$$

ومنه (u_n) متتالية متقاربة نحوى نهايتها $l=\ln 2$

115. متتالية مقترحة رقم:41

الإسم على اليوتيوب: مواضيع مقترحة في الرياضيات في المتتاليات لبكالوريا 2019(عت+ر+تر) رقم 16

1-نعتبر (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$u_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-x}\sin(x)\,dx$$

1-أ-بين بالتراجع أن: من أجل كل عدد طبيعي n:

$$\cos(n\pi)=(-1)^n$$

1-ب-باستخدام المكاملة بالتجزئة مرتين بين أنه: من اجل كل عدد طبيعي n:

$$u_n=(-1)^n\frac{e^{-\pi}+1}{2}e^{-n\pi}$$

1-جـ-أثبت أن: (u_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول

2-نعتبر S_n المجموع المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$$S_n=1+\frac{u_1}{u_0}+\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2+\dots+\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}\right)^n$$

2-أ-عبر عن S_n بدلالة n، ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty}S_n$

3-عبر بدلالة n عن الجداء p_n المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$$p_n=u_0\times u_1\times\dots\times u_n$$

الحل

1-أ-تبيان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n:
$$\cos(n\pi)=(-1)^n$$

نسمي $p(n)$ الخاصية $\cos(n\pi)=(-1)^n$

من أجل $n=0$ لدينا

$$cox\,(0\pi)=\cos 0=1=(-1)^0$$

فإن: $\cos(0\pi)=(-1)^0$

ومنه $p(0)$ محققة من أجل $n=0$

نفرض أن $p(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n

أي أن $\cos(n\pi)=(-1)^n$ ونبرهن صحة $p(n+1)$

أي $\cos((n+1)\pi)=(-1)^{n+1}$

لدينا $\cos((n+1)\pi)=\cos(n\pi+\pi)$

$$=\cos(n\pi).\cos\pi-\sin(n\pi)\sin\pi$$
$$=-\cos(n\pi)$$

تذكير:

$$\cos(a+b)=\cos a\times\cos b-\sin a\sin b$$

$$\cos((n+1)\pi)=-\cos(n\pi)$$
$$=(-1)(-1)^n=(-1)^{n+1}$$

لدينا من الفرض $\cos(n\pi)=(-1)^n$

ومنه: $p(n+1)$ محققة

إذن $\cos(n\pi)=(-1)^n$ من أجل كل عدد طبيعي n

1-ب-باستخدام المكاملة بالتجزئة مرتين تبيان أن:

$$u_n=(-1)^n\frac{e^{-\pi}+1}{2}e^{-n\pi}$$

من أجل كل عدد طبيعي n

تذكير بقانون التكامل بالتجزئة:

نعلم أن $(uv)'=u'v+v'u$

ومنه $\int u'v=uv-\int v'u$

لدينا $u_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-x}\sin(x)dx$

نأخذ

$f(x)=\sin x$	$f'(x)=\cos x$
$g(x)=-e^{-x}$	$g'(x)=e^{-x}$

ومنه:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx=[f(x).g(x)]_a^b-\int_a^b g(x)f'(x)dx$$

ومنه

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-x}\sin x\,dx=$$

$$=[-e^{-x}\sin x]_{n\pi}^{(n+1)\pi}-\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}-e^{-x}\cos x\,dx$$

$$=-e^{-(n+1)\pi}\sin((n+1)\pi)+e^{-n\pi}\sin(n\pi)$$

$$-\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}-e^{-x}\cos x\,dx$$

لدينا $\sin(n\pi) = 0$ ومنه

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\sin x\ dx = -\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} -e^{-x}\cos x\,dx$$
$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\sin x\ dx = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\cos x\,dx$$

نضع

$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$g(x) = -e^{-x}$	$g'(x) = e^{-x}$

ومنه

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\sin x\ dx = [-e^{-x}\cos x]_{n\pi}^{(n+1)\pi} - \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\sin x\ dx$$

ومنه

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\sin x\ dx + \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\sin x\ dx = -e^{-(n+1)}\cos((n+1)\pi) + e^{-n\pi}\cos(n\pi)$$

$$2\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\sin x\ dx = -e^{-(n\pi)\pi}e^{-\pi}(-\cos n\pi) + e^{-n\pi}\cos n\pi = e^{-n\pi}\cos(n\pi)[e^{-\pi}+1]$$

ومنه

$$= (-1)^n[e^{-\pi}+1]e^{-n\pi}$$

لأن $\cos n\pi = (-1)^n$

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\sin x\ dx = (-1)^n\frac{[e^{-\pi}+1]}{2}e^{-n\pi}$$

اذن

$$u_n = (-1)^n\frac{e^{-\pi}+1}{2}e^{-n\pi}$$

1-جـ اثبات أن: (u_n) متتالية هندسية

تكون (u_n) متتالية هندسية إذا كان $u_{n+1} = q\,u_n$

لدينا

$$u_{n+1} = (-1)^{n+1}\frac{e^{-\pi}+1}{2}e^{-(n+1)\pi}$$
$$= -e^{-\pi}\left[(-1)^n\frac{e^{-\pi}+1}{2}e^{-n\pi}\right]$$
$$= -e^{-\pi}u_n$$

ومنه (u_n) متتالية هندسية أساسها: $q = -e^{-\pi}$

حساب u_0

$$u_0 = (-1)^0\frac{e^{-\pi}+1}{2}e^{-0\pi} = \frac{e^{-\pi}+1}{2}$$

2-أ- التعبير عن S_n بدلالة n

بما أن (u_n) متتالية هندسية فإن: $u_{n+1} = u_n q$

ومنه $u_n = u_{n-1}\,q$

ومنه $\frac{u_n}{u_{n-1}} = q = -e^{-\pi}$

ومنه $S = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n$

S_n مجموع لحدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها $q = -e^{-\pi}$ وحدها الأول 1 ومنه

$$S_n = 1\,\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$
$$S_n = \frac{1-(-e^{-\pi})^{n+1}}{1-(-e^{-\pi})}$$
$$S_n = \frac{1-(-1)^{n+1}e^{-(n+1)\pi}}{1+e^{-\pi}}$$
$$S_n = \frac{1+(-1)^n e^{-(n+1)\pi}}{1+e^{-\pi}}$$

حساب: $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

بما أن:

$-1 < e^{-\pi} < 1$ فان $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-(n+1)\pi} = 0$

ومنه:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{1+e^{-\pi}}$$

3-التعبير عن الجداء p_n بدلالة n المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $p_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$

لدينا (u_n) متتالية هندسية ومنه:

$$u_n = u_0 q^n$$
$$u_0 = u_0 q^0$$
$$u_1 = u_0 q^1$$
$$u_2 = u_0 q^2$$
$$\vdots$$
$$u_n = u_0 q^n$$

بالضرب طرفا لطرف نجد:

$$u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n = (u_0)(u_0 q)(u_0 q^2)\dots(u_0 q^n)$$

ومنه

$$p_n = \overbrace{(u_0 \times u_0 \times \dots \times u_0)}^{(n+1)\ \text{مرة}} \times (q \times q^2 \times \dots \times q^n)$$
$$p_n = u_0^{n+1} \times q^{1+2+\dots+n}$$

إذن

$$p_n = \left(\frac{e^{-\pi}+1}{2}\right)^{n+1}(-e^{-\pi})^{\frac{n}{2}[1+n]}$$

116. متتالية مقترحة رقم:42

الإسم على اليوتيوب: مواضيع مقترحة في الرياضيات في المتتاليات باك 2018 (ع ت+ر+ت ر) رقم 17

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$u_n = \int_n^{n+1} e^{2-x}d_x$$

1-احسب u_0 ثم أثبت مستعملا مبدأ الاستدلال بالتراجع ، أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n > 0$

2-احسب u_n بدلالة n

3-برهن أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

4-أ-احسب بدلالة n الفرق $u_{n+1}-u_n$ ، ثم أستنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

4-ب-استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

5-نضع ، من أجل كل عدد طبيعي n:

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

احسب بدلالة n المجموع S_n ، ثم احسب $\lim_{n\to+\infty} S_n$

الحل

1-حساب u_0 :

$$u_n = \int_n^{n+1} e^{2-x}\,dx$$
$$= \int_0^1 e^{2-x}\,dx$$
$$u_0 = e^2\int_0^1 e^{-x}dx = e^2[-e^{-x}]_0^1$$
$$u_0 = e^2[-e^{-1}+1]$$

ومنه $u_0 = -e + e^2$

- بيان أن $u_n > 0$ باستعمال الاستدلال بالتراجع:

نسمي $p(n)$ الخاصية: $u_n > 0$

- من أجل $n = 0$:

$$u_0 = e + e^2 = e(-1+e) > 0$$

أي $p(0)$ محققة.

-نفرض أن $p(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n ونبرهن صحة $p(n+1)$

لدينا: $u_{n+1} = \int_{n+1}^{n+1+1} e^{2-x}\,dx$

$$u_{n+1} = e^2\int_{n+1}^{n+2} -e^{-x}\,dx = e^2[-e^{-x}]_{n+1}^{n+2}$$
$$= e^2\left[-e^{-(n+2)} + e^{-(n+1)}\right]$$
$$= e^2\left[-e^{-n-1}\times e^{-1} + e^{-n-1}\right]$$
$$= e^2e^{-n-1}(-e^{-1}+1)$$
$$= e^{-n+1}\left(-\frac{1}{e}+1\right)$$

لدينا: $e^{-n+1} > 0$ وبما أن $e > 1$

فإن $-\frac{1}{e}+1 > 0$

ومنه: $e^{-n+1}\left(-\frac{1}{e}+1\right) > 0$

ومنه $u_{n+1} > 0$

ومنه الخاصية $p(n+1)$

إذن $u_n > 0$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

2- حساب u_n بدلالة n :

$$u_n = \int_n^{n+1} e^{2-x}\,dx$$
$$= e^2\int_n^{n+1} e^{-x}\,dx$$
$$u_n = e^2[-e^{-x}]_n^{n+1}$$
$$= e^2[-e^{-(n+1)} + e^{-n}]$$
$$u_n = e^2[-e^{-n-1} + e^{-n}]$$
$$= e^2[-e^{-n}\,e^{-1} + e^{-n}]$$
$$u_n = e^{-n+2}[-e^{-1}+1]$$

3- البرهان أن (u_n) متتالية هندسية مع تعيين أساسها وحدها الأول:

- تكون (u_n) متتالية هندسية إذا كان

$$u_{n+1} = u_n \times q$$

حيث: $u_n = e^{2-n}(-e^{-1}+1)$

لدينا:

$$u_{n+1} = e^{2-(n+1)}(-e^{-1}+1)$$
$$= e^{2-n-1}(-e^{-1}+1)$$
$$u_{n+1} = e^{-1}e^{2-n}(-e^{-1}+1)$$

ومنه: $u_{n+1} = e^{-1}u_n$

معناه (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = e^{-1}$

وحدها الأول:

$$u_0 = e^2 - e$$
$$u_0 = e^{2-0}(-e^{-1}+1) = e^2(-e^{-1}+1)$$
$$= -e + e^2$$

4-أ -حساب بدلالة n الفرق $u_{n+1}-u_n$:

بما أن u_n متتالية هندسية

فإن $u_{n+1} = q\,u_n$ و $q = e^{-1}$

ومنه

$$u_{n+1} - u_n = q\,u_n - u_n$$
$$= e^{-1}u_n - u_n$$
$$= u_n(e^{-1}-1)$$

ولدينا من السؤال السابق:

$$u_n = e^{-n+2}[-e^{-1}+1]$$

ومنه:

$$u_{n+1} - u_n = e^{-n+2}(-e^{-1}+1)(e^{-1}-1)$$

استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

لدينا: $u_{n+1} - u_n = u_n\,e^{-1} - u_n$

$$= u_n(e^{-1}-1)$$

ولدينا من السؤال السابق ، البرهان بالتراجع أن: $u_n > 0$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $(e^{-1}-1)$

$$e^{-1}-1 = \frac{1}{e} - 1 = \frac{1-e}{e} < 0$$

ومنه

$$u_{n+1} - u_n < 0$$

معناه (u_n) متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

4-ب-استنتاج أن المتتالية متقاربة:

بما أن (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ ومحدودة من الأسفل بالعدد 0 فهي متقاربة نحو نهاية l .

حساب النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

بما أن (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = e^{-1} = \frac{1}{e}$

و $-1 < \frac{1}{e} < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

5-حساب بدلالة n المجموع S_n :

بما أن S_n يمثل مجموع لحدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها $q = e^{-1}$ وحدها الأول $u_0 = e^2 - e$

ومنه: $S_n = (e^2 - e)\dfrac{(e^{-1})^{n+1} - 1}{e^{-1} - 1}$

$$S_n = (e^2 - e)\frac{e^{-n-1} - 1}{e^{-1} - 1}$$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} (e^2 - e)\frac{e^{-n-1} - 1}{e^{-1} - 1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n-1} = \lim_{n\to+\infty} e^{-n}e^{-1}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{e^n}\, e^{-1} = 0$$

ومنه: $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{-(e^2-e)}{e^{-1}-1}$

117. متتالية مقترحة رقم: 43

الإسم على اليوتيوب: المتتاليات و الدوال الاصلية رقم 35

n عدد طبيعي ، نضع $u_n = \int_n^{n+1} 2^x dx$

1-بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = \dfrac{2^n}{\ln 2}$

2-بيّن أنّ (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

3-نضع: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

و $T_n = u_0^2 + u_1 + \cdots + u_n^2$

أ-أحسب S_n و T_n بدلالة n

ب-عين قيمة العدد الطبيعي n بحيث: $S_n = \dfrac{31}{\ln 2}$

118. متتالية مقترحة رقم:44

الإسم على اليوتيوب: مواضيع مقترحة في الرياضيات في المتتاليات لبكالوريا 2017 (ع ت+ ر+ ت ر)رقم 21

لتكن المعادلة التفاضلية:.(1)...... $y' - 3y = 0$

1-حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية (1) ثم عين الحل الخاص f الذي يأخذ القيمة 1 من أجل $x = -\frac{2}{3}$

2-نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدها العام: $u_n = e^{3n+2}$

2-أ-بيّن أنّ (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول ، هل هي متقاربة ؟

2-ب-ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

3-نعرف المتتالية (v_n) بما يلي: $v_n = \ln(u_n)$

3-أ-بيّن أنّ (v_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n

3-ب-أثبت أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

3-جـ-احسب: $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$

$T_n = u_0 \times u_1 \times u_2 \times \ldots\ldots \times u_{n-1}$

الحل ✍

1-حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية

لدينا $y' - 3y = 0$

أي $y' = 3y$

ملاحظة: حلول المعادلة التفاضلية ذات الشكل $y' = ay$ مع $a \neq 0$ هي الدوال التي تكتب على الشكل $f(x) = Ce^{ax}$

ومنه حلول المعادلة: $y' = 3y$ هي الدوال التي تكتب من الشكل: $f(x) = ce^{3x}$

تعيين حل خاص للمعادلة:

لدينا $f\left(-\frac{2}{3}\right) = 1$

ومنه $f\left(-\frac{2}{3}\right) = ce^{3\left(-\frac{2}{3}\right)} = ce^{-2}$

أي $\frac{c}{e^2} = 1$

ومنه $c = e^2$ ومنه $f(x) = e^2e^{3x}$

ومنه $f(x) = e^{3x+2}$

2-أ-تبيان أن (u_n) متتالية هندسية مع تعيين أساسها q وحدها الأول u_0

لدينا $u_{n+1} = e^{3(n+1)+2} = e^{3n+2}e^3$

ومنه $= u_n e^3$

ومنه (u_n) متتالية هندسية أساسها e^3 وحدها الأول

$u_0 = e^{3(0)+2}$

$= e^2$

دراسة تقارب (u_n)

بما أن (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = e^3$ و $e^3 > 1$ فإن (u_n) متتالية ليست متقاربة بل متباعدة

ملاحظة: نقول عن متتالية هندسية أساسها q أنها متقاربة إذا كان $-1 < q < 1$

2-ب-دراسة اتجاه تغير (u_n)

لدينا $u_{n+1} - u_n = e^{3(n+1)+2} - e^{3n+2}$

$= e^{3n+2}e^3 - e^{3n+2}$

ومنه $= e^{3n+2}(e^3 - 1)$

نعلم ان: $e^{3n+2} > 0$ و $e^3 - 1 > 0$ اذن :

$u_{n+1} - u_n > 0$ ومنه (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

3-أ-تبيان أن (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$

لدينا $v_n = \ln(u_n) \dots (1)$

يكون للعبارة (1) معنى إذا كان $u_n > 0$

ولدينا $e^{3n+2} > 0$ مهما $n \in \mathbb{N}$

ومنه (v_n) معرفة مهما كان $n \in \mathbb{N}$

3-ب-إثبات أن (v_n) متتالية حسابية مع تعيين أساسها r وحدها الأول v_0

$v_{n+1} - v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln u_n$

$v_{n+1} - v_n = \ln(e^3 e^{3n+2}) - \ln e^{3n+2}$

$v_{n+1} - v_n = \ln e^3 + \ln e^{3n+2} - \ln e^{3n+2}$

$= \ln e^3$

ومنه $v_{n+1} - v_n = 3$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = 3$ وحدها الأول $v_0 = \ln(u_0)$

$v_0 = \ln(e^{3(0)+2}) = \ln e^2 = 2$

$v_n = 2 + 3n$

3-جـ-حساب S_n

(v_n) هندسية مجموعها:

$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$

$S_n = \frac{n}{2}[v_0 + v_{n-1}]$

$v_{n-1} = 2 + 3(n-1) = 3n - 1$

ومنه $S_n = \frac{n}{2}[2 + 3n - 1]$

أي $S_n = \frac{n}{2}(3n + 1)$

-حساب الجداء T_n

$T_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_{n-1}$

لدينا $v_n = \ln u_n$

ومنه $u_n = e^{v_n}$

لدينا:من أجل $n = 0$ $u_0 = e^{v_0}$

من أجل $n = 1$ $u_1 = e^{v_1}$

من أجل $n = 2$ $u_2 = e^{v_2}$

.

.

من أجل $n = n - 1$ $u_{n-1} = e^{v_{n-1}}$

بالضرب العمودي طرفا لطرف والاختزال نجد

$u_0 \times u_1 \times \dots \times u_{n-1} = e^{v_0} \times e^{v_1} \times e^{v_2} \times \dots \times e^{v_{n-1}}$

ومنه

$T_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_{n-1} = e^{v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n}$

ومنه $T_n = e^{S_n}$

أي $T_n = e^{\frac{n}{2}[3n+1]}$

119. متتالية مقترحة رقم:45

الإسم على اليوتيوب: مواضيع مقترحة في الرياضيات في المتتاليات باك 2018 (ع ت+ر+ت ر) رقم 16

لتكن في $\mathbb{C}$ مجموع الاعداد المركبة المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = (1 + \sqrt{3}i)u_n + 3 \end{cases}$$

ومن أجل كل عدد طبيعي n نعرف متتالية أخرى (v_n) كالتالي: $v_n = u_n - \sqrt{3}i$

1-برهن أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0

2-عبر عن الحد العام v_n بدلالة n

3-إستنتج طويلات وعمدات العدد v_n

4-أحسب بدلالة n المجموع:

$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

5-أحسب بدلالة n المجموع:

$S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

الحل

1- البرهان أن (v_n) متتالية هندسية:

تكون (v_n) متتالية هندسية إذا كان $v_{n+1} = v_n q$

لدينا $u_{n+1} = (1 + i\sqrt{3})u_n + 3$

$v_{n+1} = u_{n+1} - i\sqrt{3}$

ومنه: $v_{n+1} = (1 + i\sqrt{3})u_n + 3 - i\sqrt{3}$

$= (1 + i\sqrt{3})\left[u_n + \frac{3 - i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}}\right]$

$= (1 + i\sqrt{3})\left[u_n + \frac{(3 - i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3})}{(1 + i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3})}\right]$

$= (1 + i\sqrt{3})\left[u_n + \frac{3 - 3i\sqrt{3} - i\sqrt{3} - 3}{4}\right]$

$= (1 + i\sqrt{3})(u_n - i\sqrt{3})$

$$= (1+i\sqrt{3})v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = (1+i\sqrt{3})$

وحدها الأول: $v_0 = u_0 - i\sqrt{3}$

إذن $v_0 = 1 - i\sqrt{3}$

2-تعيين عبارة الحد العام لـ v_n بدلالة n

v_n متتالية هندسية معناه: $v_n = v_p q^{n-p}$

$$v_n = v_0 q^n$$

ومنه: $v_n = (1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})^n$

3-استنتاج طويلات العدد v_n .

$$|v_n| = |1-i\sqrt{3}|\left|(1+i\sqrt{3})^n\right|$$
$$= |1-i\sqrt{3}|\left|(1+i\sqrt{3})\right|^n$$
$$|1-i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2$$
$$|1-i\sqrt{3}|^n = (\sqrt{3}+1) = 2^n$$

ومنه: $|v_n| = 2\times 2^n = 2^{n+1}$

-حساب العمدة:

$$\arg(v_n) = \arg\left[(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})^n\right]$$
$$\arg(v_n) = \arg(1-i\sqrt{3}) + n\arg(1+i\sqrt{3})$$

بأخذ $Z_A = 1 - i\sqrt{3}$

$$|Z_A| = 2$$

$$\begin{cases}\cos\theta_{ZA} = \frac{1}{2}\\ \sin\theta_{ZA} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$ ومنه $\theta_A = \frac{-\pi}{3}$

$$Z_B = 1 + i\sqrt{3}$$
$$|Z_B| = |2|$$

$$\begin{cases}\cos\theta_{ZB} = \frac{1}{2}\\ \sin\theta_{ZB} = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$ ومنه $\theta_A = \frac{\pi}{3}$

ومنه:

$$\arg(v_n) = -\frac{\pi}{3} + n\frac{\pi}{3}$$

4-حساب S_n بدلالة n :

$$S_n = v_0\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$
$$S_n = (1-i\sqrt{3})\frac{(1+i\sqrt{3})^{n+1}-1}{1+i\sqrt{3}-1}$$
$$S_n = (1-i\sqrt{3})\frac{(1+i\sqrt{3})^{n+1}-1}{i\sqrt{3}}$$

5-حساب S'_n بدلالة n:

لدينا: $v_n = u_n - i\sqrt{3}$

$$u_n = v_n + i\sqrt{3}$$

ومنه

$$S'_n = v_0 + i\sqrt{3} + v_1 + i\sqrt{3} + \cdots + v_n + i\sqrt{3}$$
$$S'_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n + i\sqrt{3} + i\sqrt{3}\ldots + i\sqrt{3}$$
$$S'_n = s_n + i\sqrt{3}(n+1)$$
$$S'_n = (1-i\sqrt{3})\frac{(1+i\sqrt{3})^{n+1}-1}{i\sqrt{3}} + i\sqrt{3}(n+1)$$

120. متتالية مقترحة رقم:46

الإسم على اليوتيوب: مواضيع مقترحة في الرياضيات في المتتاليات لبكالوريا 2017 (ع ت+ ر + ت ر)رقم 3

المستوي المركب منسوب الى معلم متعامد ومتجانس مباشرة $(o;\vec{u};\vec{v})$ نأخذ كوحدة للأطوال $5cm$

ليكن f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z' = \frac{1+i}{2}z$

1-برر أن f تشابه مباشر يطلب تعيين مركزه ، نسبته وزاويته

2-نضع $z_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n:

$$z_{n+1} = \frac{1+i}{2}z_n$$

نرمز بـ A_n للنقطة التي لاحقتها z_n

2-أ-أحسب z_1, z_2, z_3, z_4 تحقق من أن z_4 حقيقي

2-ب-من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $u_n = |z_n|$ بيّن أنّ المتتالية (u_n) هندسية ، ثم تحقق من أنه كل عدد طبيعي n لدينا $u_n = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

3-من أجل أي مرتبة n_0 يكون النقاط A_n تنتمي الى القرص الذي مركزه o ونصف قطره $0,1$

4-أ-أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}} = i$

-استنتج طبيعة المثلث oA_nA_{n+1}

4-ب-من أجل كل عدد طبيعي n نرمز بـ l_n لطول الخط المنكسر $A_0A_1A_2\ldots\ldots\ldots A_{n-1}A_n$

وكذلك $l_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n$

عبر عن l_n بدلالة n ما هي نهاية المتتالية (l_n)

الحل

1-تبيّن أنّ f تشابه مباشر مع تحديد عناصره

لدينا $z' = \frac{(1+i)}{2} z$

و $\left|\frac{(1+i)}{2}\right| = \frac{|1+i|}{|2|}$ ، $\frac{(1+i)}{2} \in \mathbb{C}$

$\frac{\sqrt{2}}{2} \neq 1$

ومنه f تشابه مباشر حيث $z' = \alpha z + b$

تحديد العناصر:

النسبة k:

$$k = \left|\frac{(1+i)}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

الزاوية θ:

لدينا: $\theta = \arg\alpha = \theta = \arg\left(\frac{(1+i)}{2}\right)$

ولدينا $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ ومنه $\arg\left(\frac{1+i}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

تعين المركز w

لدينا $z_w = \frac{b}{1-a} = \frac{0}{1-a} = 0$

$z_w = z_0$

ومنه مركز التشابه هو المبدأ o

2-أ-حساب z_1 ، z_2 ، z_3 ، z_4

لدينا $z_0 = 2$ و $z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$

تعيين z_1

ومنه بتعويض $n = 0$ نجد:

$$z_{0+1} = z_1 = \frac{1+i}{2} z_0$$

$$= \frac{1+i}{2} 2 \Longrightarrow z_1 = 1+i$$

تعيين z_2

وبتعويض $n = 1$ نجد

$$z_{1+1} = z_2 = \frac{1+i}{2} z_1 = \frac{1+i}{2}(1+i)$$

ومنه

$$z_2 = \frac{(1+i)^2}{2} = \frac{1+i^2+2i}{2} = i$$

(لأن: $i^2 = -1$)

تعيين z_3

لدينا بتعويض $n = 2$ نجد:

$$z_{2+1} = z_3 = \frac{1+i}{2} z_2 = \frac{1+i}{2} i = \frac{i-1}{2}$$

ومنه $z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i$

تعيين z_4

بتعويض $n = 3$ في العلاقة نجد:

$$z_{3+1} = z_4 = \frac{1+i}{2} z_3 = \frac{1+i}{2}\left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{2} i\right)$$

$$z_4 = \frac{(1+i)(-1+i)}{4} = \frac{-1-i+i-1}{4}$$

$$= -\frac{2}{4}$$

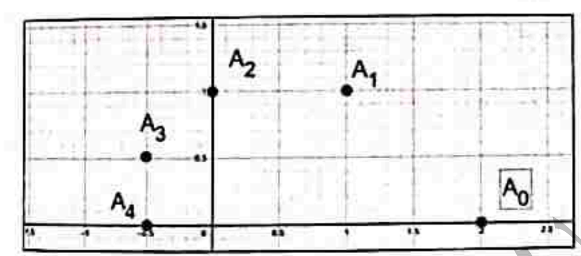
$$z_4 = -\frac{1}{2}$$

التحقق أن $z_4 \in \mathbb{R}$

بما أن $z_4 = -\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$

أي z_4 عدد حقيقي

تعيين النقط:



2-ب-من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = |z_n|$

تبيان أن (u_n) متتالية هندسية

لدينا

$$u_{n+1} = |z_{n+1}| = \left|\frac{1+i}{2} z_n\right|$$

$$= \left|\frac{1+i}{2}\right| |z_n| = \frac{\sqrt{2}}{2} |z_n|$$

ومنه

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} |z_n| = \frac{\sqrt{2}}{2} |u_n|$$

ومنه المتتالية (u_n) متتالية هندسية أساسها

$$q = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ونكتب $u_{n+1} = |z_n| \frac{1}{\sqrt{2}}$

حساب u_0

لدينا $u_n = |z_n|$

ومنه $u_0 = |z_0| = |2| = 2$

التحقق أن: $u_n = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

بما أن (u_n) م هندسية فإن:

$u_n = u_p q^{n-p}$

ومنه بتعويض $p = 0$ نجد: $u_n = u_0 q^{n-0}$

ومنه $u_n = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

3-إيجاد رتبة $n = 0$ حتى تنتمي النقط A_n الى القرص الذي مركزه O ونصف قطره $r = 0.1$

لدينا $u_n = |z_n| = |z_n - z_0|$

أي $u_n = oA_n$

و $u_n \leq 0{,}1$ ومنه $oA_n \leq 0{,}1$

$2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \leq 0{,}1$

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \leq 0{,}05$

ومنه باستعمال الدلة ln

$n\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \leq \ln 0.05$

ومنه تصبح المتراجحة

$n(\ln 1 - \ln\sqrt{2}) \leq \ln 0.05$

$n\ln 1 - n\ln\sqrt{2} \leq \ln 0.05$

أي $n\ln\sqrt{2} \geq -\ln 0.05$

منه $n \geq \frac{-\ln 0.05}{\ln\sqrt{2}}$

ومنه نجد $n \geq 8.64$

العدد الطبيعي n هو $n_0 = 9$

ومنه الرتبة هي العاشرة لأنّ من $(A_0.A_1.A2\ldots.A_9)$ توجد 10 نقاط

4-أ-اثبات أن $\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}} = i$

لدينا:

$$\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}} = \frac{\frac{1+i}{2}z_n - z_n}{\left(\frac{1+i}{2}\right)z_n} = \frac{z_n}{z_n}\,\frac{\frac{1+i}{2}-1}{\frac{1+i}{2}}$$

ومنه

$$\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}} = 1 - \frac{1}{\frac{1+i}{2}} = 1 - \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 1-(1-i) = i$$

استنتاج طبيعة المثلث oA_nA_{n+1}

لدينا $\left|\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}\right| = |i| = 1$

ولدينا $z_{n+1} = A_{n+1}$

$z_n = A_n$

ومنه $\frac{A_nA_{n+1}}{OA_{n+1}} = 1$

أي $A_nA_{n+1} = OA_{n+1}$

أي المثلث متساوي الساقين

بما أن $\arg\left(\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}-z_o}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$

$k \in \mathbb{Z}$

ومنه المثلث oA_nA_{n+1} مثلث قائم في النقطة A_{n+1} ومتساوي الساقين

4-ب-التعبير عن l_n بدلالة n

لدينا $l_n = A_1A_1 + A_1A_2 + \cdots. + A_{n-1}A_n$

$\ln = |z_1 - z_0| + |z_2 - z_1| + |z_3 - z_4| + \cdots + |z_n - z_{n-1}|$

ولدينا $\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}} = i$

ومنه $z_{n+1} - z_n = iz_{n+1}$

أي $|z_{n+1} - z_n| = |iz_{n+1}| = |z_{n+1}|$

لدينا $|z_{n+1} - z_n| = |z_{n+1}|$ ومن أجل قيم n

$n = 0$ نجد $|z_1 - z_0| = |z_1| = u_1$

$n = 1$ نجد $|z_2 - z_1| = |z_2| = u_2$

.

.

$n = n-1$ نجد $|z_{(n-1)+1} - z_{n-1}| = |z_n| = u_n$

ومنه $l_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$

أي $l_n = u_1\frac{q^{n-1+1}-1}{q-1} = \sqrt{2}\,\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n - 1}{\frac{1}{\sqrt{2}}-1}$

$l_n = \frac{2\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n - 1\right]}{1-\sqrt{2}}$

حساب نهاية المتتالية (l_n)

$$\lim_{n\to+\infty} l_n = \lim_{n\to+\infty} 2\left(\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n - 1}{1-\sqrt{2}}\right)$$

لدينا $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = 0$ لأنّ: $-1 < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$

ومنه $\lim_{n\to+\infty} l_n = -\frac{2}{1-\sqrt{2}}$

121. متتالية مقترحة رقم: 47

الإسم على اليوتيوب: المتتاليات و البرهان بالتراجع رقم 31

نعرف متتالية (u_n) المجموعة $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد n، $u_n - 2u_{n+1} = 2n + 3$

1-برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n،
$$u_n = 2^{-n} - 2n + 1$$

2- (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ:
$$v_n = u_n + tn - 1$$

2-أ-بين أنه إذا كان $t \neq 2$ ، فإن المتتالية (v_n) تكون متباعدة

2-ب-أثبت أنه يوجد عدد طبيعي t ، تكون من أجل المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول

2-جـ-أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث:
$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$

3-في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس نعتبر النقط A ، B ، C و G حيث:
$2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + \lambda\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ مع λ عدد حقيقي
عين λ حتى تكون النقطة G مرجحا للنقط A ، B و C المرفقة بالمعاملات s_0 ، s_1 ، و s_2 على الترتيب

الحل

1-البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = 2^{-n} - 2n + 1$

-من أجل $n = 0$: لدينا $u_0 = 2$ و $2^{-2(0)} + 1 = 2$
ومنه $u_0 = 2^{-(0)} - 2(0) + 1$
إذن: $P(n)$ محققة من أجل $n = 0$:
-نفرض أن $P(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n
أي: $u_n = 2^{-n} - 2n + 1$
ونبرهن صحة $P(n+1)$
أي: $u_{n+1} = 2^{-(n+1)} - 2(n+1) + 1$
أي: $u_{n+1} = 2^{-(n+1)} - 2n - 1$
لدينا: $u_n - 2u_{n+1} = 2n + 3$
ومنه: $u_{n+1} = \frac{u_n - 2n - 3}{2}$
ولدينا من الفرضية: $u_n = 2^{-n} - 2n + 1$
ومنه: $u_{n+1} = \frac{2^{-n} - 2n + 1 - 2n - 3}{2} = \frac{2^{-n} - 4n - 2}{2}$
$$u_{n+1} = 2^{-n-1} - 2n - 1$$
$$u_{n+1} = 2^{-(n+1)} - 2n - 1$$
ومنه: $P(n+1)$ محققة $n+1$ أي:
$u_n = 2^{-n} - 2n + 1$ من أجل كل عدد طبيعي n

2-أ-تبيان أنه إذا كان $t \neq 2$، فإن المتتالية (v_n) تكون متباعدة:

-حتى تكون (v_n) متباعدة يجب أن يكون:
$$\lim_{n\to+\infty} |v_n| = +\infty$$
لدينا
$$v_n = u_n + tn - 1$$
$$= 2^{-n} - 2n + 1 + tn - 1$$
$$= 2^{-n} + n(t-2)$$
ولدينا $\lim_{n\to+\infty} 2^{-n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$
ومنه
$$\lim_{n\to+\infty} 2^{-n} + |(t-2)|n = +\infty \Leftrightarrow t - 2 \neq 0$$
أي $t \neq 2$
ومنه: (v_n) متباعدة من أجل $t \neq 2$

2-ب-إثبات أنه يوجد عدد طبيعي t تكون من أجله المتتالية (v_n) هندسية:

-حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يجب أن:
$$v_{n+1} = v_n . q$$
$$v_{n+1} = u_{n+1} + t(n+1) - 1$$
$$= \frac{u_n - 2n - 3}{2} + tn + t - 1$$
ومنه: $u_n = v_n - tn + 1$ ومنه: $v_n = u_n + tn - 1$
ومنه: $v_{n+1} = \frac{v_n - tn + 1 - 2n - 3}{2} + tn + t - 1$
$$v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n - \frac{1}{2}tn - n - 1 + tn + t - 1$$
إذن: $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + [\frac{1}{2}tn + t - n - 2]$
حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يجب أن:
$$\frac{1}{2}tn + t - n - 2 = 0$$
أي: $\frac{tn + 2t - 2n - 4}{2} = 0$
أي: $(t-2)n + 2(t-2) = 0$
ومنه: $(t-2)(n+2) = 0$
ومنه: $n + 2 > 0$ ومنه: $t - 2 = 0$ أي: $t = 2$
حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يجب أن تكون $t = 2$

-إيجاد v_0:
$$v_0 = u_0 + t(0) - 1$$
$$= 2 - 1 = 1$$

2-جـ-حساب المجموع S_n بدلالة n

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$
$$S_n = v_0 . \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = 1 . \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1}$$
$$S_n = -2[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1]$$

3-تعيين λ حتى تكون النقطة G مرجحا للنقط $A ;B$ وC المرفقة بالمعاملات S_0 ,S_1 وS_2 على الترتيب:

$$2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}+\lambda\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

$$S_n=-2[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1]$$

$$S_0=-2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{0+1}-1\right)=-2\left(\frac{1}{2}-1\right)=1$$

$$S_1=-2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2}-1\right]=\frac{3}{2}$$

$$S_2=-2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{3}-1\right]=\frac{7}{4}$$

حتى تقبل الجملة مرجح يجب أن يكون:

$S_0+S_1+S_2\neq 0$

$1+\frac{3}{2}+\frac{7}{4}=\frac{17}{4}\neq 0$

$$\overrightarrow{GA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{GB}+\frac{7}{4}\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

$$2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}+\frac{7}{2}\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

بالمقارنة نجد: $\lambda=\frac{7}{2}$ ومنه:

حتى تكون G مرجح الجملة $\{(A;S_0).(B;S_1).(C;S_2)\}$ يجب أن يكون $\lambda=\frac{7}{2}$

122. متتالية مقترحة رقم:48

الإسم على اليوتيوب: مواضيع مقترحة في الرياضيات في الاحتمالات والمتتاليات باك 2018 رقم 1

يقوم يونس بلعبة، بحيث حظوظ الربح هي نفسها حظوظ الخسارة في شوطها الأول. وتقبل أنه إذا ربح شوطا من هذه اللعبة فإن احتمال ربح الشوط الموالي له هو 0.4, وإذا خسر شوطا فإن احتمال خسارة الشوط الموالي هو 0.8.

n عدد طبيعي غير معدوم، G_n الحادثة "يربح الشوط رقم n" و P_n الحادثة "يخسر الشوط رقم n".

I-1-احسب مايلي: $P(G_1), P_{G_1}(G_2), P_{P_1}(G_2)$

ثم استنتج $P(G_2)$ و $P(P_2)$

II-من أجل كل x غير معدوم نضع:

$x_n=P(G_n)$ و $y_n=P(P_n)$

1-من أجل كل x غير معدوم: عين قيمة

$P_{G_n}(G_{n+1})$ و $P_{p_n}(P_{n+1})$

2-من أجل كل x غير معدوم: بين أن:

$$\begin{cases}x_{n+1}=0.4x_n+0.2y_n\\ y_{n+1}=0.6x_n+0.8y_n\end{cases}$$

3-من أجل كل x غير معدوم: نضع:

$v_n=x_n+y_n$ و $w_n=6x_n-2y_n$

-بيّن أنّ المتتالية (v_n) ثابتة و أن المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين عبارة حدها العام.

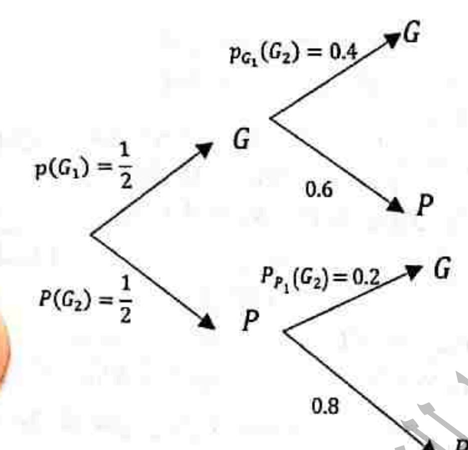
4-إستنتج عبارة x_n و y_n بدلالة n ثم عين $\lim_{n\to+\infty} x_n$ و $\lim_{n\to\infty} y_n$, ماذا تستنتج؟

الحل

I-1-حساب ما يلي : $p(G_1)$ ، $P_{G_1}(G_2)$ و $P_{P_1}(G_2)$

$p(G_1)$: احتمال ربح الشوط الأول

$$P(G_1)=\frac{1}{2}$$



حيث G تدل على الربح و p تدل على الخسارة ومنه

$P_{G_1}(G_2)$: احتمال ربح الشوط الثاني علما أن الشوط الأول ربح

$p_{G_1}(G_1)=0,4$

$P_{P_1}(G_2)=0,2$

الاستنتاج $p(G_2)$ و $p(p_2)$

لدينا $p(G_2)=p(G\cap G)+p(p\cap G)$

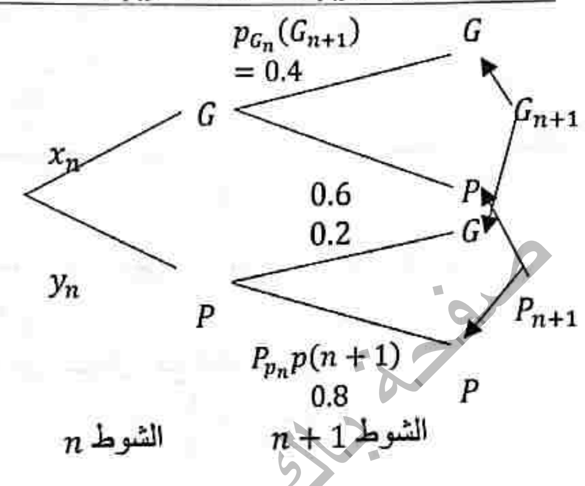
$$p(G_2)=\frac{1}{2}\times 0,4+\frac{1}{2}(0,2)=0,3$$

ولدينا $p(p_2)+p(G_2)=1$

$$p(p_2)=1-p(G_2)=1-0,3$$

$$p(p_2)=0.7$$

II-1-من أجل كل n غير معدوم تعيين قيمة $p_{p_n}(G_{n+1})$ و $p_{p_n}(p_{n+1})$



$p_{p_n}(p_{n+1}) = 0,8$

$p_{G_n}(G_{n+1}) = 0,4$

II-2-البرهان أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$

$x_{n+1} = 0,4x_n + 0,2y_n$

$y_{n+1} = 0,6\,x_n + 0,8\,y_n$

لدينا $x_n = p(G_n)$ و $y_n = p(p_n)$

و G_{n+1} لها سلكين في الشجرة

$x_{n+1} = p(G_{n+1}) = 0,4x_n + 0,2y_n$

وكذلك $y_{n+1} = p(P_{n+1}) = 0,6\,x_n + 0,8\,y_n$

II-3-البرهان أن (v_n) متتالية ثابتة

حسب قاعدة العقد في الاحتمالات فإن

$x_n + y_n = 1 = v_n$

ومنه (v_n) متتالية ثابتة

البرهان أن (w_n) متتالية هندسية:

تكون (w_n) هندسية إذا كان: $w_{n+1} = w_n q$

لدينا $w_{n+1} = 6x_{n+1} - 2y_{n+1}$

$$w_{n+1} = 6(0,4x_n + 0,2y_n) - 2(0,6x_n + 0,8\,y_n)$$
$$= 2.4x_n + 1.2y_n - 1.2x_n - 1,6y_n$$
$$= 1,2x_n - 0,4y_n$$
$$= \frac{2}{10}(6x_n - 2y_n)$$
$$= \frac{1}{5}w_n$$

ومنه المتتالية (w_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{5}$

وحدها الأول $w_1 = 6x_1 - 2y_1$

$x_1 = p(G_1) = \frac{1}{2}$

$y_1 = p(P_1) = \frac{1}{2}$

$$w_1 = 6\left(\frac{1}{2}\right) - 2\left(\frac{1}{2}\right) = 3 - 1 = 2$$

ومنه $w_1 = 2$

عبارة الحد العام لـ (w_n): $w_n = w_1 q^{n-1}$

$$w_n = 2\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

4-استنتاج x_n و y_n بدلالة n

لدينا $\begin{cases} x_n + y_n = 1 \\ 6x_n - 2y_n = w_n \end{cases}$

ومنه $\begin{cases} 2x_n + 2y_n = 2 \ldots\ldots (1) \\ 6x_n - 2y_n = w_n \ldots\ldots (2) \end{cases}$

بجمع (1)و (2) نجد $8x_n = w_n + 2$

$$x_n = \frac{1}{8}(w_n + 2)$$

ومنه $x_n = \frac{1}{8}\left(2\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + 8\right)$

$$x_n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + 1$$

$y_n = 1 - x_n$

$y_n = 1 - x_n$

ومنه $y_n = 1 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + 1$

تعيين $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + 1}{4}\right)$$

و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = 0$ لأن $-1 < \frac{1}{5} < 1$

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{4}$

تعيين $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty}\left[1 - \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + 1}{4}\right]$$

$$= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

الاستنتاج: لما يكون n كبير بالقدر الكافي فإن احتمال الخسارة يكون أكبر من احتمال الربح

متتاليات مقتبسة من مواضيع أجنبية

123. متتالية أجنبية رقم 01

الميتروبوليتان 2013

لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \end{cases}$$

1-أ-احسب كلا من u_1, u_2, u_3 و u_4

1-ب- أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية u_n

2-أ-اثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n

$$u_n \leq n + 3$$

2-ب-اثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$$

2-جـ-استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

3-نضع (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ

$$v_n = u_n - n$$

3-أ-اثبت أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$.

3-ب-استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n

$$u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$$

3-جـ-احسب نهاية المتتالية (u_n)

4-من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نضع

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

و $T_n = \frac{S_n}{n^2}$

4-أ-اكتب S_n بدلالة n.

4-ب-استنتج نهاية المتتالية (T_n).

الحل

1-أ-حساب كلا من u_1, u_2, u_3 و u_4

$$u_1 = \frac{2}{3}u_0 + \frac{1}{3}\times 0 + 1 = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3}$$

$$u_2 = \frac{2}{3}u_1 + \frac{1}{3}\times 1 + 1 = \frac{14}{9} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{26}{9}$$

$$u_3 = \frac{2}{3}u_2 + \frac{1}{3}\times 2 + 1 = \frac{52}{27} + \frac{2}{3} + 1 = \frac{97}{27}$$

$$u_4 = \frac{2}{3}u_3 + \frac{1}{3}\times 3 + 1 = \frac{194}{81} + 2 = \frac{356}{81}$$

1-ب-التخمين

من الحدود الأربع الأولى يبدو أن المتتالية (u_n)متزايدة

2-أ-البرهان أن$u_n \leq n + 3$من أجل كل عدد طبيعيn

نبرهن بالتراجع المتراجحة

نسمي الخاصية $P(n)$ المتراجحة $u_n \leq n + 3$

$n = 0$, $2 \leq 0 + 3$ و $u_0 = 2$

إذن الخاصية محققة من أجل قيمة ابتدائية $n = 0$

نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي أن $u_n \leq n + 3$

ونبرهن صحة $P(n+1)$ صحيحة

أي$u_{n+1} \leq n + 3 + 1$

لدينا من الفرض

$$u_n \leq n + 3 \Rightarrow \frac{2}{3}u_n \leq \frac{2}{3}(n+3)$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}u_n \leq \frac{2}{3}n + 2$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \leq \frac{2}{3}n + 2 + \frac{1}{3n} + 1$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \leq n + 3$$

$$n + 3 < n + 3 + 1$$

لأن $\Rightarrow u_{n+1} \leq (n+1) + 3$

ومنه $P(n+1)$ محققة

إذن $u_n \leq n + 3$ من أجل كل عدد طبيعي n

2-ب-إثبات العلاقة

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - u_n$$

$$= -\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$$

$$= \frac{1}{3}(-u_n + n + 3)$$

$$= \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$$

2-جـ-استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

لدينا $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$

ومن السؤال السابق نجد $u_n \leq n + 3$

ومنه $0 \leq n + 3 - u_n$

أي $u_{n+1}-u_n \geq 0$

ومنه $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متزايدة.

3-أ-إثبات أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{2}{3}$

$$v_{n+1}=u_{n+1}-(n+1)$$
$$=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1-n-1$$
$$=\frac{2}{3}u_n-\frac{2}{3}n=\frac{2}{3}(u_n-n)$$
$$v_{n+1}=\frac{2}{3}v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{2}{3}$

3-ب-استنتاج أن $u_n=2\left(\frac{2}{3}\right)^n+n$

لدينا (v_n) متتالية هندسية ومنه $v_n=v_0.q^n$

$$v_0=u_0-0=2$$

ومنه $v_n=2\left(\frac{2}{3}\right)^n$

ولدينا $u_n=v_n+n$

$$u_n=2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n+n$$

3-جـ حساب نهاية المتتالية (u_n)

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}[2.\left(\frac{2}{3}\right)^n+n]$$

لدينا $-1<\frac{2}{3}<1$

ومنه $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$ إذن $\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty$

4-أ-كتابة S_n بدلالة n

$$S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$$
$$S_n=\left(2\left(\frac{2}{3}\right)^0+0\right)+\left(2\left(\frac{2}{3}\right)^1+1\right)+\cdots+(2\left(\frac{2}{3}\right)^n+n$$
$$S_n=2\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)+..+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)+(0+1+..+n)$$
$$S_n=2.\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}+\frac{n(n+1)}{2}$$
$$S_n=2\times3\times\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)+\frac{n(n+1)}{2}$$
$$S_n=6\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)+\frac{n(n+1)}{2}$$

4-ب-استنتاج نهاية (T_n)

$$\frac{S_n}{n^2}=\frac{1}{n^2}\left(6\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)+\frac{n(n+1)}{2}\right)$$
$$=\frac{6}{n^2}\ (1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\ )+\frac{n(n+1)}{2n^2}$$
$$=\frac{6}{n^2}\ (1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\ )+\frac{n+1}{2n}$$
$$=\frac{6}{n^2}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}$$

لدينا $-1<\frac{2}{3}<1$ ومنه $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}=0$

إذن $\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n^2}=\frac{1}{2}$

124. متتالية أجنبية رقم 02

غيانا الاستوائية 2012

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم بـ:

$$\begin{cases}u_1=\frac{1}{2}\\u_{n+1}=\frac{n+1}{2n}u_n\end{cases}$$

1-أحسب u_2 ، u_3 و u_4

2-أ-أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن كل حدود المتتالية (u_n) موجبة تماما

2-ب-أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة

2-جـ- ماذا يمكننا استنتاجه بخصوص المتتالية (u_n)

3-من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نضع $v_n=\frac{u_n}{n}$

3-أ-اثبت أن المتتالية (v_n) هندسية مع تعيين أساسها وحدها الأول v_1

3-ب-استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n:

$$u_n=\frac{n}{2^n}$$

4-لتكن الدالة f معرفة في المجال $[1;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\ln x-x\ln 2$$

4-أ-عين نهاية المتتالية f عند $+\infty$

4-ب-استنتج نهاية المتتالية (u_n)

125. متتالية أجنبية رقم 03

الميتروبوليتان 2013

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ

$$\begin{cases}u_0=2\\u_{n+1}=\frac{u_n+2}{2u_n+1}\end{cases}$$

نقبل أن من أجل كل عدد طبيعي n. $u_n>0$

1-أ-احسب كلا من u_1, u_2, u_3 و u_4

1-ب-تحقق أنه إذا كان n عدد طبيعي أقل من أو يساوي 4 فإن u_n-1 و $(-1)^n$ نفس الإشارة.

1-جـ-اثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n.

$$u_{n+1}-1=\frac{-u_n+1}{2u_n+1}$$

1-د-اثبت باستعمال البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون u_n-1 و $(-1)^n$ نفس الإشارة.

2-من أجل كل عدد طبيعي n نضع $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}$

2-أ-اثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n

$$v_{n+1}=\frac{-u_n+1}{3u_n+3}$$

2-ب-برهن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $-\frac{1}{3}$

2-جـ-نقبل أنه من أجل كل عدد طبيعي n.

$$u_n=\frac{1+v_n}{1-v_n}$$

-عبر عن u_n بدلالة n واحسب نهاية المتتالية (u_n)

الحل

1-أ-حساب كلا من u_1, u_2, u_3 و u_4

$$u_1=\frac{u_0+2}{2u_0+1}=\frac{2+2}{2\times2+1}=\frac{4}{5}=0.8$$

$$u_2=\frac{\frac{4}{5}+2}{2\times\frac{4}{5}+1}=\frac{14}{5}\times\frac{5}{13}=\frac{14}{13}$$

$$u_3=\frac{\frac{14}{13}+2}{2\times\frac{14}{13}+1}=\frac{40}{13}\times\frac{13}{41}=\frac{40}{41}$$

$$u_4=\frac{\frac{40}{41}+2}{2\frac{40}{41}+1}=\frac{122}{41}\times\frac{41}{121}=\frac{122}{121}$$

1-ب- تحقق أن لـ u_n-1 و $(-1)^n$ نفس الإشارة من أجل $n\le4$

لدينا $(-1)^0>0$ و $u_0-1^0>0$

$(-1)^1<0$ و $u_1-1<0$

$(-1)^2>0$ و $u_2-1>0$

$(-1)^3<0$ و $u_3-1<0$

$(-1)^4>0$ و $u_4-1>0$

ومنه u_n-1 و $(-1)^n$ لهما نفس الإشارة من أجل $n\le4$

1-جـ-اثبات أن $u_{n+1}-1=\frac{-u_n+1}{2u_n+1}$

$$u_{n+1}-1=\frac{u_n+2}{2u_n+1}-1=\frac{u_n+2-2u_n-1}{2u_n+1}$$

$$u_{n+1}-1=\frac{-u_n+1}{2u_n+1}$$

1-د-اثبات بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون لـ(u_n-1) و $(-1)^n$ نفس الإشارة

رأينا أن لـu_0-1 و $(-1)^0$ نفس الإشارة ومنه الخاصية محققة من أجل قيمة ابتدائية $n=0$

نفرض أن الخاصية محققة أي أن لـu_n-1 و $(-1)^n$ نفس الإشارة ونبرهن أن الخاصية محققة من أجل $n+1$ أي أن لـ: $u_{n+1}-1$ و $(-1)^{n+1}$ نفس الإشارة.

$$u_{n+1}-1=\frac{(-u_n+1)}{2u_n+1}=(-u_n+1).\frac{1}{2u_n+1}$$

وبما أن $u_n>0$ فإن إشارة $u_{n+1}-1$ من إشارة $-(u_n-1)$ ولدينا من الفرض إشارة u_n-1 من إشارة $(-1)^n$ ومنه إشارة $u_{n+1}-1$ من إشارة $-(-1)^n$

ومنه من إشارة $(-1)^{n+1}$

إذن الخاصية محققة من أجل $n+1$

وأخيرا u_n-1 و $(-1)^n$ لهما نفس الإشارة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n.

2-أ-اثبات انه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ فإن: $v_{n+1}=\frac{-u_n+1}{3u_n+3}$

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1}=\frac{\frac{u_n+2}{2u_n+1}-1}{\frac{u_n+2}{2u_n+1}+1}$$

$$=\frac{u_n+2-2u_n-1}{2u_n+1}\times\frac{2u_n+1}{u_n+2+2u_n+1}$$

$$v_{n+1}=\frac{-u_n+1}{3u_n+3}$$

2-ب-البرهان أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $-\frac{1}{3}$

$$v_{n+1}=\frac{-u_n+1}{3u_n+3}=\frac{-(u_n-1)}{3(u_n+1)}=-\frac{1}{3}\times\frac{u_n-1}{u_n+1}$$

$$= -\frac{1}{3}v_n$$
$$v_{n+1} = -\frac{1}{3}v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $-\frac{1}{3}$

2-جـ-التعبير عن (u_n) بدلالة n

لدينا v_n متتالية هندسية أساسها $q = -\frac{1}{3}$ وحدها الأول v_0

$$v_0 = \frac{u_0-1}{u_0+1}$$
$$= \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

ومنه الحد العام لـ v_n هو $v_n = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$

ولدينا $u_n = \frac{1+v_n}{1-v_n}$

ومنه $u_n = \frac{1+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$

-حساب نهاية المتتالية u_n

لدينا $-1 < -\frac{1}{3} < 1$

ومنه $\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n}\right) = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$$

126. متتالية أجنبية رقم 04

المغرب 2016

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي:

$$u_0 = 2 \text{ و } u_{n+1} = \frac{3+u_n}{5-u_n}$$

1-تحقق من أجل $u_{n+1} - 3 = \frac{4(u_n-3)}{2+(3-u_n)}$ لكل n من $\mathbb{N}$ ثم بين بالتراجع أن $u_n < 3$ لكل n من $\mathbb{N}$

2-لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي:

$$v_n = \frac{u_n - 1}{3 - u_n}$$

لكل n من $\mathbb{N}$

2-أ-بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ثم استنتج أن $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$

2-ب-بيّن أنّ $u_n = \frac{1+3v_n}{1+v_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$ ثم اكتب u_n بدلالة n

2-جـ-حدد نهاية المتتالية (u_n)

الحل

1-التحقق من أن $u_{n+1} - 3 = \frac{4(u_n-3)}{2+(3-u_n)}$

لدينا $u_{n+1} - 3 = \frac{3+u_n}{5-u_n} - 3$

$$= \frac{3+u_n-15+3u_n}{5-u_n}$$
$$= \frac{-12+4u_n}{5-u_n}$$
$$= \frac{4(u_n-3)}{2+(3-u_n)}$$

البرهان بالتراجع أن $u_n < 3$ لكل $n \in \mathbb{N}$

من أجل $n = 0$ صحيحة، لدينا $u_0 = 2$ اذن $u_0 < 3$

ليكن n من $\mathbb{N}$

نفرض أن $u_n < 3$ صحيحة

ونبيّن أنّ $u_{n+1} < 3$ صحيحة

لدينا $u_n < 3$

ومنه $\frac{4(u_n-3)}{2+(3-u_n)} < 0$ لأن $u_n - 3 < 0$

و $2 + (3 - u_n) > 0$

اذن $u_{n+1} - 3 < 0$ صحيحة

ومنه $u_{n+1} < 3$

حسب مبدأ التراجع نستنتج أن $u_n < 3$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

2-أ-تبيان أن (v_n) متتالية هندسية

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{3-u_{n+1}} = \frac{\left(\frac{3+u_n}{5-u_n}\right)-1}{3-\frac{3+u_n}{5-u_n}}$$
$$= \frac{3+u_n-(5-u_n)}{3(5-u_n)-(3+u_n)}$$
$$= \frac{2u_n-2}{12-4u_n}$$
$$= \frac{u_n-1}{2(3-u_n)}$$
$$= \frac{1}{2}v_n$$

إذن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

وحدها الأول $v_0 = \frac{u_0-1}{3-u_0} = 1$

تحديد حدها العام:

$$v_n = v_0 q^n$$
$$v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

2-ب- تبيان أن $u_n = \frac{1+3v_n}{1+v_n}$

لدينا $v_n = \frac{u_n-1}{3-u_n} \Leftrightarrow v_n(3-u_n) = u_n - 1$

$$\Leftrightarrow 3v_n + 1 = u_n v_n + u_n$$
$$\Leftrightarrow 3v_n + 1 = u_n(v_n + 1)$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{3v_n+1}{v_n+1}$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{3v_n+1}{v_n+1}$$

اذن $u_n = \frac{3v_n+1}{v_n+1}$

كتابة الحد العام $u_n = \frac{3\left(\frac{1}{2}\right)^n+1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n+1}$

2-جـ-تحديد نهاية (u_n)

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} [\frac{3\left(\frac{1}{2}\right)^n+1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n+1} = 1$$

لأن $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

127. متتالية أجنبية رقم 05

الدورة الاستدراكية 2016 المغرب

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي:
$u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{1}{16}u_n + \frac{15}{16}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

1-أ-بين بالتراجع أن $u_n > 1$ لكل n من $\mathbb{N}$.

1-ب-تحقق من أن $u_{n+1} - u_n = -\frac{15}{16}(u_n - 1)$ لكل n من $\mathbb{N}$ ثم بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة.

1-جـ-استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

2-لتكن (v_n) المتتالية العددية بحيث $v_n = u_n - 1$ لكل n من $\mathbb{N}$.

2-أ-بين أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{16}$ واكتب v_n بدلالة n

2-ب-بين أنّ $u_n = 1 + \left(\frac{1}{16}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$ ثم حدد نهاية المتتالية (u_n)

128. متتالية أجنبية رقم 06

بوليتيزيا 2013

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $u_0 = \frac{1}{2}$ و $u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$

1-أ-احسب كلا من u_1 و u_2

1-ب-برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n:
$u_n > 0$

2-نقبل أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n < 1$

2-أ-أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة

2-ب-أثبت أن المتتالية (u_n) متقاربة

3-لتكن المتتالية (v_n) المعرفة بـ: $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$

3-أ-أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = 3$

3-ب-عبر عن المتتالية (v_n) بدلالة n

3-جـ-استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون:
$$u_n = \frac{3^n}{3^n+1}$$

5-احسب نهاية المتتالية (u_n)

129. متتالية أجنبية رقم 07

الدورة الاستدراكية 2017 المغرب

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي
$u_0 = 17$ و $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 12$ لكل n من $\mathbb{N}$.

1-أ-بين بالتراجع أن $u_n > 16$ لكل n من $\mathbb{N}$.

1-ب-بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة واستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

2- لتكن (v_n) المتتالية العددية بحيث $v_n = u_n - 16$ لكل n من $\mathbb{N}$.

2-أ-بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية.

2-ب-استنتج أن $u_n = 16 + \left(\frac{1}{4}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$ ثم حدد نهاية المتتالية (u_n).

2-جـ-حدد أصغر قيمة للعدد الصحيح الطبيعي n التي يكون من أجلها $u_n < 16.0001$.

130. متتالية أجنبية رقم 08

الدورة الاستدراكية 2015 المغرب

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بمايلي:
$u_1 = 5$ و $u_{n+1} = \frac{5u_n-4}{1+u_n}$ لكل n من $\mathbb{N}^*$.

1-أ-بين بالتراجع أن $u_n > 2$ لكل n من $\mathbb{N}^*$.

2-نعتبر المتتالية العددية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي
$v_n = \frac{3}{(u_n-2)}$ لكل n من $\mathbb{N}^*$.

2-أ-بيّن أنّ $v_{n+1} = \frac{1+u_n}{u_n-2}$ لكل n من $\mathbb{N}^*$ ثم بين أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية حسابية أساسها 1

2-ب-اكتب v_n بدلالة n واستنتج أن $u_n = 2 + \frac{3}{n}$ لكل n من $\mathbb{N}^*$.

2-حدد $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

131. متتالية أجنبية رقم 09

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي:

$u_0 = 3$ و $u_{n+1} = \frac{4u_n+3}{3u_n+4}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

1-بين بالتراجع أن $u_n > 1$ لكل n من $\mathbb{N}$.

2-نضع $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+1}$ لكل n من $\mathbb{N}$

2-أ- تحقق من أن $1 - v_n = \frac{2}{u_n+1}$ لكل n من $\mathbb{N}$

واستنتج أن $1 - v_n > 0$ لكل n من $\mathbb{N}$.

2-ب- بيّن أنّ $u_n = \frac{1+v_n}{1-v_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

3-أ- بيّن أنّ المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{7}$

اكتب (v_n) بدلالة n.

3-ب- بيّن أنّ $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n).

132. متتالية أجنبية رقم 10

الدورة الاستدراكية 2010 المغرب

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي:

$u_0 = 1$

$u_{n+1} = \frac{3u_n}{21+u_n}$

لكل n من $\mathbb{N}$.

1-بيّن أنّ $u_n > 0$ لكل n من $\mathbb{N}$.

2-بيّن أنّ $u_{n+1} < \frac{1}{7}u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$

3- بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة وأنها متقاربة.

4-أ- بين بالتراجع أن $u_n < \left(\frac{1}{7}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}^*$.

4-ب-حدد نهاية المتتالية u_n.

133. متتالية أجنبية رقم 11

تونس تقني رياضي 2015

لتكن المتتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2}{2\sqrt{2}-u_n} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

1-أ-أثبت بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

$u_n < \sqrt{2}$

1-ب-أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة

1-جـ-استنتج أن (u_n) متقاربة وحدد نهايتها l

2-نضع من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

$$v_n = \frac{u_n}{\sqrt{2} - u_n}$$

2-أ-تحقق أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

$$v_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - u_n}$$

2-ب-استنتج أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها 1

2-جـ-عبر عن v_n بدلالة n و أثبت أن $u_n = \frac{\sqrt{2}n}{n+1}$

3-ليكن من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$

$w_n = \ln(u_n)$ و $S_n = w_1 + w_2 + \cdots + w_n$

3-أ-أثبت أن $S_n = \frac{1}{2}n\ln 2 - \ln(n+1)$

3-ب-أحسب $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}$

134. متتالية أجنبية رقم 12

كاليدونيا الجديدة 2013 التعليم الخاص

لتكن المتتاليتان (u_n) و (v_n) المعرفتين بـ:

$v_0 = 10$ و $v_{n+1} = \frac{u_n+3v_n}{4}$

$u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{2u_n+v_n}{3}$

1- أ- أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$v_{(n+1)} - u_{n+1} = \frac{5}{12}(v_n - u_n)$$

1-ب-من أجل كل عدد طبيعي n

نضع $w_n = v_n - u_n$

أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n

$$w_n = 8\left(\frac{5}{12}\right)^n$$

2- أ – أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة و المتتالية (v_n) متناقصة

2-ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n و $u_n \leq 10$ و $v_n \geq 2$

2-جـ- استنتج أن للمتتاليتين (u_n) و (v_n) متقاربتان

3-أثبت أن للمتتاليتان (u_n) و (v_n) نفس النهاية

4- أ- أثبت أن المتتالية (t_n) المعرفة بـ: $t_n = 3u_n + 4v_n$ ثابتة.

4-ب- واستنتج أن نهاية كل من (u_n) و (v_n) هي $\frac{46}{7}$

الحل

1-أ- إثبات أن $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{5}{12}(v_n - u_n)$

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{2u_n + v_n}{3}$$

$$= \frac{3(u_n + 3v_n) - 4(2u_n + v_n)}{12}$$

$$= \frac{-5u_n + 5v_n}{12}$$
$$= \frac{5}{12}(v_n - u_n)$$

1-ب- إثبات أن: $w_n = 8\left(\frac{5}{12}\right)^n$

لدينا:
$$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1}$$
$$= \frac{5}{12}(v_n - u_n)$$
$$= \frac{5}{12}w_n$$

ومنه w_n متتالية هندسية أساسها $q = \frac{5}{12}$

وحدها الأول w_0: $w_0 = v_0 - u_0 = 10 - 2 = 8$

ومنه حدها العام: $w_n = w_0 q^n$
$$w_0 = 8\left(\frac{5}{12}\right)^n$$

2- أ- اثبات أن المتتالية (u_n) متزايدة

من أجل n طبيعي نجد:
$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + v_n}{3} - u_n$$
$$= \frac{2u_n + v_n - 3u_n}{3} = \frac{v_n - u_n}{3} = \frac{w_n}{3}$$

لدينا $w_n = 8\left(\frac{5}{12}\right)^n \geq 0$

ومنه $u_{n+1} - u_n > 0$

إذن المتتالية (u_n) متزايدة لما $n \in \mathbb{N}$

اثبات أن (v_n) متناقصة:

و
$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3v_n}{4} - v_n$$
$$= \frac{u_n + 3v_n - 4v_n}{4}$$
$$= \frac{u_n - v_n}{4} = -\frac{1}{4}(v_n - u_n)$$
$$= -\frac{1}{4}w_n \leq 0$$

ومنه $v_{n+1} - v_n \leq 0$

ومنه (v_n) متتالية متناقصة لما $n \in \mathbb{N}$

2-ب-استنتاج أن $u_n \leq 10$ و $v_n \geq 2$

لدينا u_n متتالية متزايدة ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$

ومنه
$$u_n \geq u_0 = 2$$
$$u_n \geq 2$$

نعلم أن
$$w_n \geq 0$$

ومنه
$$v_n - u_n \geq 0$$
$$v_n \geq u_n \geq 2$$

ومنه
$$v_n \geq 2$$

لدينا (v_n) متتالية متناقصة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

ومنه
$$v_n \leq v_0 = 10$$
$$v_n \leq 10$$

و
$$u_n \leq v_n \leq 10$$

ومنه
$$u_n \leq 10$$

2-جـ-استنتاج أن (v_n) و u_n متقاربتان:

لدينا (v_n) متتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 2 إذن هي متقاربة نحو نهايتها l

لدينا u_n متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 10 إذن هي متقاربة نحو نهايتها l'

3-اثبات أن لـ (v_n) و u_n نفس النهاية:

بما أن (u_n) و (v_n) متقارباتان فإن:
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1}$$
$$\lim_{n\to+\infty} v_n = l'$$

ومنه
$$l = \frac{2l + l'}{3}$$
$$3l = 2l + l'$$

ومنه
$$l = l'$$
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n$$

ومنه المتتاليتان (u_n) و (v_n) لهما نفس النهايات

4-أ-اثبات أن (t_n) متتالية ثابتة

$$t_{n+1} = 3u_{n+1} + 4v_{n+1}$$
$$t_{n+1} = 3 \times \frac{2u_n + v_n}{3} + 4 \times \frac{u_n + 3v_n}{4}$$
$$t_{n+1} = 2u_n + v_n + u_n + 3v_n$$
$$t_{n+1} = 3u_n + 4v_n$$
$$t_{n+1} = t_n$$

ومنه (t_n) متتالية ثابتة

4-ب-استنتاج نهاية كل من v_n و u_n هي $\frac{46}{7}$

لدينا
$$t_n = t_0 = 3u_0 + 4v_0 = 3 \times 2 + 4 \times 10$$
$$t_n = 46$$

مع $n \in \mathbb{N}$

ومنه
$$\lim_{n\to+\infty} t_n = 46$$
$$\lim_{n\to+\infty}(3u_n + 4v_n) = 46$$
$$\lim_{n\to+\infty} 3u_n + \lim_{n\to+\infty} 4v_n = 46$$
$$3\lim_{n\to+\infty} u_n + 4\lim_{n\to+\infty} v_n = 46$$
$$3l + 4l = 46$$
$$7l = 46$$
$$l = \frac{46}{7}$$

ومنه
$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{46}{7}$$

135. متتالية أجنبية رقم 13

الإسم على اليوتيوب: 2004 كاليدونيا الجديدة

لتكن المتتاليتان (u_n) و (v_n) المعرفتان من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_0 = 4$ و $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}+v_n}{2}$

$u_0 = 3$ و $u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$

1-أحسب u_1 ، v_1، u_2 و v_2

2-لتكن المتتالية (w_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $w_n = v_n - u_n$

2-أ-أثبت أن المتتالية (w_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$

2-ب-أعطي عبارة w_n بدلالة n وحدد نهاية المتتالية (w_n)

3-بعد دراسة اتجاه تغير المتتاليتين (u_n) و (v_n) ، أثبت أن المتتاليتين متجاورتان ، ما الذي يمكن استنتاجه

4-لتكن المتتالية (t_n) المعرفة بـ: $t_n = \frac{u_n+2v_n}{3}$

4-أ-أثبت أن المتتالية (t_n) ثابتة

4-ب-استنتج نهاية المتتالية (u_n) و (v_n)

136. متتالية أجنبية رقم 14

الإسم على اليوتيوب: تونس 2010 علوم تجريبية

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) معرفتان بـ:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \alpha u_n + (1-\alpha)v_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = (1-\alpha)u_n + \alpha v_n \end{cases}$$

حيث α عدد حقيقي بحيث $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

1- لتكن (t_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$$t_n = v_n - u_n$$

1-أ- احسب t_0 و t_1

1-ب- اثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي $\mathbb{N}$ بـ:

$$t_n = (2\alpha - 1)^n$$

1-جـ- استنتج نهاية المتتالية t_n

2-أ- اثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n \le v_n$

2-ب- اثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة والمتتالية (v_n) متناقصة

2-جـ- استنتج أن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متقاربتان نحو نفس النهاية l

2-د- اثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_n + v_n = 3$$

و استنتج قيمة النهاية l

الحل

1-أ-حساب t_0 و t_1

$$t_0 = v_0 - u_0 = 2 - 1 = 1$$

$$t_1 = v_1 - u_1$$
$$= [(1-\alpha)u_0 + \alpha v_0] - [\alpha u_0 + (1-\alpha)v_0]$$
$$= 1 - \alpha + 2\alpha - \alpha - 2(1-\alpha) = 2\alpha - 1$$
$$t_1 = 2\alpha - 1$$

1-ب-اثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي $\mathbb{N}$ بـ:

$$t_n = (2\alpha - 1)^n$$

الطريقة الأولى: استعمال البرهان بالتراجع:

من أجل $n = 0$ يكون $t_0 = 1 = (2\alpha - 1)^0$ مع $\alpha \neq \frac{1}{2}$

من أجل $n \in \mathbb{N}$ نفرض أن $t_n = (2\alpha - 1)^n$

ونثبت أن $t_{n+1} = (2\alpha - 1)^{n+1}$ من أجل $n+1$

لدينا

$$t_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1}$$
$$= [(1-\alpha)u_n + \alpha v_n] - [\alpha u_n + (1-\alpha)v_n]$$
$$= (1-2\alpha)u_n + (2\alpha - 1)v_n$$
$$= (2\alpha - 1)(v_n - u_n)$$
$$= (2\alpha - 1)t_n$$
$$= (2\alpha - 1)(2\alpha - 1)^n$$
$$= (2\alpha - 1)^{n+1}$$

ومنه فإن من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $t_n = (2\alpha - 1)^n$

الطريقة 2:

من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

$$t_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1}$$
$$= [(1-\alpha)u_n + \alpha v_n] - [\alpha u_n + (1-\alpha v_n)]$$
$$= (1-2\alpha)u_n + (2\alpha - 1)v_n$$
$$= (2\alpha - 1)(v_n - u_n)$$
$$= (2\alpha - 1)t_n$$

ومنه (t_n) متتالية هندسية أساسها $(2\alpha - 1)$ وحدها الأول $t_0 = 1$

ومنه فإن $t_n = (2\alpha - 1)^n$ صحيحة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

1-جـ-استنتاج نهاية t_n:

لدينا

$$\frac{1}{2} < \alpha < 1$$
$$1 < 2\alpha < 2$$
$$0 < 2\alpha - 1 < 1$$
$$-1 < 2\alpha - 1 < 1$$

إذن

$$\lim_{n \to +\infty} (2\alpha - 1)^n = 0$$

ومنه

$$\lim_{n \to +\infty} t_n = 0$$

2-أ-اثبات أنه من اجل كل $n \in \mathbb{N}$ $u_n \le v_n$

لدينا $(2\alpha - 1) > 0$

و $u_n - v_n = -t_n = -(2\alpha - 1)^n \le 0$

ومنه نستنتج أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

$u_n - v_n \le 0$

أي $u_n \le v_n$

2-ب-اثبات أن المتتالية (u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة

اتجاه تغير (u_n)

$$u_{n+1} - u_n = [\alpha u_n + (1-\alpha)v_n] - u_n$$
$$= (1-\alpha)(v_n - u_n) = (1-\alpha)t_n > 0$$

لأن $(\alpha < 1)$

ومنه المتتالية (u_n) متزايدة

اتجاه تغير (v_n)

$$v_{n+1} - v_n = [(1-\alpha)u_n + \alpha v_n] - v_n$$
$$= (\alpha - 1)(v_n - u_n)$$
$$= (\alpha - 1)t_n \le 0$$

لأن $(\alpha \le 1)$

ومنه المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة

2-ج-استنتاج أن u_n و v_n متقاربتان نحو نفس النهاية l

لدينا مما يلي: من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $u_n \le v_n$

المتتالية (u_n) متزايدة و المتتالية (v_n) متناقصة

و $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = \lim_{n\to+\infty} t_n = 0$

ومنه المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان إذن متقاربتان نحو نفس النهاية l

2-د-أثبات أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

$$u_n + v_n = 3$$

الطريقة 1-(استعمال البرهان بالتراجع)

من أجل $n = 0$ يكون $u_0 + v_0 = 1 + 2 = 3$

من أجل $n \in \mathbb{N}$ نفرض $u_n + v_n = 3$

ونبرهن أن $u_{n+1} + v_{n+1} = 3$ من أجل $n+1$

$$u_{n+1} + v_{n+1} = [(1-\alpha)u_n + \alpha v_n] + [\alpha u_n + (1-\alpha)v_n]$$
$$= u_n - \alpha u_n + \alpha v_n + \alpha u_n + v_n - \alpha v_n$$
$$= u_n + v_n = 3$$

ومنه نبرهن حسب نظرية البرهان بالتراجع نجد أن من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n + v_n = 3$

الطريقة 2: (استعمال المتتالية الثابتة)

من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ لدينا

$$u_{n+1} + v_{n+1} = [(1-\alpha)u_n + \alpha v_n] + [\alpha v_n + (1 - \alpha v_n)]$$
$$= u_n + v_n$$

ومنه المتتالية $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ثابتة

$$u_n + v_n = u_0 + v_0 = 3$$

استنتاج قيمة النهاية l

لدينا المتتاليتان (u_n) و (v_n) متقاربتان نحو نفس النهاية l

ومنه وبالانتقال الى النهاية في المعادلة

نجد أن $u_n + v_n = 3$

$$\lim_{n\to+\infty}[u_n + v_n] = 3$$
$$\lim_{n\to+\infty} u_n + \lim_{n\to+\infty} v_n = 3$$
$$l + l = 3$$
$$2l = 3$$

ومنه $l = \frac{3}{2}$

137. متتالية أجنبية رقم 15

نعرف المتتاليتين (a_n) و (b_n) بـ:

$$\begin{cases} b_0 = 7 \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 2b_n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{1}{3}(2a_n + b_n) \end{cases}$$

من أجل (D) مستقيم مرفوق بالمعلم $(o;\vec{i})$

من أجل $n \in \mathbb{N}$ نعتبر النقط A_n و B_n ذات الاحداثيات a_n و b_n على الترتيب

1-عين النقط A_0 ، B_0 ، A_1 ، B_1 ، A_2 و B_2

2-لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_n = b_n - a_n$ من أجل كل عدد طبيعي n

أثبت أن المتتالية (u_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ مع تحديد حدها الأول

3-قارن بين a_n و b_n ، أدرس اتجاه تغير (a_n) و (b_n)

فسر هذه النتيجة هندسيا

4-أثبت أن المتتالية (a_n) و (b_n) متجاورتان

5-لتكن المتتالية (v_n) المعرفة بـ: $v_n = a_n + b_n$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

-أثبت أن المتتالية (v_n) ثابتة

-استنتاج أن القطع المستقيمة $[A_n, B_n]$ تملك نفس المركز I

6- اثبت أن المتتالية (a_n) و (b_n) متقاربتان وأحسب نهايتهما ثم فسر هذه النتيجة هندسيا

138. متتالية أجنبية رقم 16

الإسم على اليوتيوب: تونس 2015

1-لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية حدها الأول $u_0=\frac{1}{3}$ و أساسها $\frac{1}{3}$

1-أ- احسب u_1

1-ب- احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

1-جـ- من أجل كل عدد طبيعي n نضع

$S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$

اثبت أن $S_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)$

2- من خلال دراسة تغيرات الدالة $f(x)\to e^x-1-x$ اثبت أن $1+x\le e^x$ من أجل كل عدد حقيقي x

3- لتكن (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ:

$v_n=(1+u_0)\times(1+u_1)\times\ldots\times(1+u_n)$

3-أ- احسب v_0 و v_1

3-ب- بيّن أنّ المتتالية (v_n) متزايدة

3-جـ- اثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n

$v_n\le e^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)}$

3-د-أثبت أن المتتالية (v_n) متقاربة

4-لتكن l نهاية المتتالية (v_n)

اثبت أن $1<l\le\sqrt{e}$

139. متتالية أجنبية رقم 17

-لنعتبر المستقيم (D) والمرفق بالمعلم $(o;\vec{i})$

-لتكن (A_n) متتالية نقطة المستقيم D والمعرفة بـ

-A_0 هي النقطة ذات الإحداثية 0

-A_1 هي النقطة ذات الإحداثية 1

-من أجل كل عدد طبيعي n.النقطة A_{n+2} هي منتصف القطعة المستقيمة $[A_n;A_{n+1}]$.

1-أ-عين على المستقيم (D) النقط A_0,A_1,A_2,A_3,A_4,A_5 و A_6 مع أخذ $10cm$ وحدة الرسم.

1-ب- من أجل كل عدد طبيعي n. نضع a_n لاحقة النقطة A_n احسب a_2,a_3,a_4,a_5 و a_6.

1-جـ- من اجل كل عدد طبيعي n.برر المساواة التالية

$$a_{n+2}=\frac{a_{n+1}+a_n}{2}$$

2- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n,

$$a_{n+1}=-\frac{1}{2}a_n+1$$

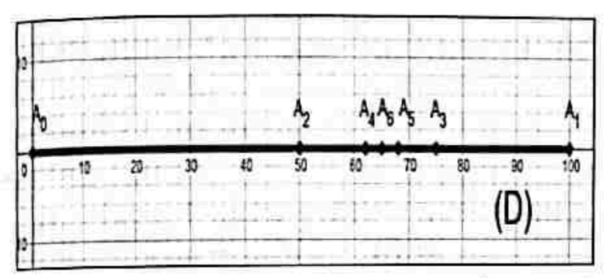
3-لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=a_n-\frac{2}{3}$

-أثبت أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $-\frac{1}{2}$.

4-احسب نهاية المتتالية (v_n) والمتتالية (a_n).

الحل

1-أ-تعيين النقط على البيان



1-ب-حساب a_2,a_3,a_4,a_5 و a_6

$$a_2=\frac{1}{2}(a_0+a_1)=\frac{1}{2}(0+1)=\frac{1}{2}$$

$$a_3=\frac{1}{2}(a_1+a_2)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$$

$$a_4=\frac{1}{2}(a_2+a_3)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)=\frac{5}{8}$$

$$a_5=\frac{1}{2}(a_3+a_4)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{8}\right)=\frac{11}{16}$$

$$a_6=\frac{1}{2}(a_4+a_5)=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{8}+\frac{11}{16}\right)=\frac{21}{32}$$

1-جـ-تبرير المساواة $a_{n+2}=\frac{a_{n+1}+a_n}{2}$

ليكن A و B نقطتان لاحقتاهما a و b على الترتيب إذن لاحقة نقطة منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ هي $\frac{a+b}{2}$

ومنه فإن $a_{n+2}=\frac{a_{n+1}+a_n}{2}$ من أجل كل من $n\in\mathbb{N}$

2-البرهان بالتراجع ان $a_{n+1}=-\frac{1}{2}a_n+1$

$$-\frac{1}{2}a_0+1=1=a_1$$

ومنه فإن المعادلة محققة من أجل قيمة ابتدائية $n=0$

-نفرض أن المعادلة محققة من أجل n أي

$$a_{n+1}=-\frac{1}{2}a_n+1$$

ونبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي

$$a_{n+2} = -\frac{1}{2}a_{n+1} + 1$$

لدينا من فرض التراجع

$$a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + 1$$

$$-\frac{1}{2}a_n = a_{n+1} - 1$$

$$a_n = -2a_{n+1} + 2$$

ولدينا $a_{n+2} = \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1})$

$$= \frac{1}{2}(-2a_{n+1} + 2 + a_{n+1})$$

$$= \frac{1}{2}(-a_{n+1} + 2)$$

$$a_{n+2} = -\frac{1}{2}a_{n+1} + 1$$

ومنه فإن المعادلة محققة من اجل $n+1$

وفي الأخير نجد حسب البرهان بالتراجع أن

$a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + 1$ من أجل كل عدد طبيعي n

3-إثبات أن (v_n) هندسية

$$v_{n+1} = a_{n+1} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}a_n + 1 - \frac{2}{3}$$

$$= -\frac{1}{2}a_n + \frac{1}{3}$$

$$= -\frac{1}{2}(a_n - \frac{2}{3})$$

$$v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n$$

ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = -\frac{1}{2}$

4-حساب نهاية المتتالية (v_n)

بما أن $-1 < -\frac{1}{2} < 1$

فإن $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$

حساب نهاية المتتالية (a_n)

لدينا $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} [a_n - \frac{2}{3}] = 0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{2}{3}$$

140. متتالية أجنبية رقم 18

لتكن المتتالية (z_n) ذات الحدود المركبة المعرفة بـ

$$\begin{cases} z_0 = 1 + i \\ z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{3} \end{cases}$$

من أجل كل عدد طبيعي n نضع $z_n = a_n + ib_n$

حيث a_n الجزء الحقيقي لـz_n و b_n الجزء التخيلي لـz_n.

1-من أجل كل عدد طبيعيnاكتبz_{n+1} بدلالة a_n وb_n.

-استنتج التعبير عن a_{n+1} بدلالة a_n و b_n والتعبير عن b_{n+1} بدلالة a_n و b_n.

2-ماهي طبيعة المتتالية (b_n)؟ استنتج عبارة b_n بدلالة n وحدد نهاية المتتالية (b_n).

3-أ-نذكر أنه من أجل كل عددين مركبين z و z'.

العلاقة المثلثية $|z + z'| \le |z| + |z'|$

اثبت أنه من اجل كل عدد طبيعي n

$$|z_{n+1}| \le \frac{2|z_n|}{3}$$

3-ب-من أجل كل عدد طبيعي n،نضع $u_n = |z_n|$

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n

$$u_n \le \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$$

3-جـ-أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n,

$$|a_n| \le u_n$$

استنتج أن المتتالية (a_n) متقاربة نحو نهاية يطلب تعيينها .

الحل

1- كتابة z_{n+1} بدلالة a_n وb_n

لدينا $z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{3}$

$$= \frac{a_n + ib_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{3}$$

$$= \frac{a_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{3} + i.\frac{b_n}{3}$$

-استنتاج a_{n+1} وb_{n+1} بدلالة a_n و b_n

لدينا $z_{n+1} = a_{n+1} + ib_{n+1}$

و $z_{n+1} = \frac{a_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{3} + i.\frac{b_n}{3}$

ومنه $a_{n+1} + i\,b_{n+1} = \frac{a_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{3} + i.\frac{b_n}{3}$

بالمطابقة نجد

$$a_{n+1}=\frac{a_n+\sqrt{a_n^2+b_n^2}}{3}$$

$$b_{n+1}=\frac{b_n}{3}$$

2- تحديد طبيعة (b_n)

لدينا

$$b_{n+1}=\frac{b_n}{3}=\frac{1}{3}(b_n)$$

ومنه (b_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ وحدها الأول $b_0=1$

معناه الحد العام للمتتالية (b_n) هو

$$b_n=b_0.q^n=1\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

ومنه $b_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$, $n\in\mathbb{N}$

-حساب نهاية المتتالية (b_n)

لدينا $-1<\frac{1}{3}<1$

ومنه $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$

معناه $\lim_{n\to+\infty} b_n=0$

3-أ-إثبات المتراجحة $|z_{n+1}|\le\frac{2|z_n|}{3}$

لدينا

$$|z_{n+1}|=\left|\frac{z_n+|z_n|}{3}\right|=\frac{|z_n+|z_n||}{|3|}=\left|\frac{z_n+|z_n|}{3}\right|$$

$$|z_{n+1}|=\frac{|z_n+|z_n||}{3}\le\frac{|z_n|+|z_n|}{3}$$

ومنه $|z_{n+1}|\le\frac{2|z_n|}{3}$

3-ب-البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n\le\left(\frac{2}{3}\right)^n\sqrt{2}$

لدينا الخاصية $p(n)$ $u_n\le\left(\frac{2}{3}\right)^n\sqrt{2}$

لدينا $u_0=|z_0|=\sqrt{2}=\left(\frac{2}{3}\right)^0\sqrt{2}$

و ومنه $u_0\le\left(\frac{2}{3}\right)^0\sqrt{3}$ ومنه $p(0)$ محققة

ومنه المتراجحة محققة من أجل n

أي $u_n\le\left(\frac{2}{3}\right)^n\sqrt{2}$

محققة ونبرهن صحة المتراجحة من أجل $n+1$

أي $u_{n+1}\le\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\sqrt{2}$

لدينا $u_{n+1}=|z_{n+1}|$

من فرضية التراجع

$$u_{n+1}\le\frac{2|z_n|}{3}=\frac{2}{3}u_n\le\frac{2}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n\sqrt{2}$$

ومنه $u_{n+1}\le\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\sqrt{2}$

ومنه المتراجحة محققة من أجل $n+1$

وأخيرا وحسب البرهان بالتراجع $u_n\le\left(\frac{2}{3}\right)^n\sqrt{2}$

3-جـ-أثبات أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ يكون $|a_n|\le u_n$

لدينا: $u_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}\ge\sqrt{a_n^2}=|a_n|$

ومنه $u_n\ge|a_n|$

استنتاج أن (a_n) التقارب نحو نهاية يطلب تعينها

-من السؤال السابق نجد أن:

$$|a_n|\le\left(\frac{2}{3}\right)^n\sqrt{2}$$

ومنه $-\left(\frac{2}{3}\right)^n\sqrt{2}\le a_n\le\left(\frac{2}{3}\right)^n\sqrt{2}$

و $-1<\frac{2}{3}<1$

إذن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$

معناه وحسب مبرهنة الحصر نجد أن $\lim_{n\to+\infty} a_n=0$

ومنه فإن (a_n) متتالية متقاربة نحو نهايتها $l=0$

141. متتالية أجنبية رقم 19

الإسم على اليوتيوب: بونديشيري 2006

المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$ نأخذ الوحدة في الرسم هي $5cm$.

نضع $z_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n.

$$z_{n+1}=\frac{1+i}{2}z_n$$

ولتكن A_n نقطة اللاحقة z_n.

1-احسب كل من z_1, z_2, z_3 و z_4 وتأكد أن z_4 هو عدد حقيقي.

عين النقط $A_0 A_1, A_2, A_3$ و A_4

2-من أجل كل عدد طبيعي n نضع $u_n=|z_n|$

برهن أن المتتالية (u_n) هندسية وعين حدها العام.

3-من أجل أي رتبة n_0 كل النقط A_n تنتمي إلى قرص D مركزه O ونصف قطره 0.1.

4-أ-اثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n

$$\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}=i$$

-استنتج طبيعة المثلث OA_nA_{n+1}

ب-من أجل كل عدد طبيعي n نضع l_n طول الخط المكسور $A_0A_1A_2A_3\dots A_{n-1}A_n$

لدينا $l_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \dots + A_{n-1}A_n$

اكتب l_n بدلالة n.

ماهي نهاية المتتالية (l_n).

الحل

1- حساب كل من z_1, z_2, z_3 و z_4

$$z_1 = 2.\frac{1+i}{2} = 1+i$$

$$z_2 = \frac{1+i}{2}(1+i) = \frac{1}{2}(1+i)^2 = \frac{1}{2}(1+2i-1) = i$$

$$z_3 = \frac{1+i}{2}i = \frac{-1+i}{2}$$

$$z_4 = \frac{1+i}{2}.\frac{-1+i}{2} = \frac{i^2-1^2}{4} = -\frac{1}{2}$$

ومنه z_4 هو عدد حقيقي

تعيين النقط A_1, A_2, A_3 و A_4

2-بيان أن u_n هندسية

لدينا $\left|\frac{1+i}{2}\right| = \frac{1}{2}|1+i| = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$u_{n+1} = |z_{n+1}| = \left|\frac{1+i}{2}\right| \times |z_n| = \frac{1}{\sqrt{2}}u_n$$

ومنه المتتالية u_n هندسية أساسها $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ وحدها الأول $u_0 = 2$

حدها العام هو

$$u_n = u_0q^n$$

$$u_n = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

3-تعيين قيمة n_0 بحيث النقط A_n تنتمي إلى قرص D مركزه O ونصف قطره 0.1

$$A_n \in D \Leftrightarrow OA_n \leq 0,1 \Leftrightarrow |z_n| \leq 0,1 \Rightarrow u_n \leq 0.1$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \leq \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^n} \leq \frac{1}{20}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\right)^n \geq 20$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\sqrt{2}^n\right) \geq \ln(20)$$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{2}\ln 2 \geq \ln(20)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{2\ln(20)}{\ln 2} \approx 8.6$$

$\Leftrightarrow n \geq 9$ (لأن $n \in \mathbb{N}$)

ومنه $n_0 = 9$

4-أ-اثبات أن $\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}} = i$

لدينا $\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}} = 1 - \frac{z_n}{z_{n+1}} = 1 - \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}$

$= 1-(1-i) = i$

أي $\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}} = i$

استنتاج طبيعة المثلث OA_nA_{n+1}

لدينا $\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}} = i$

$$z_{n+1} - z_n = i.z_{n+1}$$

ومنه $|z_{n+1} - z_n| = |i| \times |z_{n+1}|$

ومنه $|z_{n+1} - z_n| = |z_{n+1}|$

معناه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

$$A_{n+1}A_n = A_{n+1}O \dots (1)$$

ولدينا $\arg\left(\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}\right) = \arg(i)$

ومنه $\arg\left(\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$$\arg(z_{n+1}-z_n) - \arg(z_{n+1}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\arg(z_{n+1}-z_n) = \arg(z_{n+1}) + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

ومنه $\left(\overrightarrow{A_{n+1}O}, \overrightarrow{A_{n+1}A_n}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

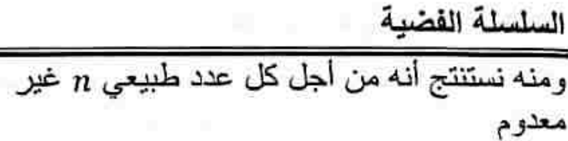
ومنه $\left(\overrightarrow{OA_{n+1}}, \overrightarrow{A_nA_{n+1}}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \dots (2)$

من (1) و (2) نجد أن OA_nA_{n+1} مثلث قائم ومتساوي الساقين في A_{n+1}.

4-ب-كتابة l_n بدلالة n

لدينا $l_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \dots + A_{n-1}A_n$

ولدينا $A_{k-1}A_k = OA_k = u_k = 2\left(\frac{1}{2}\right)^k$



ومنه نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم

$$l_n = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^1 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \cdots + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

$$= 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\left(1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$l_n = \frac{2}{\sqrt{2}-1}\left(1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right)$$

-نهاية المتتالية (l_n)

لدينا $-1 < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$

ومنه $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = 0$

ومنه $\lim_{n\to+\infty} l_n = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{2}{\sqrt{2}-1}\left(1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right)\right]$

$$\lim_{n\to+\infty} l_n = \frac{2}{\sqrt{2}-1}$$

142. متتالية أجنبية رقم 20

الإسم على اليوتيوب: بونديشيري 2014 التعليم الخاص

من أجل كل عدد طبيعي n نضع A_n نقطة اللاحقة z_n المعرفة بـ

$$\begin{cases} z_0 = 1 \\ z_{n+1} = \left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)z_n \end{cases}$$

نعرف المتتالية (r_n) بـ $r_n = |z_n|$ من أجل كل عدد طبيعي n.

1-أعط الشكل الأسي للعدد $\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i$.

2-أ-اثبت أن المتتالية (r_n) هندسية أساسها $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2-ب-استنتج عبارة r_n بدلالة n.

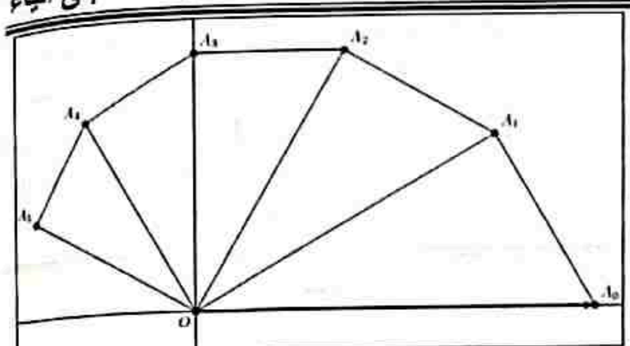
2-جـ-ماذا يمكن القول على طول OA_n لما n يؤول $+\infty$

3-أ-اثبت أن المثلث OA_nA_{n+1} قائم في A_{n+1}.

3-ب-نقبل أن $z_n = r_n e^{in\frac{\pi}{6}}$

عين قيم n بحيث A_n نقطة تنتمي إلى محور التراتيب.

4-عين على الشكل A_6, A_7, A_8, A_9 مع إبراز خطوط الرسم.



الحل

1-إعطاء الشكل الأسي للعدد $\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i$

$$\left|\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{12}{16}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta = \arg\left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right) \begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \theta = \frac{\pi}{6}$$

أي $\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$

2-أ-إثبات أن (r_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$r_{n+1} = |z_{n+1}| = \left|\left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)z_n\right|$$

$$= \left|\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right| \times |z_n|$$

$$r_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}r_n$$

ومنه المتتالية (r_n) هندسية أساسها $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2-ب-استنتاج عبارة r_n

لدينا $r_0 = |z_0| = |1| = 1$

ومنه $r_n = r_0 q^n = 1 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$

$$r_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

2-جـ-القول على طول OA_n لما n يؤول $+\infty$:

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا

$$OA_n = |z_n| = r_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

بما أن $-1 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n=0$$

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} OA_n=0$

ومنه الطول OA_n يؤول إلى الصفر كلما اقترب n من $+\infty$

3-أ- اثبات أن المثلث OA_nA_{n+1} قائم في A_{n+1}.

$OA_n=r_n$ و $OA_{n+1}=r_{n+1}=\frac{\sqrt{3}}{2}r_n$

$$A_{n+1}A_n=|z_{n+1}-z_n|=\left|\left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z_n-z_n\right|$$

$$=|z_n|\times\left|\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}-1\right|$$

$$=\left|-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right|r_n=\sqrt{\left(\frac{-1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}\;r_n$$

$$=\sqrt{\frac{4}{16}}r_n=\frac{1}{2}r_n$$

$$A_{n+1}O^2+A_{n+1}A_n^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2r_n^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2r_n^2$$

$$=\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)r_n^2=OA_n^2$$

ومنه وحسب مبرهنة فيثاغورس نجد أن المثلث OA_nA_{n+1} قائم في A_{n+1}.

3-ب-تعيين قيمة n بحيث A_n تنتمي إلى محور التراتيب

لدينا $r_n>0$ و $z_n=re^{in\frac{\pi}{6}}$.

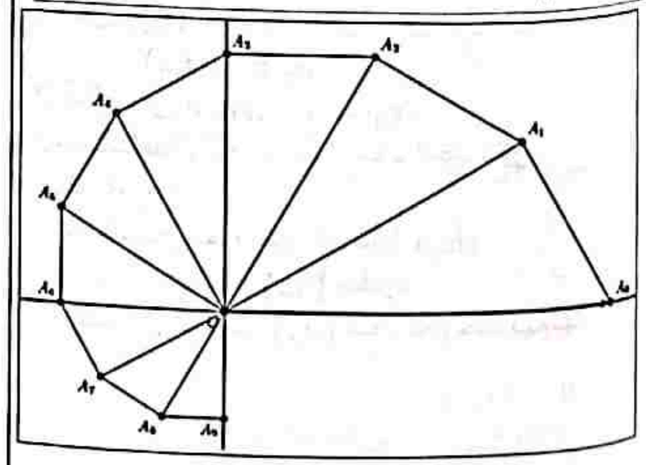
فإن $A_n\in(oy)$ معناه يوجد عدد k

بحيث $n.\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi$

$$n=3+6k$$

ومنه مجموعة القيم n هي $n=3+6k$

4-الانشاء



143. متتالية أجنبية رقم 21

الأسئلة الثلاثة منفصلة عن بعضها كل الإجابات يجب تبريرها

1-نعرف المتتالية (u_n) ذات الحدود الموجبة بـ:

$$u_0=1$$
$$\ln(u_{n+1})=\ln(u_n)-1$$

هل المتتالية (u_n) هندسية

2-لتكن (v_n) متتالية ذات حدود موجبة تماما

نعرف المتتالية (w_n) من أجل كل عدد طبيعي n بـ:

$$w_n=1-\ln(v_n)$$

القضية (p) التالية صحيحة أو خاطئة؟

(p): إذا كانت المتتالية (v_n) محدودة من الأعلى فإن المتتالية (w_n) محدودة من الأعلى

3-المتتالية (z_n) ذات الحدود المعرفة بـ:

$$z_0=2+3i$$
$$z_{n+1}=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}}{4}\right)z_n$$

من أجل أي قيم n يكون $|z_n|<10^{-20}$

الحل

1-البرهان أن المتتالية (u_n) هندسية

ليكن $n\in\mathbb{N}$

$$\ln(u_{n+1})=\ln(u_n)-1$$
$$e^{\ln(u_{n+1})}=e^{\ln(u_n)-1}$$
$$u_{n+1}=\frac{e^{\ln(u_n)}}{e^1}$$
$$u_{n+1}=\frac{1}{e}u_n$$

ومنه المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية أساسها $\frac{1}{e}$

2-تبيان هل القضية p صحيحة

من أجل $n\in\mathbb{N}$

نبرهن باستخدام المثال المضاد

بوضع $v_n=\frac{1}{n+1}$

نجد أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $v_n\leq 1$

ومنه المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة من الأعلى ، و من جهة أخرى يكون

$$w_n=1-\ln\left(\frac{1}{n+1}\right)=1+\ln(n+1)$$

و $\lim\limits_{n\to+\infty}[1+\ln(n+1)]=+\infty$

معناه $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=+\infty$

ومنه المتتالية (w_n) ليست محدودة من الأعلى
ومنه الخاصية (p) خاطئة

3-تعين قيمة n بحيث يكون $|z_n| < 10^{-20}$

$$\left|\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{i\sqrt{6}}{4}\right| = \frac{1}{4}\left|\sqrt{2}+i\sqrt{6}\right|$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{6}\right)^2}$$
$$= \frac{\sqrt{8}}{4} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$|z_0| = \sqrt{(2)^2+(3)^2} = \sqrt{13}$$

ومنه أجل كل $n \in \mathbb{N}$

$$|z_{n+1}| = \left|\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}}{4}\right)z_n\right|$$
$$= \left|\frac{\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}}{4}\right||z_n|$$
$$|z_{n+1}| = \frac{1}{\sqrt{2}}|z_n|$$

إذن المتتالية $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية أساسها $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ومنه نستنتج أن

$$|z_n| = |z_0| \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$
$$|z_n| = \frac{\sqrt{13}}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$$

من أجل $n \in \mathbb{N}$

$$|z_n| \leq 10^{-20} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{13}}{\left(\sqrt{2}\right)^n} \leq \frac{1}{10^{20}}$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\right)^n \geq \sqrt{13}\times 10^{20}$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(\left(\sqrt{2}\right)^n\right) \geq \ln\left(\sqrt{13}\times 10^{20}\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{n}{2}\ln(2) \geq \frac{\ln(13)}{2} + 20\ln(10)$$

لأن $\ln(2) > 0$
$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(13)+40\ln(10)}{\ln(2)}$$
$$\Leftrightarrow n \geq 136.50\ldots$$

(لأن $n \in \mathbb{N}$)
$$\Leftrightarrow n \geq 137$$

ومنه قيمة n هي $n \geq 137$

144. متتالية أجنبية رقم 22

الإسم على اليوتيوب: سنغال 2019

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ:
$$u_n = \int_n^{n+1} e^{-2n}dx$$

1-أحسب u_0 ، u_1 و u_2

2-اثبت أن $u_n = -\frac{1}{2}e^{-2n}(e^{-2}-1)$

3-أثبت أن المتتالية (u_n) هندسية وحدد أساسها

4-أحسب المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots u_{n-1}$

145. متتالية أجنبية رقم 23

الإسم على اليوتيوب: بكالوريا جويانا الإستوائية 2010 التعليم الخاص

الجزء الأول:

لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ
$$g(x) = x - x\,ln(x)$$

1-أ-احسب نهاية الدالة عند $+\infty$.

1-ب-تذكير أن $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t} = 0$

-اثبت أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} x ln\, x = 0$.

-واستنتج نهاية g عند 0.

2-اثبت أن مشتقة الدالة g على المجال $]0;+\infty[$ هي
$$g'(x) = -\ln x$$

3-ارسم جدول تغيرات الدالة g.

الجزء الثاني:

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n \in \mathbb{N}^*$ بـ $u_n = \frac{e^n}{n^n}$

1-خمن بالاستعانة بالآلة الحاسبة ما يلي

1-أ-اتجاه تغير المتتالية u_n.

1-ب-نهاية المتتالية u_n.

2-لتكن (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ بـ:
$$v_n = \ln(u_n)$$

2-أ-اثبت أن $v_n = n - n\ln n$.

2-ب-باستعمال الجزء الأول,حدد اتجاه تغير المتتالية(v_n).

2-جـ-استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

3-اثبت أن المتتالية (u_n) محدودة.

4- اثبت أن المتتالية (u_n) متقاربة وحدد نهايتها.

الحل

الجزء الأول

1-أ-حساب نهاية الدالة عند $+\infty$

لدينا $g(x) = x - x\ln x$

ومنه
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} [x - x\ln(x)]$$
$$\lim_{x\to+\infty} x[1 - \ln(x)]$$
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

1-ب-اثبات أن $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} x\ln x = 0$

باستعمال تغيير متغير وبأخذ $t = \frac{1}{x}$ ومنه لما $x \to 0$ يكون $t \to +\infty$

ومنه يكون لدينا
$$\lim_{\substack{x\to0\\>}} x\ln x = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\ln(t)$$
$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{-\ln(t)}{t} = 0$$
ومنه
$$\lim_{\substack{x\to0\\>}} x\ln x = 0$$

-استنتاج نهاية g عند 0

لدينا مما سبق $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} x\ln x = 0$

و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} x = 0$

ومنه $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} x - x\ln x = 0$

معناه $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} g(x) = 0$

2-اثبات أن عبارة مشتقة الدالة g هي $g'(x) = -\ln x$

لدينا
$$g(x) = x - x\ln(x)$$
$$g'(x) = 1 - \ln x - \frac{1}{x}x$$
$$g'(x) = 1 - \ln x - 1$$
ومنه
$$g'(x) = -\ln x$$

3-رسم جدول تغيرات الدالة g

لدينا $g'(x) = -\ln x$

ومنه من أجل $x \in]0;1]$ يكون $g'(x) > 0$ ومن أجل

$x \in]1;+\infty[$

يكون $g'(x) < 0$

ومنه $g(x)$ متزايدة على المجال $]0;1]$ ومتناقصة على المجال $[1;+\infty[$

لدينا $g(1) = 1$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	↗	1	↘	$-\infty$

الجزء الثاني

1-نعطي القيم الأولى للمتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

n	u_n
1	2.718..
2	1.847..
3	0.743..
4	0.213..
5	0.047..
6	0.008..

1-أ-تخمين اتجاه تغير (u_n)

من القيم الأولى لـ(u_n) يبدو أن المتتالية (u_n) متناقصة

1-ب-تخمين نهاية المتتالية (u_n)

من القيم الأولى لـ(u_n) يبدو أن المتتالية (u_n) تؤول إلى 0 أي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

2-أ-إثبات أن $v_n = n - n\ln n$

لدينا
$$v_n = \ln(u_n) = \ln\left(\frac{e^n}{n^n}\right) = \ln(e^n) - \ln(n^n)$$
$$= n - n\ln n$$

2-ب-تحديد اتجاه تغير المتتالية (v_n)

لدينا $v_n = g(n)$ ومن السؤال 3 من الجزء الأول الدالة g متناقصة على المجال $[1;+\infty[$ ولدينا
$$1 \le n < n+1$$
$$g(n) > g(n+1)$$
$$v_n > v_{n+1}$$
ومنه $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية متناقصة تماما.

2-جـ-استنتاج اتجاه تغير (u_n)

لدينا (v_n) متتالية متناقصة معناه $v_n > v_{n+1}$

ونعلم أن المتتالية الأسية هي متتالية متزايدة ومنه
$$e^{v_{n+1}} > e^{v_n}$$
ولدينا
$$v_n = \ln(u_n)$$
$$u_n = e^{v_n}$$
معناه $u_{n+1} < u_n$ أي $u_{n+1} - u_n < 0$

ومنه (u_n) متتالية متناقصة تماما.

3-إثبات أن (u_n) متتالية محدودة

المتتالية (u_n) متناقصة معناه $u_n \le u_1$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ و (u_n) متتالية موجبة لأنّ $e^n > 0$ و $n^n > 0$ ومنه $\frac{e^n}{n^n} > 0$ ومنه $u_n > 0$

ومنه $0 \le u_n \le u_1$

$0 \le u_n \le e$

معناه $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية محدودة.

4-إثبات أن المتتالية (u_n) متقاربة

لدينا (u_n) متتالية متناقصة محدودة من الأسفل بالعدد 0 ومنه (u_n) متقاربة نحو نهايتها ℓ.

-تحديد نهايتها

لدينا $u_n = e^{v(n)}$

ولدينا من السؤال السابق $\lim\limits_{n\to+\infty} g(n) = -\infty$

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

ومنه نهاية (u_n) هي 0 أي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

146. متتالية أجنبية رقم 24

الإسم على اليوتيوب: بكالوريا جوان 2012

الجزء الأول:

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بـ

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

1-ادرس تغيرات الدالة f

2-استنتج إشارة الدالة f على المجال $[1;+\infty[$.

الجزء الثاني:

-لتكن المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$

1-أ-أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n

$u_{n+1} - u_n = f(n)$

1-ب-استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

2-أ-من أجل كل عدد طبيعي k غير معدوم أثبت أن

$$\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\right) dx \ge 0$$

-استنتج ان $\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{x}\right) dx \le \frac{1}{k}$

-أثبت ما يلي $\ln(k+1) - \ln k \le \frac{1}{k} \ldots. (1)$

2-ب-أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم

$$\ln(n+1) \le 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

2-جـ-استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم يكون $u_n \ge 0$

3-برهن أن المتتالية (u_n) متقاربة (لم يطلب حساب النهاية).

الحل

الجزء الأول

1-دراسة تغيرات الدالة f على المجال $[1;+\infty[$

-حساب النهايات

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

ولدينا $f(1) = \frac{1}{2} + \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

-حساب المشتقة

الدالة f معرفة وقابلة للإشتقاق على المجال $[1;+\infty[$ ودالتها المشتقة هي

$$f'(x) = -\frac{(x+1)'}{(x+1)^2} + \frac{\left(\frac{x}{x+1}\right)'}{\frac{x}{x+1}}$$

$$= -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{x+1}{x} \times \frac{1(x+1) - x\times 1}{(x+1)^2}$$

$$= -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x(x+1)} = \frac{-x + (x+1)}{x(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x(x+1)^2}$$

لدينا $x \in [1;+\infty[$ ومنه $x > 0$

معناه $\frac{1}{x(x+1)^2} > 0$ ومنه $f'(x) > 0$

إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$.

جدول التغيرات f

x	1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\frac{1}{2}+\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ ↗ 0

2-استنتاج إشارة الدالة f

لدينا الدالة $f(x)$ متزايدة تماما ومنه ومن أجل كل عدد حقيقي x

لدينا

$$f(x) < \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

$$f(x) < 0$$

ومنه f دالة سالبة تماما على المجال $[1;+\infty[$

1-أ-إثبات أن $u_{n+1}-u_n=f(n)$

$$u_{n+1}-u_n$$
$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)-\ln(n+1)$$
$$-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)+\ln(n)$$
$$=\frac{1}{n+1}+\ln(n)-\ln(n+1)$$
$$=\frac{1}{n+1}+\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$
$$=f(n)$$

1-ب-استنتاج اتجاه تغير (u_n)

من السؤال 3 للجزء الأول نجد الدالة f سالبة على المجال $[1;+\infty[$ ومنه من أجل كل $n\geq 1$ يكون
$$f(n)<0$$
ومنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون
$$u_{n+1}-u_n<0$$
إذن المتتالية (u_n) متناقصة تماما

2-أ-أثبت أن: $\int_k^{k+1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{x}\right)dx\geq 0$

من أجل كل عدد طبيعي k مستمرة و موجب تماما الدالة $x\to\frac{1}{k}-\frac{1}{x}$ مستمرة على المجال $]0;+\infty[$ إذن هي كذلك على المجال $[k;k+1]$ إذن التكامل $\int_k^{k+1}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{x}\right)dx$ موجب

من أجل كل x حقيقي من المجال $[k;+\infty[$

ولدينا $x\geq k>0$ اذن $\frac{1}{x}\leq\frac{1}{k}$

ومنه $\frac{1}{k}-\frac{1}{x}\geq 0$

اذن $\int_k^{k+1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{x}\right)dx\geq 0$

استنتاج أن $\int_k^{k+1}\left(\frac{1}{k}\right)dx\leq\frac{1}{k}$

لدينا
$$\int_k^{k+1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{x}\right)dx=\int_k^{k+1}\frac{1}{k}dx-\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx$$
$$=\frac{1}{k}\times(k+1-k)-\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx$$
$$=\frac{1}{k}-\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx$$

وبما أن $\int_k^{k+1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{x}\right)dx\geq 0$

فان $\frac{1}{k}-\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx\geq 0$

إذن $\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx\leq\frac{1}{k}$

-اثبات أن: $\ln(k+1)-\ln k\leq\frac{1}{k}$

$$\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx=[\ln x]_k^{k+1}$$
$$=\ln(k+1)-\ln k$$

ولدينا $\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx\leq\frac{1}{k}$

إذن $\ln(k+1)-\ln(k)\leq\frac{1}{k}$

2-ب-إثبات العلاقة
$$\ln(n+1)\leq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

لدينا من العلاقة (1) $\ln(k+1)-\ln(k)\leq\frac{1}{k}$

من أجل

$$\begin{cases} k=1,\ln(2)-\ln(1)\leq 1\\ k=2,\ln(3)-\ln(2)\leq\frac{1}{2}\\ \vdots\\ k=n-1,\ln(n)-\ln(n-1)\leq\frac{1}{n-1}\\ k=n,\ln(n+1)-\ln(n)\leq\frac{1}{n}\end{cases}$$

بالجمع طرفا لطرف نجد
$$\ln(n+1)\leq 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}$$
وهو المطلوب

2-جـ-استنتاج أنه من أجل $u_n\geq 0,n\in\mathbb{N}^*$

لدينا $u_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$

ومنه ومن المتراجحة السابقة نجد أن
$$\ln(n+1)\leq 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$$

ومنه
$$\ln(n+1)-\ln(n)$$
$$\leq 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n)$$
$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\leq u_n$$

لدينا $n+1>n$
$$\frac{n+1}{n}>1$$
$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)>0$$

ومنه $0<\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\leq u_n$
$$0\leq u_n$$

3-بيان أن (u_n) متقاربة

لدينا المتتالية (u_n) متناقصة من السؤال (1) ومحدودة من الأسفل بالعدد 0 من السؤال (2) ومنه نستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

147. متتالية أجنبية رقم 25

الإسم على اليوتيوب: بكالوريا تونس تقني رياضي 2012

جدول التغيرات التالي هو لدالة f المعرفة على $[1;+\infty[$ بـ: $f(x)=2-x+\ln x$

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	
$f(x)$	1	↘	$-\infty$

1-أ-اثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\ln(\alpha)=\alpha-2$ في المجال $]1;+\infty[$

1-ب-استنتج إشارة الدالة f على المجال $]1;+\infty[$

2-لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ معرفة بـ

$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=2+\ln(u_n) \end{cases} n\in\mathbb{N}$$

2-أ-أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n

$1\le u_n\le\alpha$

2-ب-أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة.

2-جـ-استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة وحدد نهايتها.

الحل

1-أ- اثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\ln(\alpha)=\alpha-2$ في المجال $]1;+\infty[$

من جدول التغيرات نجد أن

f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$

ولدينا $f(1)>0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

أي $f(\alpha)\in]1;+\infty[$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة $f(\alpha)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]1;+\infty[$

لدينا $f(\alpha)=0$

$2-\alpha+\ln(\alpha)=0$

معناه $\ln(\alpha)=\alpha-2$

1-ب-استنتاج إشارة الدالة f على المجال $]1;+\infty[$

f متناقصة على $]1;+\infty[$ إذن: f سالبة على المجال $]\alpha;+\infty[$ وموجبة على المجال $]1;\alpha[$

x	1		α		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

2-أ-اثبات أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ $1\le u_n\le\alpha$

نثبت بالتراجع المتراجحة $p(n): 1\le u_n\le\alpha$

من أجل $n=0$ ، $1\le1\le\alpha$ و $u_0=1$

ومنه $1\le u_0\le\alpha$ ومنه $p(0)$ محققة

من أجل $n\in\mathbb{N}$ نفرض أن $1\le u_n\le\alpha$ صحيحة

ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي $1\le u_{n+1}\le\alpha$

لدينا $1\le u_n\le\alpha$

إذا $\ln(1)\le\ln u_n\le\ln(\alpha)$

$2\le2+\ln u_n\le2+\ln(\alpha)$

ولدينا مما سبق $\ln(\alpha)=\alpha-2$

ومنه $2\le2+\ln(u_n)\le2+\alpha-2$

$1\le2\le2+\ln(u_n)\le\alpha$

$1\le u_{n+1}\le\alpha$

أي $p(n+1)$ محققة

ومنه وحسب البرهان بالتراجع نجد أن $1\le u_n\le\alpha$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$

2-ب-إثبات أن (u_n) متزايدة

من أجل كل $n\in\mathbb{N}$

لدينا $u_{n+1}-u_n=2+\ln u_n-u_n$

$=f(u_n)$

لدينا $1\le u_n\le\alpha$

ولدينا من السؤال (1) ب الدالة f موجبة على المجال $[1;\alpha]$

ومنه فإن $f(u_n)\ge0$ إذا $u_{n+1}-u_n\ge0$

ومنه المتتالية (u_n) متزايدة

2-جـ-استنتاج أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة وتحديد نهايتها

-المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد α إذا هي متقاربة نحو نهايتها ℓ.

تحديد نهايتها ℓ

لدينا المتتالية (u_n) متقاربة فإن

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$

ومنه $2+\ln(\ell)=\ell$

$2+\ln(\ell)-\ell=0$

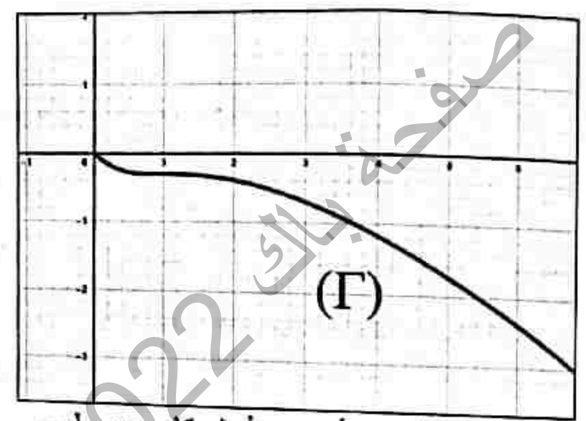
$f(\ell)=0\Rightarrow\ell=\alpha$

إذا $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\alpha$

148. متتالية أجنبية رقم 26

الإسم على اليوتيوب: باك تقني تونس 2016

1-المنحنى (Γ) الدالة g المعرفة على $[0;+\infty[$ في مستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس بـ:
$$f(x)=-x+\ln(1+x^2)$$



بالقراءة البيانية برر أنه من أجل كل عدد طبيعي حقيقي $x\in[0;+\infty[$
يكون $\ln(1+x^2)\le x$

2-نعتبر المتتالية (u_n) معرفة بـ:
$$\begin{cases} u_0=\dfrac{3}{2}\\ u_{n+1}=\dfrac{1}{2}\ln(1+u_n^2)\,;\, n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

2-أ-أثبت انه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ أن يكون $u_n>0$

2-ب-أثبت انه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ يكون
$$u_{n+1}\le\frac{1}{2}u_n$$

2-ج-استنتج أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ يكون
$$u_n\le\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

2-د-إستنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة و أعطي نهايتها

3-ليكن (S_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ:
$$S_n=u_0+u_1+\dots.+u_n$$

3-أ-أثبت أن المتتالية (S_n) متزايدة تماما

3-ب-أثبت انه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ يكون
$$S_n\le 3-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

3-ج-استنتج أن المتتالية (S_n) متقاربة

الحل

1- التبرير أنه من أجل كل عدد طبيعي حقيقي $x\in[0;+\infty[$ يكون $\ln(1+x^2)\le x$

نلاحظ أن المنحني الدالة f يقع تحت محور الفواصل

و $f(0)=0$

ومنه $f(x)\le 0$ من أجل كل $x\in[0;+\infty[$

اذا $-x+\ln(1+x^2)\le 0$ من أجل كل $x\in[0;+\infty[$

ومنه $\ln(1+x^2)\le x$ من أجل كل $x\in[0;+\infty[$

2-أ- اثبات أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ يكون: $u_n>0$

نثبت ذلك باستعمال البرهان بالتراجع

نسمي الخاصية $p(n)$ الخاصية $u_1>0$

لدينا من اجل $n=0$- $u_0=\frac{3}{2}>0$ نفرض صحة الخاصية $p(n)$ محققة من أجل n

أي $u_n>0$

نبرهن أن المتراجحة محققة من أجل $n+1$ أي $u_{n+1}>0$

$$u_n>0$$
$$1+u_n^2>1$$
$$\ln(1+u_n^2)>\ln 1$$
$$\frac{1}{2}\ln(1+u_n^2)>0$$
$$u_{n+1}>0$$

إذن الخاصية محققة من أجل $n+1$

ومنه حسب البرهان بالتراجع نجد أن $u_n>0$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$

2-ب- اثبات أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ $u_{n+1}\le\frac{1}{2}u_n$

من السؤال (1) نجد $\ln(1+x^2)\le x$ من أجل كل $x\in[0;+\infty[$

ومن جهة أخرى نجد $u_n>0$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$

إذن $\ln(1+u_n^2)\le u_n$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$

$$\ln(1+u_n^2)\le u_n$$
$$\frac{1}{2}\ln(1+u_n^2)\le\frac{1}{2}u_n$$
$$u_{n+1}\le\frac{1}{2}u_n$$

إذن $u_{n+1}\le\frac{1}{2}u_n$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$

2-جـ- استنتج أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ يكون $u_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

لدينا مما سبق نجد: $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$

ومنه

$$u_1 \leq \frac{1}{2}u_0$$
$$u_2 \leq \frac{1}{2}u_1$$
$$\vdots$$
$$u_n \leq \frac{1}{2}u_{n-1}$$

بالضرب طرفا لطرف وبما أن كل الحدود موجبة تماما نجد أن $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n u_0$

ومنه $u_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

2-د- استنتاج أن (u_n) متقاربة و اعطاء نهايتها

من السؤال السابق نجد أن

$$0 \leq u_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

و $\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ لأن $-1 < \frac{1}{2} < 1$

ومنه حسب مبرهنة الحصر نجد:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

إذن المتتالية (u_n) متقاربة نحو نهايتها $l = 0$

3-أ- اثبات أن المتتالية (S_n) متزايدة تماما

(S_n) متتالية معرفة بـ:

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$
$$S_{n+1} - S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n + u_{n+1} - (u_0 + u_1 + \cdots + u_n)$$
$$= u_{n+1} > 0$$

إذن (S_n) متتالية متزايدة

3-ب- اثبات أن من أجل كل حدود n يكون: $S_n \leq 3 - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

لدينا من أجل $n \in \mathbb{N}$

$$u_n \leq \frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$$
$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$
$$u_0 \leq \frac{3}{2}$$
$$u_1 \leq \left(\frac{3}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$\vdots$$
$$u_{n-1} \leq \frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$u_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

الجمع طرفا لطرف نجد أن

$$S_n \leq \frac{3}{2}\left[\left((1) + (\frac{1}{2}) + \cdots + (\frac{1}{2})\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

حيث $[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n]$ مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول1.

$$1 \leq \frac{3}{2}\left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 3 - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

ومنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

$$S_n \leq 3 - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

3-جـ- استنتاج أن المتتالية S_n متقاربة

المتتالية (S_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى إذن فهي متقاربة

149. متتالية أجنبية رقم 27

الإسم على اليوتيوب: بكالوريا جوان 2010 بولينيزيا

الجزء الأول: لتكن الدالة g المعرفة على المجال $[1; +\infty[$ بـ: $g(x) = \ln(2x) + 1 - x$

1-أ-ادرس تغيرات الدالة f.

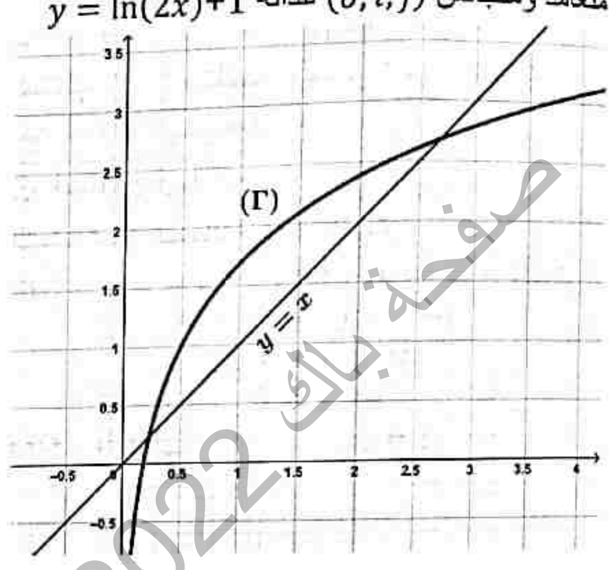
1-ب-اثبت أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في المجال $[1; +\infty[$ حلا وحيدا α

1-جـ- اثبت أن $\ln(2\alpha) + 1 = \alpha$.

2-لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \ln(2u_n) + 1 \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

(Γ) التمثيل البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ للدالة $y = \ln(2x)+1$



2-أ-باستعمال المنحنى (Γ) مثل على محور الفواصل الحدود الأربع الأولى للمتتالية (u_n).

2-ب-اثبت أنه من اجل كل عدد طبيعي n

$$1 \le u_n \le u_{n+1} \le 3$$

2-جـ- برهن أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو α.

الجزء الثاني: نعتبر المتتالية f المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ $f(x) = (x-1)e^{1-x}$

(C) التمثيل البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ للدالة f.

1-من أجل كل عدد حقيقي $x \ge 1$ نضع

$$F(x) = \int_1^x f(t)dt = \int_1^x (t-1)e^{1-t}dt$$

1-أ-اثبت أن المتتالية F متزايدة على المجال $[1;+\infty[$

1-ب-باستعمال المكاملة بالتجزئة ,عين عبارة $F(x)$ بدلالة x

1-جـ-اثبت أن المعادلة $F(x) = \frac{1}{2}$ تكافئ المعادلة

$$\ln(2x) + 1 = x$$

2-من أجل كل عدد حقيقي $a \ge 1$ نعتبر D_a مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C) وحامل محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتهما على التوالي $x = 1$ و $x = a$

-حدد العدد a بحيث المساحة D_a تساوي $\frac{1}{2}$

150. متتالية أجنبية رقم 28

الإسم على اليوتيوب: واشنطن 2019

الجزء الأول: في المجال $[0;+\infty[$ نعرف الدالة f بـ: $f(x) = x - \ln(x+1)$

1-ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0;+\infty[$

2-استنتج أنه من أجل كل $x \in [0;+\infty[$ يكون $\ln(x+1) \le x$

الجزء الثاني: نضع $u_0 = 1$ ومنه أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = u_n - \ln(1+u_n)$

1-أحسب u_1 ، u_2

2-أ-أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n \ge 0$

2-ب-اثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة واستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $u_n \le 1$

2-جـ-أثبت أن المتتالية (u_n) متقاربة

3-نضع l نهاية المتتالية (u_n) نقبل أن $l = f(l)$ حيث f دالة الجزء الأول واستنتج قيمة l

الحل ✍

1-دراسة اتجاه تغير الدالة f

الدالة f مستمرة وقابلة للاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ لأنها مجموع دوال مستمرة وقابلة للاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$

من أجل كل عدد حقيقي $x \in [0;+\infty[$ يكون:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$$

في المجال $[0;+\infty[$ يكون $x \ge 0$ و $x+1 > 0$

ومنه $f'(x) \ge 0$ في المجال $[0;+\infty[$

إذن الدالة $f(x)$ متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$

2-استنتاج أن $\ln(x-1) \le x$

$$f(0) = 0 - \ln 1 = 0$$

من أجل كل $x \in [0;+\infty[$

يكون $0 = f(0) \le f(x)$ لأنّ f متزايدة

إذن $0 \le f(x)$

$$0 \le x - \ln(x+1)$$

ومنه نستنتج أن: $\ln(x+1) \le x$

1-حساب u_1 ، u_2

$$u_1 = 1 - \ln 2$$
$$u_2 = 1 - \ln(2) - \ln(2 - \ln 2)$$

2-أ-اثبات بالتراجع أنه من أجل كل $u_n \geq 0$

من أجل $n = 0$ ، $u_0 = 1 \geq 0$

من أجل $n \in \mathbb{N}$ نفرض أن $u_n \geq 0$ ونثبت أن $u_{n+1} \geq 0$

لدينا من الفرض : $u_n \geq 0$

ومن السؤال الجزء الأول f دالة متزايدة تماما ومستمرة

معناه $f(u_n) \geq f(0)$

$$u_n - \ln(u_n + 1) \geq 0$$
$$u_{n+1} \geq 0$$

و منه حسب البرهان بالتراجع من أجل $n \in \mathbb{N}$ فإن $u_n \geq 0$

2-ب-اثبات أن المتتالية (u_n) متناقصة

من أجل كل $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = -\ln(1 + u_n)$$

ومن السؤال السابق $u_n \geq 0$

$$u_n + 1 \geq 1$$
$$\ln(u_n + 1) \geq 0$$

ومنه $u_{n+1} - u_n \leq 0$

وعليه المتتالية (u_n) متناقصة و $u_0 = 1$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$u_n \leq u_0$ أي $u_n \leq 1$

2-جـ إثبات أن المتتالية (u_n) متقاربة:

المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بـ 0 و منه المتتالية (u_n) متقاربة

3- استنتاج قيمة l

النهاية l حل للمعادلة $f(x) = x$

لدينا $f(x) = x \Leftrightarrow x - \ln(1 + x) = x$

$$\Leftrightarrow -\ln(1 + x) = 0$$
$$\Leftrightarrow 1 + x = 1$$
$$\Leftrightarrow x = 0$$

ومنه نستنتج أن $l = 0$



























FB: okacha bookStore مكتبة عكاشة

Okacha.bookstore@gmail.com

03Rue de Stade Ouled Fayet-Alger- Algérie

Tel: 0540 87 38 02 I 0673 08 62 05 I 0 72 38 82 02

03 شارع الملعب أولاد فايت الجزائر العاصمة





22-1B

9 789931 856177

معتمد من طرف

عكاشة
ACADEMY

تصميم بواسطة



تحت إشراف

